3. 因数分解せよ.

(1) x^4-20x^2+64　(2) x^4+2x^2+9　(3) x^4+64

(4) $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$　(5) $(x+1)(x+2)(x+9)(x+10)-180$

(1) [考] $x^2=t$ とひとまとめにするとできる.但し1次式までできるかもしれないので注意

[解] 与式 $=(x^2-4)(x^2-16)=\underline{(x+2)(x-2)(x+4)(x-4)}$

(2) [考] (1)と同じ複2次式であるけれども $x^2=t$ でできない.そこで $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ の利用を考える。x^2の係数2に着目と同時に定数項9に着目する.

[解] 与式 $=x^4+6x^2+9-4x^2=(x^2+3)^2-4x^2=(x^2+3+2x)(x^2+3-2x)$

$=\underline{(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)}$

(3) 与式 $=x^4+16x^2+64-16x^2=(x^2+8)^2-16x^2=(x^2+8+4x)(x^2+8-4x)$

$=\underline{(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)}$

(4) [考] $(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$ が使えそうな気がするが……

実際 $a+b+c$ の因数はすぐにみるが,あとが大変みたい.基本に戻るか.

[解] 与式 $=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b+c)^2(b-c)^2$

$=\{a^2-(b+c)^2\}\{a^2-(b-c)^2\}=\underline{(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)}$

[補] たして $-2b^2-2c^2$ かけて $(b+c)^2(b-c)^2$ となるのは $-(b+c)^2$ と $-(b-c)^2$

[別解] 与式 $=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2+c^2)^2-4b^2c^2=(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2$ | (2)を使う

$=(a^2-b^2-c^2+2bc)(a^2-b^2-c^2-2bc)=\{a^2-(b-c)^2\}\{a^2-(b+c)^2\}$

$=\underline{(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a-b-c)}$

(5) [考] 全て展開してまとめて分解は大変.そこで,ひとまとめにできるものの組合せを考える.

1,4項,2,3項の組合せには,x^2+11x が出てくる.

[解] 与式 $=(x^2+11x+10)(x^2+11x+18)-180=(x^2+11x)^2+28(x^2+11x)$

$=(x^2+11x)(x^2+11x+28)=\underline{x(x+11)(x+4)(x+7)}$

[補] $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$ の分解練習.特に与式が(4)みたいに文字の場合の練習をしておくと良い.

複2次式の因数分解　1. $x^2=t$ とおく.　2. A^2-B^2 に変形

5. $a^2\geqq 1$ の時 $\sqrt{2a^2-1-2a\sqrt{a^2-1}}$ を簡単にせよ.

[考] $\sqrt{A^2}=|A|=\begin{cases} A\geqq 0 \text{ ならば } A \\ A<0 \text{ ならば } -A \end{cases}$

2重根号をはずす. (⇒P4, P.7)

$$\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}$$

この問題では、$\sqrt{(A-B)^2}=|A-B|$ を用いる方が楽です.

$a\geqq 0$ ならば $a=\sqrt{a^2}$ ですから 与式 $=\sqrt{2a^2-1-2\sqrt{a^2(a^2-1)}}=\sqrt{a^2}-\sqrt{a^2-1}=a-\sqrt{a^2-1}$ | $a^2>a^2-1$

$a<0$ ならば $a=-\sqrt{a^2}$ ですから. 与式 $=\sqrt{2a^2-1+2\sqrt{a^2(a^2-1)}}=\sqrt{a^2}+\sqrt{a^2-1}=\sqrt{a^2-1}-a$ | $\sqrt{a^2}=-a$ ($a<0$のとき)

[解] 与式 $=\sqrt{a^2-2a\sqrt{a^2-1}+a^2-1}=\sqrt{(a-\sqrt{a^2-1})^2}$ ($\because a^2\geqq 1$)

$=|a-\sqrt{a^2-1}|$

(i) $a>\sqrt{a^2-1}\geqq 0$ つまり $a^2\geqq 1$ より $a\geqq 1$ ならば $a-\sqrt{a^2-1}$

(ii) $a<\sqrt{a^2-1}$ つまり $a\leqq -1$ ならば $\sqrt{a^2-1}-a$

答	$\begin{cases} a\geqq 1 \text{ ならば } a-\sqrt{a^2-1} \\ a\leqq -1 \text{ ならば } \sqrt{a^2-1}-a \end{cases}$

[類1] $x>0$ で $\sqrt{x}=\frac{1-a}{2}$ の時 $y=\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a+2}$ の値を求めよ.

[解] $\sqrt{x}=\frac{1-a}{2}$ より $1-a>0$ $\therefore a<1$ のもとで $x=\frac{(1-a)^2}{4}$

与式 $=\sqrt{\frac{(1-a)^2}{4}+a}-\sqrt{\frac{(1-a)^2}{4}-a+2}=\frac{\sqrt{(a+1)^2}}{2}-\frac{\sqrt{(a-3)^2}}{2}=\frac{|a+1|}{2}-\frac{|a-3|}{2}$

$a<1$ より $a-3<0$

したがって $a<-1$ の時 与式 $=\frac{-a-1}{2}-\frac{3-a}{2}=-2$

$-1\leqq a<1$ の時 与式 $=\frac{a+1}{2}-\frac{3-a}{2}=a-1$

答	$a<-1$ ならば -2 $-1\leqq a<1$ ならば $a-1$

Let sleeping dogs lie. 眠っている犬は寝かしておけ. やぶをつついて蛇を出すな

lie : (vi) 横たわる lie－lay－lain－lying

lay : (vt) ～を横にする lay－laid－laid－laying

6、簡単にせよ。

(1) $\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2+2x}+\dfrac{x^2+4x+5}{2x^2+6x+4}-\dfrac{x^2+x-1}{x^2+2x}$

(2) $\dfrac{7-\frac{6}{x+1}}{x-7-\dfrac{x^2-4}{x+\frac{2}{x+3}}}$

[考] 分数式はとにかく分子の次数＜分母の次数 にします。計算練習をしておく事

$$
\begin{array}{r}
\frac{1}{2} \\
2x^2+2x\,\big)\,\overline{x^2+2x-1} \\
\underline{x^2+x} \\
x-1
\end{array}
$$

繁分数式

$$\frac{x-\frac{x}{x+\frac{1}{x}}}{x-\frac{x}{x-\frac{1}{x^2}}}=\frac{x-\frac{x\times x}{x(x+\frac{1}{x})}}{x-\frac{x^2\times x}{x^2(x-\frac{1}{x^2})}}=\frac{x-\frac{x^2}{x^2+1}}{x-\frac{x^3}{x^3-1}}$$

$$=\frac{(x-\frac{x^2}{x^2+1})(x^2+1)(x^3-1)}{(x-\frac{x^3}{x^3-1})(x^2+1)(x^3-1)}=\frac{\{x(x^2+1)-x^2\}(x^3-1)}{\{x(x^3-1)-x^3\}(x^2+1)}$$

$$=\frac{x(x^2-x+1)(x^3-1)}{x(x^3-x^2-1)(x^2+1)}=\underline{\frac{(x^2-x+1)(x^3-1)}{(x^3-x-1)(x^2+1)}}$$

[解]

(1) 与式 $=\frac{1}{2}+\frac{x-1}{2x(x+1)}+\frac{1}{2}+\frac{x+3}{2(x+1)(x+2)}-1+\frac{x+1}{x(x+2)}$

$=\frac{(x-1)(x+2)+(x+3)x+2(x+1)^2}{2x(x+1)(x+2)}=\cdots\cdots=\frac{4x^2+8x}{2x(x+1)(x+2)}=\underline{\frac{2}{x+1}}$

(2) 与式 $=\dfrac{7-\frac{6}{x+1}}{x-7-\frac{(x^2-4)(x+3)}{x^2+3x+2}}=\dfrac{7-\frac{6}{x+1}}{x-7-\frac{(x^2-4)(x+3)}{(x+1)(x+2)}}=\dfrac{7-\frac{6}{x+1}}{x-7-\frac{(x-2)(x+3)}{x+1}}$

$=\frac{7x+7-6}{x^2-6x-7-(x^2+x-6)}=\frac{7x+1}{-7x-1}=\underline{-1}$

When the cat is away, the mice will play. 鬼のいぬまに命の洗たく

mice : mouseの(pl.)

6、簡単にせよ。

(1) $\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2+2x}+\dfrac{x^2+4x+5}{2x^2+6x+4}-\dfrac{x^2+x-1}{x^2+2x}$

(2) $\dfrac{7-\dfrac{6}{x+1}}{x-7-\dfrac{x^2-4}{x+\dfrac{2}{x+3}}}$

[考] 分数式はとにかく分子の次数<分母の次数にします。計算練習をしておく事

$$\begin{array}{r} \tfrac{1}{2} \\ 2x^2+2x \overline{\big)\, x^2+2x-1} \\ \underline{x^2+x} \\ x-1 \end{array}$$

繁分数式

$$\frac{x-\dfrac{x}{x+\frac{1}{x}}}{x-\dfrac{x}{x-\frac{1}{x^2}}}=\frac{x-\dfrac{x\times x}{x(x+\frac{1}{x})}}{x-\dfrac{x^2\times x}{x^2(x-\frac{1}{x^2})}}=\frac{x-\dfrac{x^2}{x^2+1}}{x-\dfrac{x^3}{x^3-1}}$$

$$=\frac{(x-\frac{x^2}{x^2+1})(x^2+1)(x^3-1)}{(x-\frac{x^3}{x^3-1})(x^2+1)(x^3-1)}=\frac{\{x(x^2+1)-x^2\}(x^3-1)}{\{x(x^3-1)-x^3\}(x^2+1)}$$

$$=\frac{x(x^2-x+1)(x^3-1)}{x(x^3-x^2-1)(x^2+1)}=\underline{\frac{(x^2-x+1)(x^3-1)}{(x^3-x-1)(x^2+1)}}$$

[解]

(1) 与式 $=\dfrac{1}{2}+\dfrac{x-1}{2x(x+1)}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{x+3}{2(x+1)(x+2)}-1+\dfrac{x+1}{x(x+2)}$

$=\dfrac{(x-1)(x+2)+(x+3)x+2(x+1)^2}{2x(x+1)(x+2)}=\text{------}=\dfrac{4x^2+8x}{2x(x+1)(x+2)}=\underline{\dfrac{2}{x+1}}$

(2) 与式 $=\dfrac{7-\frac{6}{x+1}}{x-7-\frac{(x^2-4)(x+3)}{x^2+3x+2}}=\dfrac{7-\frac{6}{x+1}}{x-7-\frac{(x^2-4)(x+3)}{(x+1)(x+2)}}=\dfrac{7-\frac{6}{x+1}}{x-7-\frac{(x-2)(x+3)}{x+1}}$

$=\dfrac{7x+7-6}{x^2-6x-7-(x^2+x-6)}=\dfrac{7x+1}{-7x-1}=\underline{-1}$

When the cat is away, the mice will play. 鬼のいぬまに命の洗たく

mice : mouseの(pl.)

12. $x=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$, $y=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ の時 次の式の値を求めよ.
(1) x^2+y^2　(2) x^3+y^3　(3) x^5+y^5

[考] まず式は簡単に → 有理化. x, y の基本対称式で表わす。
x^5+y^5 は大変だ. そこで $x+y$, xy を求めて. x, y は2次方程式 $\bigcirc t^2+\bigcirc t+\bigcirc=0$ の解
したがって $\bigcirc x^2+\bigcirc x+\bigcirc=0$ ∴ $x^2=\triangle x+\triangle$ として $x^5=(x^2)^2x=(\triangle x+\triangle)^2x=\cdots\cdots$ と次数を下げて
最後に値代入.

[解]
$x=\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{5-3}=4-\sqrt{15}$　$y=\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{5-3}=4+\sqrt{15}$　∴ $x+y=8$, $xy=1$

したがって 解と係数の関係より x, y は $t^2-8t+1=0$ の解

$$\therefore x^2-8x+1=0$$
$$x^2=8x-1$$
$$x^3=x\cdot x^2=x(8x-1)=8(8x-1)-x=63x-8$$
$$x^5=x^2x^3=(8x-1)(63x-8)=504x^2-127x+8$$
$$=504(8x-1)-127x+8$$
$$=3905x-496$$

y^2, y^3, y^5 も同様

$x^2+y^2=8x-1+8y-1=8(x+y)-2=\underline{62}$
$x^3+y^3=63(x+y)-16=504-16=\underline{488}$
$x^5+y^5=3905(x+y)-992=3905\cdot 8-992=\underline{30248}$

[補] $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=64-2=62$
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=8^3-3\cdot 8=488$
$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)$
$=62\cdot 488-1^2\cdot 8=30248$

[類] $x=1-4i$ の時 $x^4-2x^3+x^2-1$ の値を求めよ. 注. $\sqrt{-1}=i$, $i^2=-1$ です.

[解] $(x-1)^2=(-4i)^2=-16$ ∴ $x^2-2x+17=0$
$$x^4-2x^3+x^2-1=(x^2-2x+17)(x^2-16)-32x+271$$
$$=-32(1-4i)+271$$
$$=\underline{239+128i}$$

[別解] $x^4-2x^3+x^2-1=(2x-17)^2-2x\cdot(2x-17)+(2x-17)-1$
$$=-32x+271$$
$$=\underline{239+128i}$$

18. $x^2+|x-1|+|x-3|=4$ を満たす x の実数値を求めよ.

［考1］絶対値｜｜をはずすには，中身で場合分け．この問題では $x-1$，と $x-3$ したがって0となるのは $x=1$，$x=3$ であるから $x\leqq 1$，$1<x<3$，$3\leqq x$ で場合分け．

［解1］

(i) $x\leqq 1$ の場合 $x-1\leqq 0$，$x-3<0$ であるから 与式は $x^2-(x-1)-(x-3)=4$

$x^2-2x=0$ $\therefore x=0$ or 2 $x\leqq 1$ より $x=0$

(ii) $1<x<3$ の場合 与式は $x^2+(x-1)-(x-3)=4$ $x^2-2=0$ $x=\pm\sqrt{2}$ $1<x<3$ より $x=\sqrt{2}$

(iii) $x\geqq 3$ の場合 $x^2+(x-1)+(x-3)=4$ $x^2+2x-8=0$ $(x+4)(x-2)=0$ $\therefore x=2$ or -4

$x\geqq 3$ であるからこの場合の解はない.

以上より $x=0$ or $\sqrt{2}$

［考2］$y=-x^2+4$ と $y=|x-1|+|x-3|$ のグラフの交点としてとらえる。目でみえるので確実。

$y=x^2$，$y=-|x-1|-|x-3|+4$ の交点でも良いが----

$y=|x-1|+|x-3|$ のグラフは $x=1$，$x=3$ で傾きを変える折れ線である。

したがって $y=(x-1)+(x-3)=2x-4$ $(x\geqq 3)$

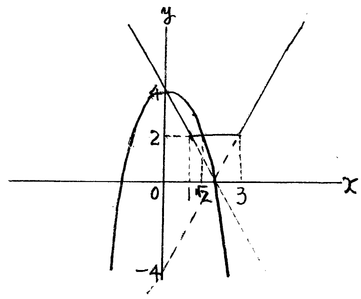
$y=(x-1)-(x-3)=2$ $(1<x<3)$

$y=-(x-1)-(x-3)=-2x+4$ $(x\leqq 1)$

［解2］

$y=|x-1|+|x-3|$ と $y=-x^2+4$ のグラフの交点が求めるものである。

$x=0$ or $\sqrt{2}$



［補］絶対値のついたグラフがすぐに書ける様練習する事.

You cannot eat your cake and have it.

ケーキを食べてしまって，それをまだ持っていることはできない．

両方よいことはできない．

[解2] $n(B\cup C)=n(B)+n(C)-n(B\cap C)$

$n(C\cup A)=n(C)+n(A)-n(C\cap A)$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$$\begin{aligned}n(A\cup B\cup C)&=n(A\cup B)+n(C)-n\{(A\cup B)\cap C\}\\&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)+n(C)-n\{(A\cap C)\cup(B\cap C)\}\\&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)+n(C)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n\{(A\cap C)\cap(B\cap C)\}\\&=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

したがって

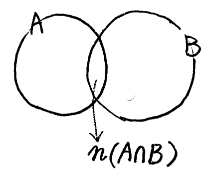
与式の左辺 $=2\{n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)\}$

$=$ 与式の右辺

[類1] 100人の生徒の中で、音楽の愛好者が53人、スポーツの愛好者が72人いる。音楽とスポーツを両方とも愛好する生徒数のとりえる範囲を求めよ。

(考) 全体集合をU, 音楽愛好者A, スポーツ愛好者B, とするとどんな事が言えるか。

$n(A\cup B)\leqq n(U)$, $n(A\cap B)\leqq n(A), n(B)$



(解) (考)より　$n(A\cap B)\leqq n(A)=53$, $n(A\cap B)\leqq n(B)=72$

$\therefore n(A\cap B)\leqq 53$

一方　$100=n(U)\geqq n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=125-n(A\cap B)$

$\therefore n(A\cap B)\geqq 25$

(補) 次頁の [類4] と同じようにもできます。

答	25人以上53人以下

Throw not your pearls before swine. 豚に真珠、猫に小判。
(Cast)

cast：～を投げる、～に目を向ける　　swine：豚(=pig, hog) (pl)swine

Nothing venture, nothing have. 虎穴に入らずんば虎児を得ず

venture：思い切って進む　　venture to do：あえて～する

Make hay while the sun shines. 日の照るうちに草を干せ、好機を逸するな

make hay：干し草を作る

[類2] 整数を要素とする2つの集合 $A=\{2,6,5a-a^2\}$ $B=\{3,4,3a-1,a+b\}$ がある。4が $A\cap B$ に属するとき $a=\square$ or $\square$ である。さらに $A\cap B=\{4,6\}$ であるとき $b=\square$ であり、$A\cup B=\{2,3,4,6,\square\}$ である。

(解) $4\in A\cap B$ であるから $5a-a^2=4$ $a^2-5a+4=(a-4)(a-1)=0$ $\underline{a=1 \text{ or } 4}$

(i) $a=1$ のとき $A=\{2,6,4\}$, $B=\{3,4,2,1+b\}$ であり $2\in A\cap B$ となり $A\cap B=\{4,6\}$ に反する $\therefore a\neq 1$

(ii) $a=4$ のとき $A=\{2,6,4\}$, $B=\{3,4,11,4+b\}$ であり $4+b=6$ $\therefore \underline{b=2}$ ならば $A\cap B=\{4,6\}$ となりOK

$A\cup B=\{2,3,4,6,\underline{11}\}$

[類3] Uを全体集合、A,B,Cをその部分集合、$\bar{A},\bar{B},\bar{C}$をそれらのUに関する補集合とする。次の命題が真になるように、$A,B,C,\bar{A},\bar{B},\bar{C}$のうちのひとつを選んで空欄に入れよ。(P.865の①に詳しくしてあります。)

(1) $(A\cap B)\subset(A\cap C) \Leftrightarrow \bar{C}\subset(\boxed{ア}\cup\boxed{イ})$ (2) $(A\cup B)\subset(A\cap C) \Leftrightarrow \boxed{ウ}\subset\bar{A}$ かつ $\boxed{エ}\subset\bar{B}$

(考) $A\subset B \Leftrightarrow \bar{A}\supset\bar{B}$, $Z\supset(X\cup Y) \Leftrightarrow Z\supset X$ かつ $Z\supset Y$, $(X\cap Y)\subset X$ は常に成立, $(X\cup Y)\supset X$ は常に成立。

$(X\cap Y)\supset X$ が成立するのは $X\subset Y$ のとき。$(X\cup Y)\subset X$ が成立するのは $X\subset X$ かつ $Y\subset X$ のときすなわち $X\supset Y$ のとき

(解)(1) $(A\cap B)\subset(A\cap C) \Leftrightarrow \overline{(A\cap B)}\supset\overline{(A\cap C)} \Leftrightarrow (\bar{A}\cup\bar{B})\supset(\bar{A}\cup\bar{C}) \Leftrightarrow (\bar{A}\cup\bar{B})\supset\bar{A}$ かつ $(\bar{A}\cup\bar{B})\supset\bar{C}$ $\underline{(ア)\bar{A}, (イ)\bar{B}}$

($\because (\bar{A}\cup\bar{B})\supset\bar{A}$ は成立。)

(2) $(A\cup B)\subset(A\cap C) \Leftrightarrow A\subset(A\cap C)$※ かつ $B\subset(A\cap C)$※ $\Leftrightarrow \bar{A}\supset\overline{(A\cap C)}$ かつ $\bar{B}\supset\overline{(A\cap C)} \Leftrightarrow \bar{A}\supset(\bar{A}\cup\bar{C})$ かつ $\bar{B}\supset(\bar{A}\cup\bar{C})$

$\Leftrightarrow \bar{A}\supset\bar{A}$ かつ $\bar{A}\supset\bar{C}$ かつ $\bar{B}\supset\bar{A}$ かつ $\bar{B}\supset\bar{C} \Leftrightarrow \bar{C}\subset\bar{A}$ かつ $\bar{A}\subset\bar{B}$ $\underline{(ウ)\bar{C}\ \ (エ)\bar{A}}$ ($\bar{A}\supset\bar{A}$ は $\bar{A}\geqq\bar{A}$ と同じで常に成立)

(補)(2) $(A\cup B)\subset(A\cap C) \Leftrightarrow \overline{(A\cup B)}\supset\overline{(A\cap C)} \Leftrightarrow (\bar{A}\cap\bar{B})\supset(\bar{A}\cup\bar{C}) \Leftrightarrow \underbrace{(\bar{A}\cap\bar{B})\supset\bar{A}}_{①}$ かつ $\underbrace{(\bar{A}\cap\bar{B})\supset\bar{C}}_{②}$

① $(\bar{A}\cap\bar{B})\supset\bar{A} \Leftrightarrow \overline{(\bar{A}\cap\bar{B})}\subset\bar{\bar{A}} \Leftrightarrow (\bar{\bar{A}}\cup\bar{\bar{B}})\subset\bar{\bar{A}} \Leftrightarrow (A\cup B)\subset A \Leftrightarrow A\subset A$ かつ $B\subset A$

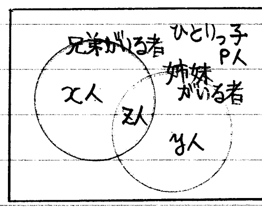
② $(\bar{A}\cap\bar{B})\supset\bar{C} \Leftrightarrow \overline{(\bar{A}\cap\bar{B})}\subset\bar{\bar{C}} \Leftrightarrow (A\cup B)\subset C \Leftrightarrow A\subset C$ かつ $B\subset C$

①,②より $C\supset A$ かつ $A\supset B$ ですから $\bar{C}\subset\bar{A}$ かつ $\bar{A}\subset\bar{B}$

尤も※が成立するのは、$A\subset C$ かつ ($B\subset A$ かつ $B\subset C$) ですから $C\supset A$ かつ $A\supset B$ $\therefore \bar{C}\subset\bar{A}$ かつ $\bar{A}\subset\bar{B}$ です。

P.865, P.1145参照。

[類4] ある100人の生徒の兄弟姉妹の構成について調べたところ、兄弟のいる者は66人、姉妹のいる者は54人であった。このとき、ひとりっ子は□□人以下で、兄弟と姉妹の両方がいる者は□□人以上いる。
また、兄弟だけいる者は少なくとも□□人、多くて□□人であり、姉妹だけいる者は多くて、□□人である。



(考) Venn図をかいて、0以上を用いるとOK.

(解) 右図のようにVenn図をかく。 $x+y+z+P=100$ ----① $x+z=66$ ----②

$y+z=54$ ----③ $x\geqq 0, y\geqq 0, z\geqq 0, P\geqq 0$ ----④

②より $x=66-z\geqq 0$, ③より $y=54-z\geqq 0$, ①に代入 $(66-z)+(54-z)+z+P=100$ $P=z-20\geqq 0$

$\therefore z\leqq 66, z\leqq 54, z\geqq 20, z\geqq 0$ $\therefore 20\leqq z\leqq 54$ $z=66-x, z=54-y, z=P+20$ を代入すると

$20\leqq 66-x\leqq 54$ $\therefore 12\leqq x\leqq 46$ $20\leqq 54-y\leqq 54$ $\therefore 0\leqq y\leqq 34$. $20\leqq P+20\leqq 54$ $\therefore 0\leqq P\leqq 34$.

よって解は順に、$\underline{34, 20, 12, 46, 34}$

[類5] 男女40人ずつが英語と数学のテストを受けた. (a) 英語のテストで80点以上をとった者は、男女あわせて12人いた. (b) 女子で英語が80点以上であった者と男子で数学が80以上であった者は,いずれも7人であった. (c) 男子で英語が80点以上であった者の数と女子で数学が80点以上であった者の数は,等しかった. (d) 英語・数学ともに80点以上あった者は,女子にも男子にもいて,男女あわせて4人いた. (e) 英語・数学のいずれかで80点以上とった者の数は,女子の方が多かった.

(1) 女子で数学が80点以上であった者の数は□人である.

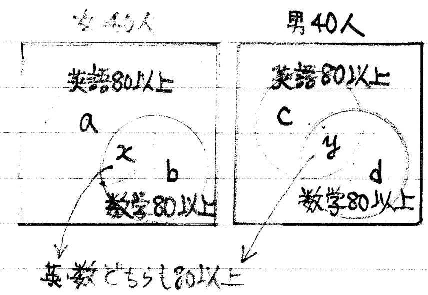
(2) 数学のテストで80点以上をとった者の数は男女あわせて□人である.

(3) 男子で英語,数学ともに80点以上であった者の数は□人である.

(4) 女子で,英語・数学のいずれかが80点以上であった者の数は□人である.

(考) 男40人, 女40人のそれぞれについてVenn図をかきます. (d)の範囲(1以上)に注意

(解) 右図のようにVenn図をかく.



(a)より $a+x+c+y=12$ ----①

(b)より $a+x=d+y=7$ ----②

(c)より $c+y=b+x$ ----③

(d)より $x+y=4,\ x\geqq 1,\ y\geqq 1$, ----④

(e)より $a+x+b>c+y+d$ ----⑤′, ②とから $7+b>c+7$ $\therefore b>c$ ----⑤

a, b, c, d は0以上

(1) $b+x$ を求めればよい. ①,②より $7+c+y=12$ $c+y=5$ ③より $c+y=b+x=\underline{5}$ ----⑥

(2) $b+x+d+y$ を求めればよい. ⑥,②より $b+x+d+y=5+7=\underline{12}$

(3) y を求めればよい, ④より $(x,y)=(1,3)(2,2)(3,1)$ のいずれかである.

(ア) $(x,y)=(1,3)$ のとき ②より $a=6,\ d=4$, ①より $c=12-a-x-y=12-6-1-3=2$, ③より $2+3=b+1$ $b=4$ 全て⑤をみたすので OK

(イ) $(x,y)=(2,2)$ のとき ②より $a=5,\ d=5$ ①より $c=12-5-2-2=3$ ③より $3+2=b+2$ $\therefore b=3$ これは⑤をみたさない.

(ウ) $(x,y)=(3,1)$ のとき ②より $a=4,\ d=6$ ①より $c=12-4-3-1=4$ ③より $4+1=b+3$ $b=2$ これは⑤をみたさない.

よって求める $y=\underline{3}$

(4) (3)の(ア)より求めるものは $a+x+b=6+1+4=\underline{11}$

(補) ①,②,③より a, b, c, d を x, y で表すと $a=7-x,\ d=7-y,\ c=5-y,\ b=c+y-x=5-x$. これを⑤′に入れると $x<y$ となり, ④とから $(x,y)=(1,3)$ となります. $a=6,\ d=4,\ c=2,\ b=4$ ですから (1)は $b+x=4+1=5$, (2)は $b+x+d+y=4+1+4+3=12$, (3)は $y=3$ (4)は $a+x+b=6+1+4=11$ となります.

94. 次の命題の逆,裏,対偶を述べ,その真偽を言え.

(1) $a=b$ ならば $a^2=b^2$ である。

(2) $a>0,\ b>0$ ならば $ab>0$ である.

(3) $x<2$ or $3<x$ ならば $x^2-5x+6>0$ である.

(4) $x\geqq 1,\ y\geqq 1$ ならば $x+y\geqq 2$ である。

(5) $|x|+|y|>1$ ならば $|x|>1$ or $|y|>1$ である.

[考] 命題 $p\to q$ に対して

逆 $q\to p$　裏 $\overline{p}\to\overline{q}$　対偶 $\overline{q}\to\overline{p}$

ある命題の対偶は,もとの命題と同値である.したがって与えられら命題が真ならば その対偶も真です。

[解] (1) 逆 $a^2=b^2$ ならば $a=b$ (偽) 反例 $a=1,\ b=-1$

裏 $a\neq b$ ならば $a^2\neq b^2$ (偽) 反例 $a=1,\ b=-1$

対偶 $a^2\neq b^2$ ならば $a\neq b$ (真)

(2) 逆 $ab>0$ ならば $a>0,\ b>0$ (偽) 反例 $a=-1,\ b=-1$

裏 $a\leqq 0$ or $b\leqq 0$ ならば $ab\leqq 0$ (偽) 反例 $a=-1,\ b=-1$

対偶 $ab\leqq 0$ ならば $a\leqq 0$ or $b\leqq 0$ (真)

(3) 逆 $x^2-5x+6>0$ ならば $x<2$ or $3<x$ (真)

裏 $2\leqq x\leqq 3$ ならば $x^2-5x+6\leqq 0$ (真)

対偶 $x^2-5x+6\leqq 0$ ならば $2\leqq x\leqq 3$ (真)

(4) 逆 $x+y\geqq 2$ ならば $x\geqq 1$ and $y\geqq 1$ (偽) 反例 $x=5,\ y=-2$

裏 $x<1$ or $y<1$ ならば $x+y<2$ (偽) 反例 $x=0,\ y=5$ ($x<1$ and $y<1$ とは違います)

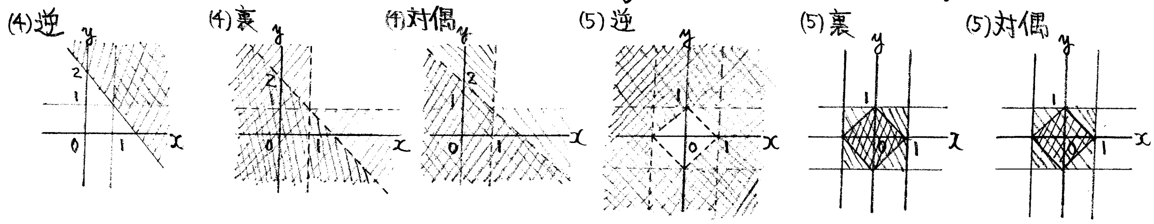
対偶 $x+y<2$ ならば $x<1$ or $y<1$ (真)

(5) 逆 $|x|>1$ or $|y|>1$ ならば $|x|+|y|>1$ (真)

裏 $|x|+|y|\leqq 1$ ならば $|x|\leqq 1$ and $|y|\leqq 1$ (真)

対偶 $|x|\leqq 1$ and $|y|\leqq 1$ ならば $|x|+|y|\leqq 1$ (偽) (もとの命題も偽です) 反例 $x=1,\ y=1$

[補] (4),(5) などは領域を図示すればわかります. $p\to q$ という事は pの領域$\subseteqq q$の領域 です.



$x\geqq 1,\ y\geqq 1$ は $x\geqq 1$ and $y\geqq 1$ を表わします。これの否定は and を or に変えて $x<1$ or $y<1$

P.694の問題を否定命題を考えて解いてください

命題、条件、条件の否定、否定命題

97.「整数nが6の倍数であり、かつ8の倍数であれば、nは48の倍数である。」の否定命題を述べその否定命題の真偽を判定せよ。(この問いの[考].[解]は次頁下)

[考] 命題：真偽の判定ができる文章や数式

例「$\sqrt{2}$は有理数である」は偽の命題です。

条件：変数を含む文章や数式で、その変数に具体的数値を入れると命題となる。

例「xは有理数である」は条件であり、例えば、xに$\frac{1}{2}$を入れて「$\frac{1}{2}$は有理数である」とすれば、真の命題となります。

条件の否定 「pかつq」の否定は「pでないまたはqでない」 $\overline{p\cap q}=\overline{p}\cup\overline{q}$

「pまたはq」の否定は「pでないかつqでない」 $\overline{p\cup q}=\overline{p}\cap\overline{q}$

例・「$x\leqq-2$ または $3<x$」の否定は「$-2<x\leqq3$」

・「$x=-2,3$」の否定は「$x\neq-2$かつ$x\neq3$」(「$x=-2,3$」は「$x=-2$ または $x=3$」を表します)

・「全ての(任意の)実数x」の否定は「ある(適当な)実数x」

全ての，任意の，どの，どんな，いつでも $\longrightarrow$ ある に変える。

ある，適当な，少なくとも1つの，存在し，$\longrightarrow$ 全ての に変える。

$\left\{\begin{array}{l} x=0 \text{ かつ } y=0 \\ x=0 \text{ かつ } y\neq0 \\ x\neq0 \text{ かつ } y=0 \end{array}\right\}$ $x=0$ または $y=0$ (x,yの少なくとも1つは0である)

・$x\neq0$ かつ $y\neq0$

次の条件を否定せよ。(1) $a=b=c=0$ (2) x,yの少なくとも1つは0である。

(解) (1) $a=0$ かつ $b=0$ かつ $c=0$ の否定だから $a\neq0$ または $b\neq0$ または $c\neq0$ (a,b,cのうち少なくとも1つは0でない)

(2) $x=0$ または $y=0$ の否定だから $x\neq0$ かつ $y\neq0$ (x,yどちらも0でない)

否定命題：もとの命題が真ならば、その否定命題は偽。否定命題が真ならばもとの命題は偽です。

◎「全て，ある」などが入っている命題の否定命題

(1)「全ての4角形の内角の和は360°である。」(真)の否定は「ある4角形の内角の和は360°でない」(偽)

(2)「全実数xで$x^2>1$である」(偽)の否定は「ある実数xで$x^2\leqq1$である。」(真)

(「$x^2\leqq1$をみたす(ある)実数が存在する」(真) でもOKです)

(3)「$x^2\leqq0$となるような実数xが存在する。」(真)の命題は、「$x^2\leqq0$となるようなある実数xが存在する」(真)すなわち「ある実数xで$x^2\leqq0$である」(真)と同じであり、その否定は「全ての実数xで$x^2>0$である」(偽)

(4)「全ての素数は奇数である」(偽)の否定は「ある素数は偶数である。」(真) (2は偶数かつ素数です。)

(5)「ある自然数m,nについて$3m+5n=15$である」(偽)の否定は「全ての自然数m,nについて$3m+5n\neq15$である」(真) ($\because 3m=15-5n=5(3-n)\geqq3$ $\therefore n\leqq\frac{12}{5}$ あるとすれば$n=1$ or 2ですが$n=1$のときも$n=2$のときもmは自然数とならないので、もとの命題は偽です。

(6)「全ての2つの無理数について、その積は無理数である。」(偽)の否定は「ある2つの無理数について、その積は有理数である」(真) ($\because$もとの命題について、2つの無理数$\sqrt{2}$と$\sqrt{2}$を考えると、その積$\sqrt{2}\sqrt{2}$は有理数2であり、全ての2つの無理数について、その積が常に無理数になるとは限りません。)

◎「ならば」が は入っている命題の否定命題：「Pならば q である」の否定命題は「Pであって かつ q でない場合がある。」

(1)「x が実数のとき $x^3=27$ ならば $x=3$ である」(真) の否定は「x が実数のとき $x^3=27$ であって かつ $x \neq 3$ 場合がある。」(偽)

(2)「x, y, z が実数のとき $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$ ならば $x=y=z=0$ である。」(偽) の否定は、「x, y, z が実数のとき $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$ であり、かつ $x \neq 0$ または $y \neq 0$ または $z \neq 0$ 場合がある。」(真) ($\because$ もとの命題は $x=y=z=1$ でも成立し、$x=y=z=0$ だけではありません。)

(3)「n が整数のとき n^2 が偶数ならば n は偶数である。」(真) の否定は「n が整数のとき n^2 が偶数であり、かつ n が奇数の場合がある。」(偽)

(演習) 次の否定命題を述べて、真偽を調べよ。

(1) 全ての実数 x, y に対して、$x-y \neq 3$ または $x+2y \neq 6$ である。

(解) ある実数 x, y に対して $x-y=3$ かつ $x+2y=6$ である。(真) ----したがってもとの命題は偽

(2) x, y が実数のとき、$x^2+y^2<1$ ならば $|x|<1$ かつ $|y|<1$ である。

(解) x, y が実数のとき $x^2+y^2<1$ であり、かつ $|x| \geqq 1$ または $|y| \geqq 1$ をみたす x, y がある。(偽)
もとの命題は ~~真~~ ですから真 したがって否定命題は偽です。

(3) x が実数であるとき、x^2+x が有理数ならば x は有理数である。

(解) x が実数であるとき、x^2+x が有理数であって、かつ x が無理数の場合がある。(真)
$x^2+x=1$ $x^2+x-1=0$ $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ つまり「x^2+x が有理数であるからといって、x が有理数である。」とは、言えません。すなわち与命題は偽であり、否定命題は真です。

(4) $a \leqq 1$ ならば、$x^2-2x+a=0$ をみたす実数 x がある。

$x^2-2x+a=0$ の判別式 $\frac{D}{4}=1-a \geqq 0$ ($\because$ 条件 $a \leqq 1$ より) ですから与えられた命題は真です。

(解) 与命題は「$a \leqq 1$ ならば、ある実数 x が $x^2-2x+a=0$ をみたす。」
否定すると「$a \leqq 1$ であり、全ての実数 x で $x^2-2x+a \neq 0$ をみたす a の値がある」(偽)
(「$a \leqq 1$ をみたすある実数 a のとき、全ての実数 x で $x^2-2x+a \neq 0$ である。」(偽) もOK.)

[本題97.(P115の①)] の[考] 命題を詳しくしてみると、「整数 n が6の倍数であり、かつ8の倍数ならば、そのような全ての整数 n は48の倍数である。」です。命題「Pならば q である」の否定命題は「Pであって かつ q でない場合がある。」を考えましょう。すると、求める否定命題は、「整数 n が6の倍数であり、かつ8の倍数であって、かつ、そのような整数 n のうち、ある整数 n は48の倍数でない場合がある。」という面倒な文章になります。

[本題の解] 6の倍数であり、かつ8の倍数をみたす整数で48の倍数でないものがある。(真)
($\because$ 24は6の倍数かつ8の倍数であるが48の倍数でない)

[補] 次のようにかいてもOKです。「6の倍数であり、かつ8の倍数であるようなある整数は48の倍数でない」(真)

98.・実数x,y,zについて$x(x-2)=y(y-2)=z(z-2)=0$であるためには$xyz(x-2)(y-2)(z-2)=0$であることは$\boxed{ア}$条件である。
・実数xについて$x^2-2x-8\leqq 0$であるためには$|x-3|+|x+1|\leqq 6$であることは$\boxed{イ}$条件である。
・a,xが実数の時「$x>a$ならば$x^2>a^2$が成立する」ためにはaには条件$\boxed{ウ}$がなければならない。

[考] (ア)反例をさがす　(イ)解いてみる　(ウ)たて軸x，横軸aで領域を図示。
Pであるためには Qであることは---- ≡QはPの----

[解] (ア) $x(x-2)=y(y-2)=z(z-2)=0$ を解けば

$(x,y,z)=(0,0,0)(0,0,2)(0,2,0)(2,0,0)(2,2,0)(2,2,2)(2,0,2)(0,2,2)$ ……①

①ならば$xyz(x-2)(y-2)(z-2)=0$は成立。

$x=0$，$y=3$ならば$xyz(x-2)(y-2)(z-2)=0$は成立。$x(x-2)\neq y(y-2)$。

(イ) $x^2-2x-8\leqq 0$　$(x-4)(x+2)\leqq 0$　$\therefore -2\leqq x\leqq 4$

$|x-3|+|x+1|\leqq 6$

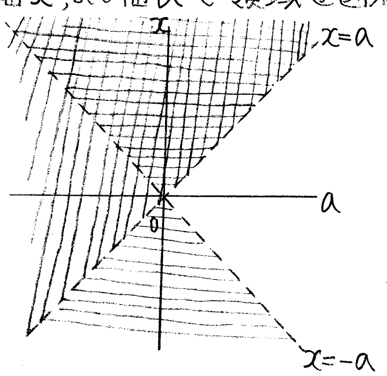
(i) $x\geqq 3$の場合　$x-3+x+1\leqq 6$　$2x\leqq 8$　$x\leqq 4$　　$\therefore 3\leqq x\leqq 4$

(ii) $-1\leqq x\leqq 3$の場合　$-x+3+x+1\leqq 6$　成立　　$\therefore -1\leqq x\leqq 3$

(iii) $x\leqq -1$の場合　$-x+3-x-1\leqq 6$　$x\geqq -2$　　$\therefore -2\leqq x\leqq -1$

(i)(ii)(iii)の和集合が解であるから$-2\leqq x\leqq 4$

(ウ) たて軸x，よこ軸aで領域を図示すると次の通り



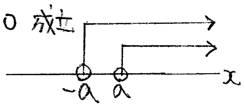
$a\geqq 0$ならば成立。

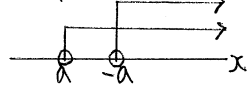
答	ア.必要　イ.必要十分　ウ.$a\geqq 0$

$x>a$ より $(x+a)(x-a)>0$ が成立するためには $x+a>0$

したがって $x>a$ ならば $x+a>0$ が成り立つaの条件は $a\geqq 0$

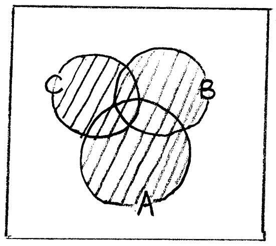
(i) $a>0$ 成立　　(ii) $a=0$ 成立　　(iii) $a<0$ 不成立





4. 1から100までの整数で、30と互いに素である数は何個あるか

(考) $30=2\times3\times5$ ですから30と互いに素である数とは、2でも3でも5でも割り切れない数の事です。右図斜線部は、2 or 3 or 5で割り切れる数ですが、求める個数は100からこの個数を引けばよいことがわかるでしょう。



A：2の倍数
B：3の倍数
C：5の倍数

(解) 2の倍数，3の倍数，5の倍数をそれぞれA,B,Cで表わすと 2の倍数の個数 $n(A)=50$，
$n(B)=33$，$n(C)=20$
2かつ3の倍数つまり6の倍数の個数 $n(A\cap B)=16$
$n(B\cap C)=6$，$n(C\cap A)=10$，
$n(A\cap B\cap C)=3$
よって 2または3または5の倍数の個数 $n(A\cup B\cup C)$ は

$$\begin{aligned} n(A\cup B\cup C) &= n(A\cup B)+n(C)-n\{(A\cup B)\cap C\} \\ &= n(A)+n(B)-n(A\cap B)+n(C)-n\{(A\cap C)\cup(B\cap C)\} \\ &= n(A)+n(B)-n(A\cap B)+n(C)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C) \\ &= 50+33-16+20-10-6+3 \\ &= 74 \end{aligned}$$

答 26個

$30=2\times3\times5$ であるから求める個数は $100-n(A\cup B\cup C)=100-74=26$

(補) $n(X\cup Y)=n(X)+n(Y)-n(X\cap Y)$，$n\{(X\cap Y)\cap(X\cap Z)\}=n(X\cap Y\cap Z)$
$(X\cup Z)\cap Y=(X\cap Y)\cup(Z\cap Y)$ などを利用しましたが、何もこのように書かなくてもVenn図を使って考えればよろしい。original black のP.110参照です。

5. 675の正の約数は全部で何個あるか。また約数の総和はいくらか

(考) $675=3^3\times5^2$ ですから約数は $3^0\times5^0$, $3^1\times5^0$, $3^2\times5^0$, $3^3\times5^0$, $3^0\times5^1$, $3^0\times5^2$, ……
と考えるとわかるでしょう

(解) $675=3^3\times5^2$ であるから、675の約数は $3^x\times5^y$ ($x=0,1,2,3$，$y=0,1,2$)
の形で表わせる。よって求める個数は、$4\times3=12$
$(3^0+3^1+3^2+3^3)(5^0+5^1+5^2)=(1+3+9+27)(1+5+25)=40\cdot31=1240$

答 12個, 1240

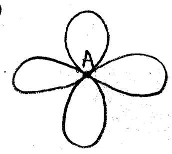
それどころか、私は大変怠惰です

(　　)(　　)(　　) I am very idle.

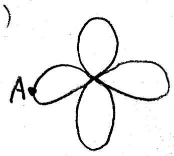
答 On the contrary

6. Aを出発点とする一筆書きの方法は何通りか

(1)



(2)



(考) (1) 4 loopあるわけですが、ある1つのloopをとると、Aにもどってきて次に、もう1つのloopを次にもう1つのloopを次にもう1つのloopをと、書けばよいわけです。
すなわちloopのとり方は4!通り、そのおのおのについて、右回り、左回りの2通り

(2) まず、右にとるか左にとるかして中央に出るのに2通り、残り3つのloopについて(1)の利用

(解) (1) $4!\times 2^4 = \underline{384}$　(2) $3!\times 2^3 \times 2 = \underline{96}$

答	(1) 384 (2) 96

7. 立方体に1から6までの番号を打つ方法の数を求めよ

(考) 立方体の対称性を考えます。ある1つの面にたとえば1と決めると、その対称な面は2～6の5通り、この面を決めてしまうと、残り4つの面は円順列です。

(解) $5\times(4-1)! = 5\times 3! = 30$

答	30通り

8. 両親は隣り合うことにし、子供4人と輪になる方法の数を求めよ

(考) 両親をひとまとめにして、子供4人と円順列です。両親の右、左を考えて----

(解) $(5-1)!\times 2 = 48$

答	48通り

(補) 詳しくは、P.183

9. 1枚の紙に1から1000までの全ての整数が印刷されている。この紙には0は何個あるか。

(考) 3桁の整数は $a\times 10^2 + b\times 10^1 + c\times 10^0$ $(a=1,2,\cdots,9,\ b=0,1,2,\cdots,9,\ c=0,1,2,\cdots,9)$ で表わせます。$c=0$ の場合は aが9通り、bが10通りで $9\times 10 = 90$ 個の整数が、1の位に0をもつということです。$b=0$ の場合は aが9通り、cが10通りで $9\times 10 = 90$ 個の整数が10の位に0をもつということです。

(解) 2桁の整数には、9個の0がある。
3桁の整数には $9\times 10 + 9\times 10 = 180$ 個の0がある
1000には3個
よって $9+180+3=192$

答	192個

今すぐに帰ります。　I'll be back (　　)(　　).　答 right now

[類1] TOMATOの6文字の順列を考える.

(1)全ての順列は,何通りあるか (2) TOという並びを2個もつ順列は何通りあるか

(3) TOという並びをちょうど1個もつ順列は何通りあるか (4) TOの並びは,全くない順列は何通りあるか

(考) (3),(4)が問題ですが‥‥ (1)=(2)+(3)+(4) ですから,(3) or (4)を求めればOKです.(4)から先にする方がわかりやすいかも‥‥

(解) (1) $\frac{6!}{2!\cdot 2!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{2}=\underline{180}$(通り)

(2) TOをXとしてXMAX 4個の順列を考え $\frac{4!}{2!}=\underline{12}$(通り)

(3) XMA 3個の順列は $3!=6$ 通り、例えば $^{\vee}\mathrm{TO}^{\vee}\mathrm{M}^{\vee}\mathrm{A}^{\vee}$ のとき,(i)4つのVから,2つをとって,T,O (or O,T)といれるのは,${}_4C_2\times2=\frac{4\cdot3}{2}\cdot2=12$ 通り or (ii)4つのVから1つとってOTといれる.${}_4C_1=4$ 通り

したがって,求めるものは $6(12+4)=\underline{96}$(通り)

(4) (1)=(2)+(3)+(4) より (4)$=180-12-96=\underline{72}$(通り)

(別解) (4) $^{\vee}\mathrm{TM}^{\vee}\mathrm{A}^{\vee}\mathrm{T}$ を先に並べておいて,3つのVから重複を許して2つとり,O,Oを入れる.

$\frac{4!}{2!}\times{}_3H_2=12\times{}_4C_2=12\times\frac{4\cdot3}{2}=\underline{72}$(通り) ($\mathrm{O}^{\vee}\mathrm{M}^{\vee}\mathrm{A\,O}^{\vee}$ としても,同じようにできます.)

(3) (3)=(1)−(2)−(4)$=180-12-72=\underline{96}$(通り)

(補) ${}_nH_r$ については,P.7の(1)参照.

[類2] 赤玉が10個、白玉が90個の合計100個の玉がある.これをA,B,C,Dの4個の箱に10個ずつ入れる.

同じ色の玉は区別しないものとして,玉の入れ方は何通りあるかを求めよ.

(考) A,B,C,Dに赤玉をそれぞれ a,b,c,d 個入れるとすれば,白玉の個数は決まってしまいます. $a+b+c+d=0$

$a+b+c+d=1$, ---, $a+b+c+d=10$ のそれぞれの負でない整数解 (a,b,c,d) の組の個数の和※が求めるもの.

すなわち $a+b+c+d\leqq10$ をみたす負でない整数解 (a,b,c,d) の組の個数です. P.7の(1),(2)を参照です.

(解) (考)より続けて,$10-a-b-c-d=e\,(\geqq0)$ とおけば,$a+b+c+d+e=10$ の負でない整数解 (a,b,c,d,e) の組の個数と一致する.よって,求める入れ方は ${}_5H_{10}={}_{14}C_{10}=\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11}{4\cdot3\cdot2}=7\cdot13\cdot11=\underline{1001}$(通り)

(補)※ ${}_4H_0+{}_4H_1+\cdots+{}_4H_{10}={}_3C_0+{}_4H_1+{}_5C_2+\cdots+{}_{13}C_{10}={}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_{13}C_3$ を求めるということです.

P.7の(2)の⑤です.

$$\sum_{k=3}^{n}{}_kC_3=\sum_{k=3}^{n}\frac{k(k-1)(k-2)}{6}=\frac{1}{6}\{1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+(n-2)(n-1)n\}=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-2}k(k+1)(k+2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(n-2)(n-1)n(n+1)$$

$n=13$ とすれば $\sum_{k=3}^{13}{}_kC_3=\frac{1}{24}\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14=11\cdot13\cdot7=\underline{1001}$(通り)です.

15. nを正の整数とする.次の4つの不等式をみたす整数x,y,zの組(x,y,z)の総数$f(n)$を求めよ.
$x+y+z\leqq n,\ -x+y-z\leqq n,\ x-y-z\leqq n,\ -x-y+z\leqq n$

[考] 重複組合せ${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$について
「n種のものから重複を許してr個とる組合せ」のことです.

例① 数字1,2,3,4を記入したカードがそれぞれ6枚ずつある.この24枚のカードから6枚を取り出すとき,異なる取り出し方は何通りあるか.

(説明) 例えば1,2,3,3,4,4 と 1,1,1,3,3,4 を取り出した場合のことを考えてみます.
1|2|33|44 , 111||33|4 のように仕切りを入れると,数字をかかなくても
0|0|00|00 , 000||00|0 と表せば,どのカードを何枚ずつ使うかわかります.
よって6個の0と3個の仕切りを一列に並べる並べ方だけあることになり $\frac{9!}{6!3!}={}_9C_3={}_9C_6$
となります.(|00|0000| は 2,2,3,3,3,3 を表します.)
異なる4つの数字1,2,3,4,から重複を許して6個とる組合せ ${}_4H_6={}_{4+6-1}C_6={}_9C_6$
であることがわかりました.
さて,この例題は1をx枚,2をy枚,3をz枚,4をu枚使うとすると $x+y+z+u=6$
$x\geqq0,\ y\geqq0,\ z\geqq0,\ u\geqq0$ の整数解(x,y,z,u)の個数を求めることと同じであることがわかります.重複組合せは,全て,このように負でない整数解の個数として,捉えることができて,私は暗記して使うことにしています.

(解) 1をx枚,2をy枚,3をz枚,4をu枚使うとすると,求める取り出し方は,
$x+y+z+u=6$ をみたす負でない整数解(x,y,z,u)の個数と一致する.
よって ${}_4H_6={}_{4+6-1}C_6={}_9C_6=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2}=\underline{84}$(通り)

例② $1\leqq x\leqq y\leqq z\leqq5$ をみたす整数の組(x,y,z)の個数を求めよ. (解) 1,2,3,4,5から3つとる重複組合せ ${}_5H_3={}_7C_3=\underline{35}$

① $p\geqq0,\ q\geqq0,\ r\geqq0,\ p+q+r=8$ をみたす整数解(p,q,r)の個数を求めよ.
(解) ${}_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8=\frac{10\cdot9}{2}=\underline{45}$(個) [類] P.156の本題180をやって下さい.

② $p\geqq1,\ q\geqq2,\ r\geqq3,\ p+q+r=8$ をみたす整数解(p,q,r)の個数を求めよ.
(解) $p-1=a,\ q-2=b,\ r-3=c$ とおくと $a\geqq0,\ b\geqq0,\ c\geqq0,\ a+b+c=2$ をみたす整数解(a,b,c)の個数と一致する.よって ${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=\underline{6}$(個)

③ $p_1\geqq0,\ p_2\geqq0,\ \cdots,\ p_m\geqq0,\ \sum_{k=1}^{n}p_k=n$ をみたす整数解$(p_1,p_2,\cdots,p_m)$の個数を求めよ.
(解) ${}_nH_n={}_{n+n-1}C_n=\underline{{}_{2n-1}C_n}$

③′ P.156 下

④ ${}_nC_0+{}_nC_1+\cdots+{}_nC_n$ を求めよ.(定数C変数 となっています)

(解) $(x+1)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$ だから $x=1$ を代入すると

${}_nC_0+{}_nC_1+\cdots+{}_nC_n=\underline{2^n}$

(補) 微分して $n(x+1)^{n-1}={}_nC_1+2\cdot{}_nC_2x+3{}_nC_3x^2+\cdots+n{}_nC_nx^{n-1}$ に $x=1$ を代入すると

${}_nC_1+2\cdot{}_nC_2+3{}_nC_3+\cdots+n{}_nC_n=n\cdot2^{n-1}$ なども求まります.

⑤ ${}_2C_2+{}_3C_2+\cdots+{}_{n-1}C_2+{}_nC_2$ を求めよ.(変数C定数 となっています. P.183

(解1) $(x+1)^{n+1}-1=x\{(x+1)^n+(x+1)^{n-1}+\cdots+(x+1)^2+(x+1)+1\}$ と因数分解できる.

右辺の x^3 の係数は $(x+1)^n,(x+1)^{n-1},\cdots,(x+1)^2$ の x^2 の係数の和であり 左辺の x^3 の係数は ${}_{n+1}C_3$ であるから

${}_nC_2+{}_{n-1}C_2+\cdots+{}_3C_2+{}_2C_2={}_{n+1}C_3=\underline{\dfrac{(n+1)n(n-1)}{6}}$

(解2) ${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$ だから n に $n+1$, r に $r+1$ を入れて ${}_{n+1}C_{r+1}={}_nC_{r+1}+{}_nC_r$

${}_nC_r={}_{n+1}C_{r+1}-{}_nC_{r+1}$ $r=2$ として n に $2,3,4,\cdots,n$ を入れて 辺々たすと

${}_2C_2+{}_3C_2+\cdots+{}_nC_2={}_{n+1}C_3-{}_2C_3={}_{n+1}C_3$ ($\because {}_2C_3=0$)

(解3) P.7の(5)下(この解がわかりやすいでしょう)

⑥ $p\geqq0, q\geqq0, r\geqq0, p+q+r\leqq8$ の整数解(p,q,r)の個数を求めよ.

(解1) $8-p-q-r=s$ とおくと $p\geqq0, q\geqq0, r\geqq0, s\geqq0, p+q+r+s=8$ の整数解(p,q,r,s)の個数と同じで ${}_4H_8={}_{11}C_8=\dfrac{11\cdot10\cdot9}{3\cdot2}=\underline{165}$

(解2) $p+q+r=0,1,2,\cdots,8$ の整数解(p,q,r)の個数であるから

${}_3H_0+{}_3H_1+{}_3H_2+\cdots+{}_3H_8={}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_8={}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_2$

$={}_{11}C_3=\underline{165}$ (${}_nC_r={}_nC_{n-r}$, ⑤より)

⑦ $p\geqq0, q\geqq0, r\geqq0, p+q+r\leqq10$, p,q,r は全て奇数のとき 整数解(p,q,r)の個数を求めよ.

(解) $p=2a+1, q=2b+1, r=2c+1$ とおくと $a\geqq-\frac{1}{2}, b\geqq-\frac{1}{2}, c\geqq-\frac{1}{2}$, $a+b+c\leqq\frac{7}{2}$

a,b,c は整数だから $a\geqq0, b\geqq0, c\geqq0, a+b+c\leqq3$ の整数解(a,b,c)の個数と同じである. $3-(a+b+c)=d$ とおくと $a\geqq0, b\geqq0, c\geqq0, d\geqq0, a+b+c+d=3$ の整数解(a,b,c,d)と同じで 求める個数は ${}_4H_3={}_6C_3=\underline{20}$

⑧ $|p|+|q|+|r|=n\ (1,2,\cdots)$ のとき 整数解(p,q,r)の個数を求めよ.(P.8の(9), (9)′にも解あります)

(i) p,q,r 全て0でないとき $|p|\geqq1, |q|\geqq1, |r|\geqq1$, $|p|+|q|+|r|=n$ だから $(|p|,|q|,|r|)$の個数は

${}_3H_{n-3}={}_{n-1}C_{n-3}=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ ($\because$ ②の方法)

例えば $|p|=1, |q|=1, |r|=n-2$ のおのおのについて $p=\pm1, q=\pm1, r=\pm(n-2)$ であり

組合せは $2^3=8$ 通り　よって $8\times\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}=4(n-1)(n-2)$

(ii) 次頁

(ii) p,q,r の1つが0のとき　$p=0$ ならば $|q|+|r|=n$, $|q|\geqq 1$, $|r|\geqq 1$ だから ${}_2H_{n-2}={}_{n-1}C_{n-2}=n-1$
すなわち $(0,|q|,|r|)$ の整数解は $n-1$ 個で $(0,q,r)$ は4通りあるから
$4(n-1)$ 個, $q=0$, $r=0$ のときも同様で個数は $3\cdot 4(n-1)=12(n-1)$ 個

(iii) p,q,r の中に2つ0があるとき、例えば $p=q=0$ とすると $|r|=n$ で $(0,0,r)$ の整数解は
$(0,0,\pm n)$ の2個　$p=r=0$, $q=r=0$ のときも同様で $3\cdot 2=6$ 個

よって求める整数解の個数は(i)+(ii)+(iii)であり $4(n-1)(n-2)+12(n-1)+6=\underline{4n^2+2}$ (個)

⑨P.76下 ⑩P.94下 ⑪P.70下 ⑫P.72下 [類]P.126の問147, P.131, P134, P.67の類1)

さて本題ですが $-x+y-z=p$, $x-y-z=q$, $-x-y+z=r$ とおくと $p+q+r=-(x+y+z)$ であり
$p\leqq n$, $q\leqq n$, $r\leqq n$, $p+q+r\geqq -n$ をみたす p,q,r となりますが $x=-\dfrac{p+r}{2}$, $y=-\dfrac{q+r}{2}$
$z=-\dfrac{p+q}{2}$ ですから, p,q,r には制約があります. x,y,z が整数になるためには、
p,q,r は全て偶数か又は全て奇数ということです. $n-p=a$, $n-q=b$, $n-r=c$ とおくと
$a\geqq 0$, $b\geqq 0$, $c\geqq 0$, $a+b+c\leqq 2n$, a,b,c は全て奇数かまたは全て偶数となる整数解 (a,b,c) の総数が求める $f(n)$ となります.

[解] $-x+y-z=p$, $x-y-z=q$, $-x-y+z=r$ とおくと $p+q+r=-(x+y+z)$
よって $p+q+r\geqq -n$, $p\leqq n$, $q\leqq n$, $r\leqq n$ となるが $x=-\dfrac{p+r}{2}$, $y=-\dfrac{q+r}{2}$, $z=-\dfrac{p+q}{2}$ であるから, x,y,z が整数となるためには, p,q,r は全て偶数かまたは奇数でなければならない.
さらに $n-p=a$, $n-q=b$, $n-r=c$ とおくと $a+b+c\leqq 4n$, $a\geqq 0$, $b\geqq 0$, $c\geqq 0$, (i) a,b,c は全て偶数または (ii) a,b,c は全て奇数となる整数 (a,b,c) の組の総数が求める $f(n)$ である.

(i)のとき $a=2a'$, $b=2b'$, $c=2c'$ とおくと $a'\geqq 0$, $b'\geqq 0$, $c'\geqq 0$, $a'+b'+c'\leqq 2n$ をみたす整数 (a',b',c') の個数を求めることになる. $2n-a'-b'-c'=d'$ とおくと $a'\geqq 0$, $b'\geqq 0$, $c'\geqq 0$, $d'\geqq 0$, $a'+b'+c'+d'=2n$ をみたす整数解 (a',b',c',d') の個数と同じであり ${}_4H_{2n}={}_{2n+3}C_{2n}=\dfrac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)}{3!}$
$=\dfrac{(2n+3)(n+1)(2n+1)}{3}$

(ii)のとき $a=2a'+1$, $b=2b'+1$, $c=2c'+1$ とおくと $a'+b'+c'\leqq 2n-\dfrac{3}{2}=2n-2+\dfrac{1}{2}$
$a'\geqq -\dfrac{1}{2}$, $b'\geqq -\dfrac{1}{2}$, $c'\geqq -\dfrac{1}{2}$ であるが a',b',c' は整数だから $a'+b'+c'\leqq 2n-2$, $a'\geqq 0$,
$b'\geqq 0$, $c'\geqq 0$ をみたす整数 (a',b',c') の個数を求めることになる. $2n-2-a'-b'-c'=d'$ とおくと, $a'+b'+c'+d'=2n-2$, $a'\geqq 0$, $b'\geqq 0$, $c'\geqq 0$, $d'\geqq 0$ をみたす整数解 (a',b',c',d') の個数と同じであり ${}_4H_{2n-2}={}_{2n+1}C_{2n-2}=\dfrac{(2n+1)\cdot 2n(2n-1)}{3!}=\dfrac{(2n+1)n(2n-1)}{3}$

よって (i)+(ii) より求める総数 $f(n)=\dfrac{(2n+3)(n+1)(2n+1)}{3}+\dfrac{(2n+1)n(2n-1)}{3}$

$=\dfrac{2n+1}{3}\{(2n+3)(n+1)+n(2n-1)\}$

$=\dfrac{2n+1}{3}(4n^2+4n+3)$

[補] 次頁に[別解1], P.7の(12)に[別解2] 空間を切る.

答	$f(n)=\dfrac{(2n+1)(4n^2+4n+3)}{3}$

異なる6コの玉ⓐ,ⓑ,ⓒ,ⓓ,ⓔ,ⓕ，区別のつかない6コの玉(白玉6コ),を箱に分け入れる。

16.[I] 異なる6コの玉ⓐⓑⓒⓓⓔⓕについて、次の方法は何通りあるか

(1) 異なる3つの箱A,B,Cについて、Aに1コ,Bに2コ,Cに3コ入れる。
(2) 異なる3つの箱A,B,Cについて、A,B,Cに1コ,2コ,3コを分け入れる。
(3) 異なる3つの箱A,B,Cについて、Aに1コ,Bに1コ,Cに4コ入れる。
(4) 異なる3つの箱A,B,Cについて、A,B,Cに1コ,1コ,4コを分け入れる。
(5) 異なる3つの箱A,B,Cについて、Aに2コ,Bに2コ,Cに2コ入れる。
(6) 異なる3つの箱A,B,Cについて、A,B,Cに2コ,2コ,2コを分け入れる。
(7) 異なる3つの箱A,B,Cに分け入れる。(空があってもよい)
(8) 異なる3つの箱A,B,Cに分け入れる。(空があってはならない。)
(9) 区別できない3つの箱に、1コ,2コ,3コを分け入れる。(1コ,2コ,3コの3組に分ける。)
(10) 区別できない3つの箱に、1コ,1コ,4コを分け入れる。(1コ,1コ,4コの3組に分ける。)
(11) 区別できない3つの箱に、2コ,2コ,2コを分け入れる。(2コ,2コ,2コの3組に分ける。)
(12) 区別できない3つの箱に分け入れる。(空があってもよい)
(13) 区別できない3つの箱に分け入れる。(空があってはならない)

[II] 区別のつかない6コの玉(白玉6コ)について、上と同じ問題(1)〜(13)の方法は何通りあるか。

[考] (7),(8),(12),(13)については、P.8の(4)以降に詳しくあります。
この種の問題については、異なる玉，区別のつかない玉，異なる箱，区別のつかない箱，の4つに注意を払います。例えば、[I](4)を解くときには、[II](4),[I](10),[I](2),などを常に意識します。更に例えば、玉の数を少なくして、3コとか4コとかにして考えるとわかりやすくなるでしょう。解答するにあたっては、問の順にしてない場合もあります。尚、[I](10)などは、解き方を暗記していても、損はないでしょう。「[I](10) 異なる6コの玉ⓐⓑⓒⓓⓔⓕを1コ,1コ,4コの3組に分ける方法は何通りあるか」…… $\frac{{}_6C_1\cdot{}_5C_1}{2!}=\frac{6\cdot5}{2}=15$ 通り (1コ,1コとあるので2!でわる.) [I](11)ならば、$\frac{{}_6C_2\cdot{}_4C_2}{3!}$ (2コ,2コ,2コとあるので3!でわる)

答		
	[I]	[II]
(1)	60	1
(2)	360	6
(3)	30	1
(4)	90	3
(5)	90	1
(6)	90	1
(7)	729	28
(8)	540	10
(9)	60	1
(10)	15	1
(11)	15	1
(12)	122	7
(13)	90	3

[解] [I](1) ${}_6C_1\cdot{}_5C_2=6\cdot\frac{5\cdot4}{2}=\underline{60}$

[I](2) (A,B,C)=(1コ,2コ,3コ)(1コ,3コ,2コ)---(3コ,2コ,1コ) 3!=6通りあるので
(1)より $60\times6=\underline{360}$

[I](9) [I](2)でA,B,Cの制約をはずせば、360を3!=6でわることになり結局
[I](1)と同じで $\underline{60}$

[I](3) ${}_6C_1\cdot{}_5C_1=\underline{30}$

[I](4) (A,B,C)=(1コ,1コ,4コ),(1コ,4コ,1コ),(4コ,1コ,1コ)の3通りあるから求めるものは、
${}_6C_1\cdot{}_5C_1\cdot3=30\cdot3=\underline{90}$

[I](10) [I](4)でA,B,Cの制約をはずせば、例えば ⓐ ⓑ ⓒⓓⓔⓕ は6通りあるので
$\frac{{}_6C_1\cdot{}_5C_1\cdot3}{6}=\frac{90}{6}=\underline{15}$ [考]の下を暗記して $\frac{{}_6C_1\cdot{}_5C_1}{2!}=\frac{30}{2}=\underline{15}$

[I](5) $_6C_2\cdot{}_4C_2=\frac{6\cdot5}{2}\cdot\frac{4\cdot3}{2}=\underline{90}$

[I](11) 2コ,2コ,2コ, 同じ数2コが3つあるので $\frac{_6C_2\cdot{}_4C_2}{3!}=\frac{90}{6}=\underline{15}$

[I](6) [I](11)を$3!=6$通りでA,B,Cに分け入れる. ∴$15\times6=\underline{90}$ (例えば ab cd ef に分けられたものは, (A,B,C)=(ab,cd,ef)(ab,ef,cd)(cd,ab,ef)(ef,ab,cd)(cd,ef,ab)(ef,cd,ab)
しかしながら.[I](4)のように(A,B,C)=(1コ,1コ,4コ)(1コ,4コ,1コ)(4コ,1コ,1コ)とすることを考えると
(A,B,C)=(2,2,2)の1つでよいことになり $_6C_2\cdot{}_4C_2=\underline{90}$です.

[I](7)

ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ	ⓔ	ⓕ
A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C

∴ $3^6=27^2=\underline{729}$

[I](8) [I](7) 3^6は次の(i),(ii),(iii)の和である. 下Venn図参照

(i) (ア)Aだけが空でBとCには少なくとも1コは入っている.
(イ)Bだけが空でAとCには少なくとも1コは入っている.
(ウ)Cだけが空でAとBには少なくとも1コは入っている.

(ア)の場合

ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ	ⓔ	ⓕ
B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C

2^6であるが, Bだけに集中する1通りとCだけに集中する1通りをひいて $2^6-2=62$通り

(イ),(ウ)についても同様.

よって (i)は $3(2^6-2)=3\cdot62=186$通り

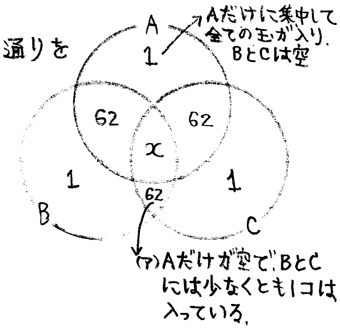
(ii) Aだけに集中して全ての玉が入り, BとCは空 1通り
Bだけに集中して全ての玉が入り, AとCは空 1通り
Cだけに集中して全ての玉が入り, AとBは空 1通り
よって (ii)は 3通り

(iii) これが求めるもので A,B,Cいずれも空でなく少なくとも1コは入っている x通り

したがって $3^6=3(2^6-2)+3+x$ $x=3^6-3\cdot(2^6-2)-3=729-186-3=\underline{540}$ ((2)+(4)+(6)ですが)

※(補)

[I](12) [I](7)でA,B,Cの制約をはずせばよい. 右図は[I](7) $3^6=729$通りを示したものである. ([I](8)を利用します.)



- [I](8)の(i)で A,B,Cの制約をはずすと, (ア)の場合 例えば
  (A,B,C)=(0,ⓐⓑⓒ,ⓓⓔⓕ),(0,ⓓⓔⓕ,ⓐⓑⓒ)
  の2通りあるから, 2でわることが必要で $\frac{62}{2}=31$
  注,(i)の制約をはずすと62としないように!
- [I](8)の(ii)でA,B,Cの制約をはずすと 1通り
- [I](8)の(iii)でA,B,Cの制約をはずすと $\frac{x}{3!}=\frac{540}{6}=90$

したがって求めるものは $31+1+90=\underline{122}$ ($\underline{(9)+(10)+(11)}$に(0,0,6)の$\underline{1}$通り, (0,1,5)の$_6C_1=\underline{6}$通り, (0,2,4)の$_6C_2=\underline{15}$通り, (0,3,3)の$\frac{_6C_3}{2}=\underline{10}$通り をたせば$\underline{122}$)

[I](13) $\frac{x}{3!}=\frac{540}{6}=\underline{90}$ (勿論 (9)+(10)+(11)=60+15+15=90 ですが・・・)
(I(8)の解540通りで, A,B,Cの制約をはずす)

(補) (i)と(iii)の和 $3(2^6-2)+x=186+540=726$ を$3!=6$でわって $\frac{726}{6}=121$ これに(ii)の1をたして $\underline{122}$
P.8の(4)以降に詳しくしてあります.

[II]は次頁

[Ⅱ](1) 1　(2) 1コ, 2コ, 3コ を並びかえて $3!=\underline{6}$　(3) 1　(4) 1コ, 1コ, 4コ を並びかえて $\frac{3!}{2!}=\underline{3}$

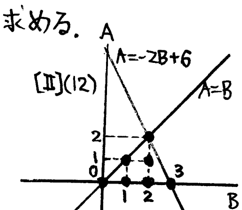
(5) 1　(6) 1

(7) $A+B+C=6,\ 0\leqq A,\ 0\leqq B,\ 0\leqq C$ をみたす整数解 (A,B,C) の組数　${}_3H_6={}_8C_6=\frac{8\cdot7}{2}=\underline{28}$

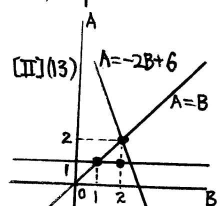
(8) $A+B+C=6,\ 1\leqq A,\ 1\leqq B,\ 1\leqq C$ をみたす整数解 (A,B,C) の組数を求めればよい。
$A=x+1,\ B=y+1,\ C=z+1$, とおけば $x+1+y+1+z+1=6$　$x+y+z=3,\ 0\leqq x,\ 0\leqq y,\ 0\leqq z$
$\therefore {}_3H_3={}_5C_3=\frac{5\cdot4}{2}=\underline{10}$

(9) 1　(10) 1　(11) 1

(12) $A+B+C=6,\ 0\leqq A\leqq B\leqq C$, をみたす整数解 (A,B,C) の組数を求めればよい。
$0\leqq A\leqq B\leqq 6-A-B$　$0\leqq A\leqq B,\ A\leqq -2B+6$ を (B,A) 平面に図示し、格子点の個数を求める。
右図 7コ



(13) $A+B+C=6,\ 1\leqq A\leqq B\leqq C$ をみたす整数解 (A,B,C) の組数を求めればよい。
$1\leqq A\leqq B\leqq 6-A-B$　$1\leqq A\leqq B,\ A\leqq -2B+6$ を (B,A) 平面に図示し、格子点の数を求める。右図 3コ



(補) [Ⅱ](8),(12),(13) などは、全てをかき出す方法が当然のことですが、次頁からのことを考えて解としました。尚、(7),(8)も、(12),(13)ように格子点で、できます。
P.66にも同じものがありました悪しからず

17. 1,2,3,4 の数字から重複を許して5桁の整数を作るとき1を3回使ってできる整数の個数はいくつあるか。

[考1] 1を3回使うことはわかっているのだから、残り2個の数字は、(i)2個とも同じ数字 (ii)2個が異なる数字

[解1] (i) 11122, 11133, 11144 の場合 $\frac{5!}{3!2!}\times3=\frac{5\cdot4}{2}\cdot3=30$
(ii) 11123, 11124, 11134 の場合 $\frac{5!}{3!}\times3=5\cdot4\cdot3=60$
$\therefore 30+60=90$

答	90

[考2] ○○○○○ 5コの○から3コをとって1を入れる。残りの2コの○には (i) 2と2, 3と3, 4と4, (ii) 2,3,4, から2つをとって順列

[解2] ${}_5C_3\times(3+{}_3P_2)=\frac{5\cdot4}{2}\times(3+6)=10\times9=90$

彼らは昨夜東京を出発した。　They (　　)(　　) from Tokyo last night.　答 set off

22. 6個の数字0,1,2,3,4,5,のうちの相異なる3つの数字を用いてできる3桁の整数についてつぎの個数を求めよ. (1)偶数 (2)3の倍数 (3)4の倍数 (4)5の倍数 (5)9の倍数 (6)6の倍数

[考] とにかく3桁の整数はいくつできるでしょうか？ $\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}$ とすると a には、1,2,3,4,5の5通り。b には、例えば a で2をとると1,3,4,5が残り、0を含めて5通り。c には4通り　∴ $5\times5\times4=100$ 個の整数ができます。

(1) $\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}$　c が0,2,4の3通りに場合わけをします。

(2) $100a+10b+c=3m_1$ より $a+b+c=3(m_1-33a-3b)$ ですから $a+b+c$ が3の倍数であればよいわけです。(0,1,2)(0,1,5)(0,2,4)(0,4,5)(1,2,3)------と全ての場合をまず書き出すことです

(3) $100a+10b+c=4m_2$ より $25a+\frac{10b+c}{4}=m_2$ ですから下2桁が4の倍数であればよい

(4) 1位の数字が0または5

(5) $100a+10b+c=9m_2$ より　$a+b+c=9(m_2-11a-b)$ ですから $a+b+c$ が9の倍数

(6) 2の倍数でありかつ3の倍数です。

[解] (1) (i) 1位が0の場合百の位は5通り、十の位は4通り　∴ $5\times4=20$

(ii) 1位が2の場合百の位は0を除く4通り、十の位は4通り　∴ $4\times4=16$

(iii) 1位が4の場合(ii)と同じ　　∴ $20+2\times16=\underline{52}$(個)

(2) 各位の数字の和が3の倍数であればよいから、その組合せは、(0,1,2)(0,1,5)(0,2,4)(0,4,5)(1,2,3)(1,3,5)(2,3,4)(3,4,5)

0を含む組合せについて $(2\times2)\times4=16$ 通り

0を含まない組合せについて $(3\times2)\times4=24$ 通り　　∴ $16+24=\underline{40}$(個)

(3) 下2桁が4の倍数であればよいから下2桁は、04,12,20,24,32,40,52の7通り。0を含む組合せ3通について $4\times3=12$, 0を含まない組合せについて $3\times4=12$　　∴ $12+12=\underline{24}$(個)

(4) 1位が0の場合 $5\times4=20$, 1位が5の場合 $4\times4=16$　∴ $20+16=\underline{36}$(個)

(5) 各位の数字の和が9の倍数であればよいからその組合せは、(1,3,5)(2,3,4)(0,4,5)　　$3!\times2+4=16$(個)

(6) まず2の倍数であることが必要だから1位は0か2か4。かつ3の倍数だから

(i) 1位が0の場合各位の数字の和が3の倍数の組合せは(1,2)(1,5)(2,4)(4,5)　∴ $2\times4=8$　(ii) 1位が2のとき(0,1)(0,4)(1,3)(3,4)　∴ $1+1+2+2=6$

(iii) 1位が4のとき(0,2)(0,5)(2,3)(3,5)　$1+1+2+2=6$

∴ $8+6+6=\underline{20}$(個)

[補] (6)はまず3の倍数から調べて(2)の組合せで2の倍数になるものを数えた方がはやくできますね。

1個のサイコロを3回なげ、

38. 3個のサイコロをなげ、出た目の和が n の倍数になるpro.を P_n, 出た目の積が n の倍数になるpro.を q_n とする. $n=1,2,3,\cdots,10,11,12$, のときの P_n, q_n のpro.をそれぞれ求めよ.

[考] P_2 について. 和がグになるのは、(i)グ,グ,グ (ii)グ,グ,キ, (iii)グ,キ,キ, (iv)キ,キ,キ の4つの場合のうち (i) or (iii) の場合であり, (ii) or (iv) の場合は,和はキです. 対等性から, $P_2=\frac{1}{2}$ となることは、明らかですが---- (i)の目の出方は、3^3通り (iii)の目の出方は $3^3\times3$通り (3個のサイコロのうちどれがグかで3通りをかける.) よって (i)+(iii) は $3^3+3^3\times3=3^3\times4$ 通り, 全ては 6^3通りです. あるいは, (i)のpro.は $(\frac{3}{6})^3$, (iii)のpro.は $(\frac{3}{6})^3\times3$, としてもOK.

(別解) 出た目を x,y,z とすると、$1\leqq x,y,z\leqq6$ であり, $x+y+z=4,6,8,10,12,14,16,18$ の各場合について、整数解 (x,y,z) の個数を調べればよいことです. この方法は, P_n 全てについて利用できます. P.7参照

- $x+y+z=11$ $(1\leqq x,y,z\leqq6)$ のときどのようになるか. 次のように (ア),(イ) どちらもOK.
  (ア) $x=a+1, y=b+1, z=c+1$ とおくと $a+b+c=8$ $(0\leqq a,b,c\leqq5)$ をみたす整数解の組 (a,b,c) の個数と一致する. ${}_3H_8$ から $(0,0,8)$ $(0,1,7)$ $(0,2,6)$ $(1,1,6)$ の場合を引いて, 求める個数は ${}_3H_8-\frac{3!}{2!}-3!-3!-\frac{3!}{2!}={}_{10}C_8-3-6-6-3=27$
  (イ) $6-x=p, 6-y=q, 6-z=r$ とおくと $p+q+r=7$ $(0\leqq p,q,r\leqq5)$ をみたす整数解の組 (p,q,r) の個数と一致する. ${}_3H_7$ から $(0,0,7)$ $(0,1,6)$ の場合を引いて 求める個数は ${}_3H_7-\frac{3!}{2!}-3!={}_9C_7-3-6=36-9=27$

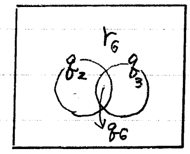
q_2 について 少なくとも1回グであればよいから, キ,キ,キ のpro $(\frac{3}{6})^3$ を1から引く.

q_3 について $\boxed{解1}$ 少なくとも1回 3or6 が出ればよいから. 3or6 が全く出ない (1or2or4or5が出る) pro $(\frac{4}{6})^3$ を1から引く. あるいは, 次の $\boxed{解2}$ 3つに場合分けする. (i) 3つの目が全て 3or6 $(\frac{2}{6})^3$ (ii) 2つの目が3or6, もう1つの目は 1or2or4or5 $(\frac{2}{6})^2\times(\frac{4}{6})\times3$ (iii) 1つの目が 3or6 残り2つの目は 1or2or4or5 $(\frac{2}{6})\times(\frac{4}{6})^2\times3$ (i)+(ii)+(iii) です.

q_4 について. $\boxed{解1}$ (i)キキキ (ii)キキグ (iii)キググ (iv)グググ の中で4の倍数にならないのは, (i)のキ,キ,キの場合のpro. $(\frac{3}{6})^3$ と (ii)の中で, キが2回と 2or6 が1回の場合のpro. $(\frac{3}{6})^2\times(\frac{2}{6})\times3$ です. $\boxed{別解}$ としては, q_2 から q_2 の中で4の倍数にならない (2or6が1回, キが2回) pro. $(\frac{2}{6})\times(\frac{3}{6})^2\times3$ を引く. $\boxed{解2}$ (i)グ,グ,グ $(\frac{3}{6})^3$ (ii)グ,グ,キ $(\frac{3}{6})^2(\frac{3}{6})\cdot3$ (iii)キ,キ,4が1回, $(\frac{3}{6})^2(\frac{1}{6})\cdot3$ (i)+(ii)+(iii)

q_5 について $\boxed{解1}$ 5の目が全く出ないpro. $(\frac{5}{6})^3$ を1から引く.
$\boxed{解2}$ (i) 5,5,5 $(\frac{1}{6})^3$ (ii) 5,5と(1or2or3or4or6) $(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})\cdot3$
(iii) 5が1回, (1or2or3or4or6)が2回 $(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^2\cdot3$

q_6について 2の倍数 and 3の倍数です. 右、Venn図より $q_2+q_3-q_6+r_6=1$



r_6は 1 or 5の倍数のpro.ですから $r_6=\left(\frac{2}{6}\right)^3$

q_7について、当然 $q_7=0$ です.

q_8について (i)キキキ (ii)キキグ (iii)キググ (iv)グググ

$\boxed{解1}$ 8の倍数にならないのは (i)キキキ $\left(\frac{3}{6}\right)^3$ (ii)キキグ $\left(\frac{3}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)\cdot 3$ と、

(iii)でキと2or6が2回出る. $\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)^2\cdot 3$

$\boxed{解2}$ 8の倍数になるのは (iv)グググ $\left(\frac{3}{6}\right)^3$ (iii)の中で(ア)キ,4,4 $\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot 3$ (イ)キ,4,(2or6) $\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)\cdot 3!$

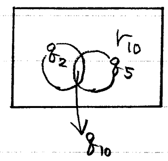
q_9について a: 3or6が出る $\frac{2}{6}$ b: 1 or 2 or 4 or 5が出る $\frac{4}{6}$ (i)aaa (ii)aab (iii)abb (iv)bbb

$\boxed{解1}$ (i)aaa $\left(\frac{2}{6}\right)^3$ (ii)aab $\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{4}{6}\right)\cdot 3$

$\boxed{解2}$ 9の倍数にならないのは (iii)abb $\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)^2\cdot 3$ (iv) $\left(\frac{4}{6}\right)^3$

q_9は 1−((iii)+(iv))

q_{10}について 2の倍数 and 5の倍数です. q_6のようにVenn図をかくと、---

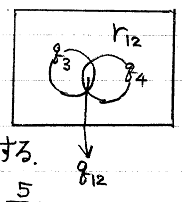


$q_2+q_5-q_{10}+r_{10}=1$, r_{10}は、3つの目が全て、1or3のpro.だから $r_{10}=\left(\frac{2}{6}\right)^3$

r_{10}は2の倍数でも5の倍数でもない. つまり、1or3のみということ.

q_{11}について、当然 $q_{11}=0$

q_{12}について 3の倍数 and 4の倍数です. venn図をかくと----



$q_3+q_4-q_{12}+r_{12}=1$

r_{12}は3の倍数でも4の倍数でもないpro.だから、サイコロの6つの目から、

3,6,4を消して、1,2,5の目で考える. a: 1 or 5が出る $\frac{2}{6}$ b: 2が出る $\frac{1}{6}$ とする.

r_{12}は (i) aaa $\left(\frac{2}{6}\right)^3$ (ii) aab $\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)\cdot 3$ $r_2=\left(\frac{2}{6}\right)^3+\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)\cdot 3=\frac{1}{27}+\frac{1}{18}=\frac{5}{54}$

[解] $P_1=1$, $P_2=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 3=\frac{1}{2}$

出た目を(x,y,z)とする. $1\leqq x,y,z\leqq 6$

① $x+y+z=3$ のとき $(x,y,z)=(1,1,1)$ の1通り

② $x+y+z=4$ のとき $(x,y,z)=(1,1,2)$ を並べかえて $\frac{3!}{2!}=3$通り

③ $x+y+z=5$ のとき $x=a+1$, $y=b+1$, $z=c+1$ とおけば $a+b+c=2$, $0\leqq a,b,c\leqq 5$ ${}_3H_2={}_4C_2=6$通り

④ $x+y+z=6$ のとき $a+b+c=3$, $0\leqq a,b,c\leqq 5$, ${}_3H_3={}_5C_3=10$通り

⑤ $x+y+z=7$ のとき $a+b+c=4$, $0\leqq a,b,c\leqq 5$, ${}_3H_4={}_6C_4=15$通り

⑥ $x+y+z=8$ のとき $a+b+c=5$, $0\leqq a,b,c\leqq 5$ $_3H_5={}_7C_5=21$ 通り

⑦ $x+y+z=9$ のとき $a+b+c=6$, $0\leqq a,b,c\leqq 5$ $_3H_6-3={}_8C_6-3=25$ 通り

⑧ $x+y+z=10$ のとき $a+b+c=7$, $0\leqq a,b,c\leqq 5$ $_3H_7-3-3!={}_9C_7-9=27$ 通り

⑨ $x+y+z=11$ のとき $6-x=p$, $6-y=q$, $6-z=r$ とおくと, $p+q+r=7$, $0\leqq p,q,r\leqq 5$ $_3H_7-3-3!=27$ 通り

⑩ $x+y+z=12$ のとき $p+q+r=6$, $0\leqq p,q,r\leqq 5$ $_3H_6-3=25$ 通り

⑪ $x+y+z=13$ のとき $p+q+r=5$, $0\leqq p,q,r\leqq 5$ $_3H_5=21$ 通り

⑫ $x+y+z=14$ のとき $p+q+r=4$, $0\leqq p,q,r\leqq 5$ $_3H_4=15$ 通り

⑬ $x+y+z=15$ のとき $p+q+r=3$, $0\leqq p,q,r\leqq 5$ $_3H_3=10$ 通り

⑭ $x+y+z=16$ のとき $p+q+r=2$, $0\leqq p,q,r\leqq 5$ $_3H_2=6$ 通り

⑮ $x+y+z=17$ のとき $p+q+r=1$; $0\leqq p,q,r\leqq 5$ $(0,0,1)$ の並びかえ 3通り

⑯ $x+y+z=18$ のとき $(x,y,z)=(6,6,6)$ の1通り

以上より P_3 は ①+④+⑦+⑩+⑬+⑯ $=1+10+25+25+10+1=72$ 通り $\therefore P_3=\frac{72}{6\cdot6\cdot6}=\frac{1}{3}$

P_4 は ②+⑥+⑩+⑭ $=3+21+25+6=55$ 通り $\therefore P_4=\frac{55}{6^3}=\frac{55}{216}$

P_5 は ③+⑧+⑬ $=6+27+10=43$ 通り $\therefore P_5=\frac{43}{216}$

P_6 は ④+⑩+⑯ $=10+25+1=36$ 通り $\therefore P_6=\frac{1}{6}$

P_7 は ⑤+⑫ $=15+15=30$ 通り $\therefore P_7=\frac{5}{36}$

P_8 は ⑥+⑭ $=21+6=27$ 通り $\therefore P_8=\frac{27}{6^3}=\frac{1}{8}$

P_9 は ⑦+⑯ $=25+1=26$ 通り $\therefore P_9=\frac{26}{6^3}=\frac{13}{108}$

P_{10} は ⑧ $=27$ 通り $\therefore P_{10}=\frac{27}{6^3}=\frac{1}{8}$

P_{11} は ⑨ $=27$ 通り $\therefore P_{11}=\frac{1}{8}$

P_{12} は ⑩ $=25$ 通り $\therefore P_{12}=\frac{25}{216}$

答	
	$P_1=1$, $P_2=\frac{1}{2}$, $P_3=\frac{1}{3}$, $P_4=\frac{55}{216}$
	$P_5=\frac{43}{216}$, $P_6=\frac{1}{6}$, $P_7=\frac{5}{36}$, $P_8=\frac{1}{8}$
	$P_9=\frac{13}{108}$, $P_{10}=\frac{1}{8}$, $P_{11}=\frac{1}{8}$, $P_{12}=\frac{25}{216}$
	$q_1=1$, $q_2=\frac{7}{8}$, $q_3=\frac{19}{27}$, $q_4=\frac{5}{8}$
	$q_5=\frac{91}{216}$, $q_6=\frac{133}{216}$, $q_7=0$, $q_8=\frac{1}{3}$
	$q_9=\frac{7}{27}$, $q_{10}=\frac{1}{3}$, $q_{11}=0$, $q_{12}=\frac{91}{216}$

※ P_2 は ②+④+⑥+⑧+⑩+⑫+⑭+⑯ $=108$ $\therefore P_2=\frac{108}{216}=\frac{1}{2}$

$q_1=1$, [考]より $q_2=\frac{7}{8}$, $q_3=1-\left(\frac{4}{6}\right)^3=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$, $q_4=1-\left(\frac{3}{6}\right)^3-\left(\frac{3}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)\cdot3=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{7}{8}-\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$

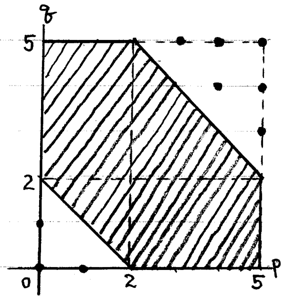
$q_5=1-\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{91}{216}$, $q_6=q_2+q_3+r_6-1=\frac{7}{8}+\frac{19}{27}+\frac{1}{27}-1=\frac{1}{216}(189+160-216)=\frac{133}{216}$ $q_7=0$

$q_8=1-\left(\frac{3}{6}\right)^3-\left(\frac{3}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)\cdot3-\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)^2\cdot3=1-\frac{1}{8}-\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{8}-\frac{3}{8}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$q_9=\left(\frac{2}{6}\right)^3+\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{4}{6}\right)\cdot3=\frac{1}{27}+\frac{1}{9}\cdot2=\frac{1}{27}+\frac{6}{27}=\frac{7}{27}$

$q_{10}=q_2+q_5+r_{10}-1=\frac{7}{8}+\frac{91}{216}+\left(\frac{2}{6}\right)^3-1=\frac{1}{216}(189+91+8-216)=\frac{72}{216}=\frac{1}{3}$ $q_{11}=0$

$q_{12}=q_3+q_4+r_{12}-1=\frac{19}{27}+\frac{5}{8}+\frac{5}{54}-1=\frac{1}{216}(152+135+20-216)=\frac{91}{216}$



[補] ⑨の $x+y+z=11$ を次のように格子点の個数として捉えることもできます.

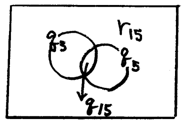
$6-x=p$, $6-y=q$, $6-z=r$ とおくと, $p+q+r=7$ $0\leqq p\leqq 5$, $0\leqq q\leqq 5$, $0\leqq r\leqq 5$

$r=7-p-q$ $0\leqq 7-p-q\leqq 5$ $\therefore -p+2\leqq q\leqq -p+7$ 右図, 斜線部の内部及び周上の

格子点の個数は, $6\times6-3-6=27$ $\therefore P_{11}=\frac{27}{6^3}=\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{1}{8}$

問. q_{15}, q_{16} を求めて下さい。あえて[考].[解]は、かきません。としたいところでしたが、かいてしまいました.

(解) q_{15} ---- 右図 $(q_3+q_5-q_{15})+r_{15}=1$ $\quad q_{15}$



$q_3=1-\left(\frac{4}{6}\right)^3$, $q_5=1-\left(\frac{5}{6}\right)^3$, $r_{15}=\left(\frac{3}{6}\right)^3$

r_{15}: 1 or 2 or 4 のみが出る

$q_{15}=q_3+q_5+r_{15}-1=1-\left(\frac{4}{6}\right)^3+1-\left(\frac{5}{6}\right)^3+\left(\frac{3}{6}\right)^3-1$

$=\frac{1}{6^3}(6^3-4^3-5^3+3^3)=\frac{1}{6^3}(216-64-125+27)=\frac{54}{6^3}=\frac{2\cdot3^3}{6^3}=\underline{\frac{1}{4}}$

q_{16} ---- (i)キキキ (ii)キキグ (iii)キググ (iv)グググ

(解1) 16の倍数にならないpro.を求め1から引くことにする.

(i)キキキ $\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{1}{8}$ (ii)キキグ $\left(\frac{3}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)\cdot3=\frac{3}{8}$

(iii)キググ−キ44 $\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)^2\cdot3-\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot3=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}=\frac{9}{24}-\frac{1}{24}=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$

(iv)グググ 2 or 6 のみが出る $\left(\frac{2}{6}\right)^3=\frac{1}{27}$

$\therefore q_{16}=1-\frac{1}{8}-\frac{3}{8}-\frac{1}{3}-\frac{1}{27}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{27}=\frac{1}{6}-\frac{1}{27}=\frac{9}{54}-\frac{2}{54}=\underline{\frac{7}{54}}$

(解2) 16の倍数を直接求めます. (i),(ii)の場合、決して16の倍数にならない.

(iv)グググ (ア)444 $\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$ (イ)44(2or6) $\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)\cdot3=\frac{6}{216}$

(ウ)4(2or6)(2or6) $\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)^2\cdot3=\frac{12}{216}$

(iii)キ44 $\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot3=\frac{9}{216}$

$\therefore q_{16}=\frac{1}{216}(1+6+12+9)=\frac{28}{216}=\underline{\frac{7}{54}}$

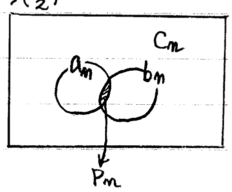
[類1] 1個のサイコロをn回なげるとき、出た目の全ての積が、20の倍数となるpro. P_nを求めよ.

(解) 4の倍数となるpro. a_nは、4の倍数とならないpro. a_n'を求めて、$a_n=1-a_n'$とする.

(i)全ての目が、キの場合 $\left(\frac{3}{6}\right)^n$ (ii)ちょうど1回だけ 2 or 6 の目が出て、残り$n-1$回は全てキの場合

$\left(\frac{2}{6}\right)^1\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}\cdot n=\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\quad\therefore a_n=1-\left\{\left(\frac{3}{6}\right)^n+\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{3}\right)=1-\left(\frac{2n+3}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

5の倍数となるpro. b_nは5の倍数とならないpro. $\left(\frac{5}{6}\right)^n$だから $b_n=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$



4の倍数にも5の倍数にもならないpro. C_nは、まず、1,2,3,6の目を考えて、

(i)全て1or3の目の場合 $\left(\frac{2}{6}\right)^n$ (ii) 2 or 6の目が1回,残り$n-1$回は1or3の目

の場合、$\left(\frac{2}{6}\right)^1\left(\frac{2}{6}\right)^{n-1}\cdot n=\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ $\quad\therefore C_n=\left(\frac{2}{6}\right)^n+\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{n+1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$(a_n+b_n-P_n)+C_n=1$ より $\quad P_n=a_n+b_n+C_n-1=1-\left(\frac{2n+3}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{n+1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$=\underline{1-\left(\frac{2n+3}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{5}{6}\right)^n+(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

(補) 上の(類)で $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-P_n)$ を求めよ.

$1-P_n=\left(\frac{5}{6}\right)^n\left\{1+\left(\frac{2n+3}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n-(n+1)\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$ $\quad\therefore\frac{1}{n}\log(1-P_n)=\log\frac{5}{6}+\frac{1}{n}\log\left\{1+\left(\frac{2n+3}{3}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n-(n+1)\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}\to\log\frac{5}{6}$

$\left(n\left(\frac{3}{5}\right)^n=n\cdot\left(\frac{1}{\frac{5}{3}}\right)^n=\frac{n}{\left(\frac{5}{3}\right)^n}\to0\right.$ など) $\qquad$ ($n\to\infty$のとき)

176. 1から6までの整数の目がそれぞれ同pro.で出るサイコロがある。
(1) このサイコロを2回なげ、出た目の数を a, b とする。このとき $a=b$ となるpro.を求めよ。
(2) このサイコロを3回なげ、出た目の数を出た順に c, d, e とする。このとき $c<d<e$ となるpro.を求めよ。
(3) このサイコロを4回なげ、出た目の数を w, x, y, z とする。このとき $wxyz=w+x+y+z$ となるpro.を求めよ。

[考] (1) 高校入試問題です。 (2) 1,2,3,4,5,6 の 6コから3コとれば OK.です。
(3) $w \geqq x \geqq y \geqq z \geqq 1$ とすると、$w \geqq w$, $w \geqq x$, $w \geqq y$, $w \geqq z$, 辺々たすと $4w \geqq w+x+y+z=4wxyz$

[解] (1) $\dfrac{6}{6^2}=\dfrac{1}{6}$

答	(1) $\dfrac{1}{6}$ (2) $\dfrac{5}{54}$ (3) $\dfrac{1}{108}$

(2) 1,2,3,4,5,6 の 6コから3コとりさえすれば、小さい順に c, d, e とすればよいので

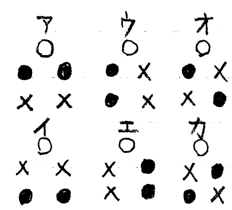
$$\frac{{}_6C_3}{6^3}=\frac{\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2}}{6^3}=\frac{5\cdot4}{6\cdot6\cdot6}=\frac{5}{6\cdot3\cdot3}=\frac{5}{54}$$

(3) $w \geqq x \geqq y \geqq z \geqq 1$ とする。$w \geqq w$, $w \geqq x$, $w \geqq y$, $w \geqq z$ なので辺々たすと $4w \geqq x+y+z+w=wxyz$
$4 \geqq xyz$ $(x,y,z)=(1,1,1)$ のとき $3+w=w$ (不適) $(2,1,1)$ のとき $4+w=2w$ $w=4$(適)
$(3,1,1)$ のとき $5+w=3w$ (不適), $(4,1,1)$ のとき $6+w=4w$ $w=2$ (不適)
$(2,2,1)$ のとき $5+w=4w$ (不適)
よって $w \geqq x \geqq y \geqq z \geqq 1$, $wxyz=w+x+y+z$ をみたす $(w,x,y,z)=(4,2,1,1)$ のみ。
不等号の制約をなくせば、$wxyz=w+x+y+z$ をみたす (w,x,y,z) の組は $(4,2,1,1)$ の順列であり $\dfrac{4!}{2!}=12$ 通り よって $\dfrac{12}{6^4}=\dfrac{2}{6\cdot6\cdot6}=\dfrac{1}{3\cdot36}=\dfrac{1}{108}$

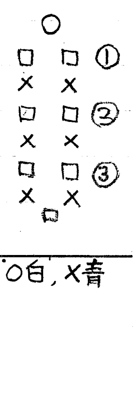
円順列.

177. 白玉1個，赤玉4個，青玉6個で環状の首飾りを作る。
(1) 作り方は全部で何通りあるか
(2) どの2個の赤玉もとなり合わないことにすると、作り方は何通りあるか

次頁からの類題を先にやる方がよいかもしれません。P.153の(4)にまとめあります。



[考] 白1，赤2，青2，で考えてみます。円順列としては、白1を固定して考えて右のア〜カの6通り $\left(\dfrac{4!}{2!2!}=6\right)$ あります。これがnecklaceになるとウとエ，オとカは裏返しをすると同じになるので、necklaceにするとア,イ,ウ,オの4通りができることになります。つまり、左右対称のものはそのまま数えて、左右対称でないものは2でわって数えるということになります。$\left(\dfrac{6-2}{2}+2=4\right)$



[解] (1) 白1を固定すると円順列は $\dfrac{10!}{4!6!}=\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2}=210$ 通り。左右対称なものは、赤2，青3を並べればよいから $\dfrac{5!}{2!3!}=10$ よって $\dfrac{210-10}{2}+10=110$

答	(1) 110	(2) 19

(2) 白1を固定する。円順列は、青6を先に並べておいて、7個のあいているところから4個をとって赤4を入れればよいから ${}_7C_4=35$ 通り。左右対称なものは、右の①,②,③の3列の□□から2列をとって赤4を入れればよいから ${}_3C_2=3$ 通り
よって $\dfrac{35-3}{2}+3=19$

○白，×青

円順列

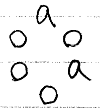
[類1] a, a, b, b, c, c の6個の玉の (1) 円順列 (2) じゅず順列 の個数を求めよ. A. (1) 16 (2) 11

(考1) (1) (i) a, a が続いている場合 (ii) a と a の間に b or c がはいる場合

(2) じゅず順列の個数 $=\dfrac{\text{円順列の個数}-\text{線対称な円順列の個数}}{2}+$ 線対称な円順列の個数

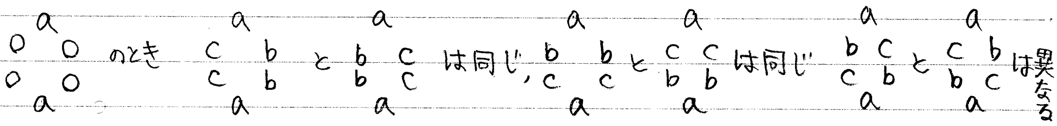
(解1) (1) (i) a, a が続いている場合. a, a を固定して, 残りの b, b, c, c を並べる $\therefore \dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=\dfrac{4\cdot 3}{2}=6$ 通り

(ii) (ア)



のとき b, b, c, c を並べて $\dfrac{4!}{2!2!}=6$ 通り

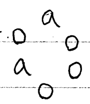
(イ)



よって4通り

すなわち, 円順列の個数は $6+6+4=16$ 通り

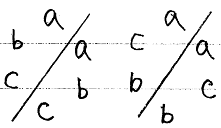
注



は (ア) と同じです.

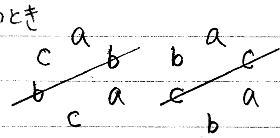
(2) 線対称の個数を調べる.

(1)の(i)のとき



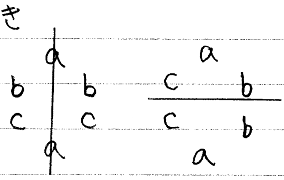
2通り

(ii)の(ア)のとき



2通り

(ii)の(イ)のとき



2通り

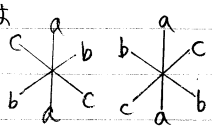
したがって じゅず順列 の個数は $\left(\dfrac{6-2}{2}+2\right)+\left(\dfrac{6-2}{2}+2\right)+\left(\dfrac{4-2}{2}+2\right)=11$ 通り

(考2) (1) a が2個であり, 点対称なものがある (b, c どちらも偶数個) ので, 点対称な円順列の個数を求めると, a 1個を固定し, 残り a, b, b, c, c を並べる (n 通り) ことを考えて.

円順列の個数 $=\dfrac{n-\text{点対称な円順列の個数}}{2}+$ 点対称な円順列の個数

(解2) (1) a 1個を固定し, 残り a, b, b, c, c を並べると $\dfrac{5!}{2!\cdot 2!}=\dfrac{5\cdot 4\cdot 3}{2}=30$

点対称な円順列は



2通り

よって求める円順列は $\dfrac{30-2}{2}+2=16$ 通り

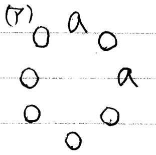
(2) $\dfrac{16-6}{2}+6=11$ 通り

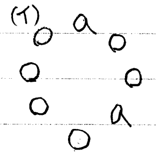
a|a
b|b
c|c

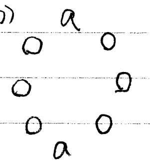
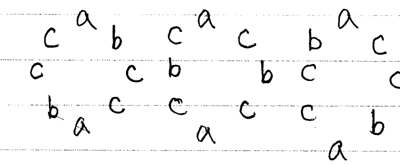
~~線対称は~~ $3!=6$ 通り

[類2] a2個, b2個, c4個 の (1) 円順列 (2) じゅず順列 の個数を求めよ A.(1) 54 (2) 33

(解1) (1) (i) a2 が続いている場合, b2, c4 を並べる $\frac{6!}{2!4!}=\frac{6\cdot5}{2}=15$

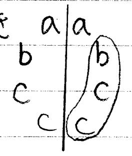
(ii) (ア)

円順列は $\frac{6!}{2!4!}=15$

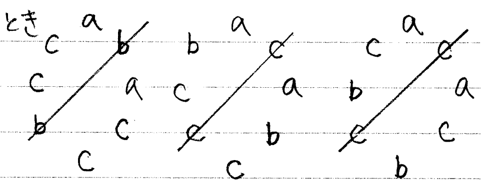
(イ)

円順列は $\frac{6!}{2!4!}=15$

(ウ)

点対称が下の3つあるので, 円順列は

$\dfrac{\frac{6!}{2!4!}-3}{2}+3=9$

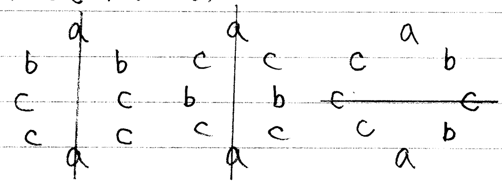
よって求める円順列は, $15+15+15+9=$ 54個

(2) 線対称な円順列を調べる.

(i) のとき

$\frac{3!}{2!}=3$ 通り

(ii) の (ア) のとき

3通り

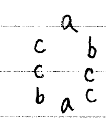
(ii) の (イ) のとき 3通り

(ii) の (ウ) のとき 下の3通り


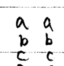
よって求めるじゅず順列は $\left(\frac{15-3}{2}+3\right)+\left(\frac{15-3}{2}+3\right)+\left(\frac{15-3}{2}+3\right)+\left(\frac{9-3}{2}+3\right)=$ 33個

(解2) (1) a1個を固定して, a, b, b, c, c, c, c を並べると $\frac{7!}{2!4!}=\frac{7\cdot6\cdot5}{2}=105$

点対称は (ii) ウの3個あるので, 求める円順列は $\frac{105-3}{2}+3=$ 54個


点対称は b, c, c の順列 $\frac{3!}{2!}=3$

(2) 線対称は $\frac{4!}{2!}=12$ 個あるので, じゅず順列は $\frac{54-12}{2}+12=$ 33個


線対称は a, b, c, c の順列 $\frac{4!}{2!}=12$

問. $x=2-\sqrt{3}$ のとき, 次の値を求めよ. (1) $x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$ (2) $x^7+x^6+\cdots+x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^7}$

(解) (1) $x+\frac{1}{x}=2-\sqrt{3}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$, $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=4^2-2=14$

よって $x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=4+14=$ 18

(2) 次頁下

[類3] a, b, b, b, c, c, c, c の (1) 円順列 (2) じゅず順列 の個数を求めよ。A. (1) 35 (2) 19

(解) (1) a を固定すると、求める円順列は $\dfrac{7!}{3!4!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2} = \underline{35個}$

(2) 線対称は $\begin{array}{c|c} & a \\ b & b \\ c & c \\ c & c \\ & b \end{array}$ を考えて $\dfrac{3!}{2!} = 3$ 通り。よって、じゅず順列は $\dfrac{35-3}{2} + 3 = \underline{19個}$

[類4] a, a, b, b, b, c, c, c, c の (1) 円順列 (2) じゅず順列 の個数を求めよ。(1) 140 (2) 76

(解) (1) 点対称な円順列は 0 個なので、円順列の個数は、a 1 個を固定して並べる順列 $\dfrac{8!}{3!4!} = 280$ より、$\dfrac{280-0}{2} + 0 = \underline{140個}$

(2) 140 個の円順列のうち線対称なものは、$\begin{array}{c|c} & b \text{※} \\ a & a \\ b & b \\ c & c \\ c & c \end{array}$ と考えて $\dfrac{4!}{2!} = 12$ 通りある。
※(1個の b は必ず線対称軸上になければならない)

よって、じゅず順列は $\dfrac{140-12}{2} + 12 = \underline{76個}$

まとめると、次のようです。

円順列について (半公式化)

- a が 1 コのとき　a 1 コを固定して、残りを並べた順列が、求める円順列
- a が 2 コのとき　a 1 コを固定して、a 1 コを含む残りを並べた順列 = T、点対称となる円順列 = U として、円順列 $= \dfrac{T-U}{2} + U = \dfrac{T+U}{2}$
- a が 3 コ以上のとき 場合分け

$$じゅず順列 = \frac{円順列 - 線対称}{2} + 線対称 = \frac{円順列 + 線対称}{2}$$

次頁のようになると場合分けが必要です。

前頁下の (2) $a_n = x^n + \dfrac{1}{x^n}$ とおくと $a_{n+1} = x^{n+1} + \dfrac{1}{x^{n+1}} = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^n + \dfrac{1}{x^n}\right) - \left(x^{n-1} + \dfrac{1}{x^{n-1}}\right) = 4a_n - a_{n-1}$ $(n \geqq 2)$

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n$ とおけば　$S_{n+1} - a_2 - a_1 = 4(S_n - a_1) - S_{n-1}$

$S_{n+1} - 14 - 4 = 4(S_n - 4) - S_{n-1}$　$S_{n+1} = 4S_n - S_{n-1} + 2$ $(n \geqq 2)$　$S_1 = a_1 = 4$, $S_2 = a_1 + a_2 = 18$

$S_3 = 4S_2 - S_1 + 2 = 4\cdot 18 - 4 + 2 = 70$, $S_4 = 4S_3 - S_2 + 2 = 4\cdot 70 - 18 + 2 = 264$

$S_5 = 4S_4 - S_3 + 2 = 4\cdot 264 - 70 + 2 = 988$

$S_6 = 4S_5 - S_4 + 2 = 4\cdot 988 - 264 + 2 = 3690$

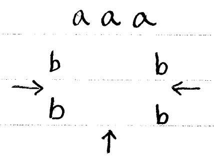
$S_7 = 4S_6 - S_5 + 2 = 4\cdot 3690 - 988 + 2 = \underline{13774}$

[類5] a, a, a, a, b, b, b, b の (1) 円順列 (2) じゅず順列 の個数を求めよ. A. (1) 10 (2) 8

(解)

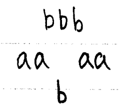
(1) (i) aaaa が連続しているとき 1通り

(ii) aaa + a の形のとき 下の3つの矢印のどこに a を入れるかで 3通り ($_3C_1=3$)

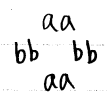


(iii) aa + aa の形のとき 2通り

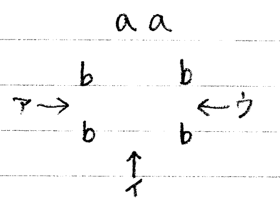
(ア) b + bbb



(イ) bb + bb



(iv) aa + a + a の形のとき 下のア, イ, ウから2つとって a, a を入れるとよい。$_3C_2=3$ 通り



(v) a + a + a + a の形のとき 1通り

よって 円順列は 10個

(2) 線対称は, a, a, b, b, の順列だから $\frac{4!}{2!2!}=\frac{4\cdot 3}{2}=6$ 通り

a	a
a	a
b	b
b	b

よって じゅず順列は $\frac{10-6}{2}+6=8$ 通り

問. $x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ のとき, $x^7+x^6+\cdots+x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^7}$ の値を求めよ

(解1) $a_n=x^n+\frac{1}{x^n}$ とおく。$a_{n+1}=x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)-\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)=a_n-a_{n-1}$

($\because x+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{2}{1-\sqrt{3}i}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{2(1+\sqrt{3}i)}{4}=1$) 以下, 次頁下

[類6] 白玉3個,黒玉6個,計9個の玉で,円順列,及びnecklaceは何種類できるか. 答 10, 7

(考) 黒玉6個をわけてみます. 白 a, a, a, 黒 b, b, b, b, b, b, とします. (i) 黒6個が連続なものを bbbbbb
(ii) 黒が5個と1個にわかれる場合 aaaaa + a とします. 以下---

(解) 白 a, a, a, 黒 b, b, b, b, b, b, とする. まず円順列からです.

(i) 黒全てをまとめて bbbbbb とすると 1コ.

(ii) b+bbbbb の場合 (a+aa) 2コ

(iii) bb+bbbb の場合 (ii)と同じようなことで 2コ

(iv) bbb+bbb の場合 (a+aa) 1コ

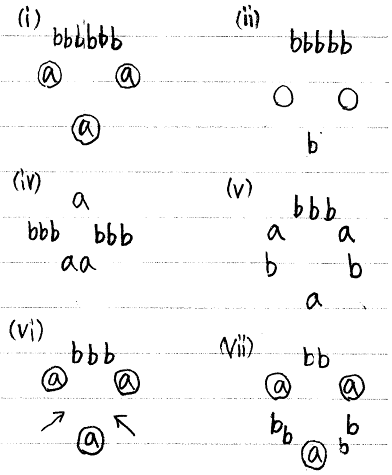
(V) b+b+bbbb (a+a+a) 1コ

(Vi) b+bb+bbb の場合 (a+a+a) 2コ

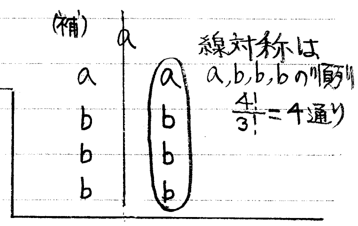
(Vii) bb+bb+bb の場合 右図より 1コ

以上より, 円順列は 1+2+2+1+1+2+1 = 10コ

necklaceは線対称が4コあるので $\frac{10-4}{2}+4=7$コ
(下補)



(補) a でわけても勿論できます. 線対称の数については, 右図(補)のように考えて,
a, b, b, b の並べかえで $\frac{4!}{3!}=4$コ



[類7] 白3, 黒7 の円順列とnecklaceの個数は? 答 12, 8

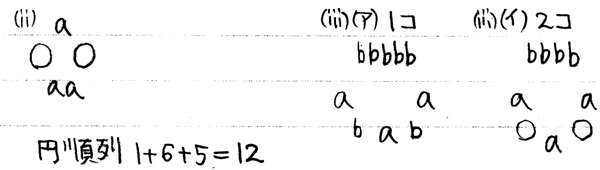
(解) (i) aaa の場合 $\boxed{1}$コ

(ii) a+aa の場合 $\boxed{6}$コ

(ア) b+bbbbbb 2コ

(イ) bb+bbbbb 2コ

(ウ) bbb+bbbb 2コ



円順列 1+6+5 = 12

(iii) a+a+a の場合 $\boxed{5}$コ

(ア) b+b+bbbbb 1コ

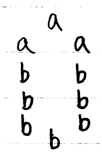
(イ) b+bb+bbbb 2コ

(ウ) b+bbb+bbb 1コ

(エ) bb+bb+bbb 1コ

(ア),(ウ),(エ)は同じ

線対称 --- abbb の並べかえで $\frac{4!}{3!}=4$ 通り



∴necklaceは $\frac{12-4}{2}+4=8$

前頁下の続き

$a_2=x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=1^2-2=-1$, $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ とおけば $S_{n+1}-(a_1+a_2)=S_n-a_1-S_{n-1}$

$S_{n+1}=S_n-S_{n-1}-1$ $(S_1=a_1=1, S_2=a_1+a_2=0)$ $S_3=S_2-S_1-1=0-1-1=-2$, $S_4=S_3-S_2-1=-2-0-1=-3$

$S_5=S_4-S_3-1=-3-(-2)-1=-2$, $S_6=S_5-S_4-1=-2-(-3)-1=0$, $S_7=S_6-S_5-1=0-(-2)-1=1$

(結局, 1, 0, −2, −3, −2, 0 の repeat になります.) P.155下に[別解]

185. (1) A, A, A, B, B, C, C の7文字を1列に並べるとき、全部で何通りの配列が考えられるか (2) (1)の配列のうちに同じ文字が隣り合わないものは何通りあるか (3) (1)の配列のうちに少なくとも2つのAが連続しているものは、何通りあるか

[考] (1) これができない人はいない筈です.

(2) B, Cについては対称ですから、(i) B, B, C, C, (ii) B, C, B, C, (iii) B, C, C, B の間にAを入れます.

(3) (i) AAAをひとまとめにして、B, B, C, C と並べる. → $\frac{5!}{2!2!}$

(ii) AA と A, B, B, C, C を並べて、AAA, B, B, C, C と AAA, B, B, C, C を引くと AAの並べ方

[解] (1) $\frac{7!}{3!2!2!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{2\cdot2}=7\cdot30=210$

(2) (i) $\cdot B^{\vee}B\cdot C^{\vee}C\cdot$ VにAは必ず入る. 残りの1つのAは・に入る. 3通り

(ii) $\cdot B\cdot C\cdot B\cdot C\cdot$ $_5C_3=\frac{5\cdot4}{2}=10$ 通り

(iii) $\cdot B\cdot C^{\vee}C\cdot B\cdot$ VにAは必ず入る. $_4C_2=\frac{4\cdot3}{2}=6$ 通り

よって Bから始まる並べ方は $3+10+6=19$ 通り

Cから始まる並べ方も同じように19通りだから. 求める個数は38通り

答	
	(1) 210
	(2) 38
	(3) 150

(3) (i) 3つのAが連続しているもの AAA, B, B, C, C $\frac{5!}{2!2!}=\frac{5\cdot4\cdot3}{2}=30$

(ii) 2つのAが連続しているもの AA, B, B, C, C, A $\frac{6!}{2!2!}-2\times30=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{2}-60=120$

求める個数は $30+120=150$ 通り

(AAA, と AAA は(i)とダブルのでこれを引く)

[別解] (3) (2)を利用して

3つのAが連続しているのは、(i), (ii), (iii) とも 5通り ∴ $5\times3=15$ 通り

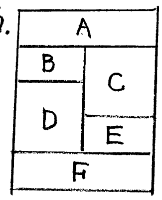
2つのAと1つのA (i), (ii), (iii) とも $_5C_2\times2=\frac{5\cdot4}{2}\cdot2=60$

よって (i), (ii), (iii) のとき $15+60=75$ 通り 対称性により Cから始まる (i), (ii), (iii) より

$75\times2=150$ 通り

[補] (2) 樹形図を使うと少々面倒ではありますが、できなくもありません。

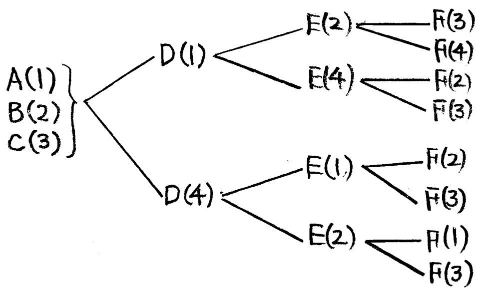
190. 右図のA～Fの6つの領域をぬり分ける. ただし, 隣接する領域は異なる色とする.
(1) 1,2,3,4の4色以内でぬり分ける方法は, 何通りあるか.
(2) 1,2,3,4の4色全てを用いてぬり分ける方法は何通りあるか.



[考] (1) 4色全てを用いる, 4色のうちの3色を用いる. ---- とすれば(2)となりますが ---
A,B,Cには4色のうちの3色が必要です. ($_4C_3$), A(1), B(2), C(3) として tree です.

(2) (1)のうち分けは, (i) 4色全てを使う (ii) 4色のうちの3色を使う のいずれかです.

[解] (1) A,B,Cに1,2,3,4の4色のうちの3色を選び($_4C_3$), 例えばA(1), B(2), C(3)としてtreeをかく.



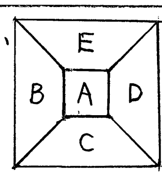
A(1), B(2), C(3)の並べかえが $3!=6$ 通りあるので
$_4C_3\times 6\times 8=4\times 48=192$

答	(1) 192通り (2) 168通り

(2) (1)のうち分けは (i) 4色全ての使う (ii) 4色のうちの3色を使う の2つの場合である.
(ii)は(1)のtreeより A(1) B(2) C(3) $\}$ − D(1) − E(2) − F(3) の場合であるから $_4C_3\times 3!=4\cdot 3\cdot 2=24$
よって $192-24=168$

[補] (2)は $_4C_3\times 3!\times 7=4\times 6\times 7=168$ でもよい.

191. 右図点対称な板を5つの異なる色全てを用いてぬり分ける方法は ア 通りあり,
4つの異なる色のうちのいくつかを用いてぬり分ける方法は イ 通りある. 但し
回転して同じものは同一とみなす.



[解] ア. Aのぬり方は5通り, 残り4色は円順列. よって $5\times(4-1)!=5\cdot 3\cdot 2=30$

イ. (i) 4色を用いる場合, 例えば 1,2,3,4,4 で A,B,C,D,E をぬる場合.
B,Dに4を用いて, Aに1を用いるとC,Eは2,3であり, 回転したら同一だから1通り. Aには,
2,3もあるから3通り. どの色を2回用いるかで4通りあるから, $3\times 4=12$ 通り
(ii) 3色を用いる場合, 例えば, 1,2,2,3,3 を用いる場合. Aは必ず1でなければならず,
(B,D)=(2,2), (C,E)=(3,3) と入れると回転しても同じなので1通り. (1,1,2,3,3)
(1,1,2,2,3) もあるので3通り. 4色のうち3色を選ぶ方法は $_4C_3=4$ 通り. ∴ $3\times 4=12$ 通り
したがって $12+12=24$ 通り

答	ア. 30 イ. 24

立方体のぬり分け

195. (1) 赤,紫,青,緑,黄,橙色の6色をそれぞれ1色ずつ.立方体の各面にぬる場合の数は□通り。

(2) (1)のうち互いに向き合う平行な面では常に赤と緑,青と橙色,そして黄と紫の組み合わせでなければならないとすると,場合の数は□通りである.

(3) 立方体の各面が全て異なる色となるようにぬり分けたい.7色の色があるとき,ぬり分け方は,□通りある.但し,回転させて重なり合うぬり分けは同一のぬり分けと考える.

(4) 立方体の6面を5色A,B,C,D,Eのうちのいくつかの色を用いてぬり分けるとき,何通りのぬり方があるか.但し,隣り合う面は色をかえるものとする.

(5) 立方体の各面に1から6の数字がかいてあり,区別がつくとする。各面を赤か青のいずれかにぬるとき,色のぬり方は何通りあるか

(6) 立方体の各面に数字がなく区別がつかないものとする.各面を赤か青のいずれかにぬる時,色の位置関係だけに注目すると,色のぬり方は何通りあるか.

(7) (6)と同じ条件で,赤と青と黄のうちの,ちょうど2色を用いてぬり分けるとき,色のぬり方は,何通りあるか

(8) 立方体の6面を2面は赤で,2面は青で,残りの2面は黄でぬり分ける方法は何通りあるか.

P.163の(9)下にも立方体のぬり分けがあります。

[解] (1) 上面を赤にぬり固定する.下面は残り5色のいずれかで,4つの側面は4色の円順列と考えればよいから,$5\times(4-1)!=5\cdot3\cdot2=30$

(2) 上面を赤に固定すると,下面は緑,側面の1つを青に固定してもOKであり,その対面は橙色,残り2つの側面を,黄,紫の2つでぬりことになり,2種類あるから,求める解は2通り

(3) 6色の選び方は${}_7C_6=7$通りある。(1)と同じように考えて $7\times30=210$通り

(4) (i) A,A,B,C,D,Eの形のとき(どの色を2回用いるかで5通りある) 上面をAにすれば下面は必ずAであり,側面はB,C,D,Eの円順列。上面,下面が同じAなので(左回り,右回りが同じ) $5\times\frac{(4-1)!}{2}=15$通り

(ii) A,A,B,B,C,Dの形のとき(5色のうちどの4色を用いるかで${}_5C_4=5$通りある) 上面をAにすれば下面は必ずA,側面の1つをBにすると,その対面は必ずB。CとDのぬり方 1通り
選び出した4色のうち,どの2つを2回用いるかで${}_4C_2=\frac{4\cdot3}{2}=6$ よって $1\times6\times5=30$通り

(iii) A,A,B,B,C,Cの形のとき(5色のうちどの3色を用いるかで${}_5C_3=\frac{5\cdot4}{2}=10$通り) 1通り
よって $10\times1=10$通り 求める解は(i)+(ii)+(iii)であり,$15+30+10=55$通り

(5) $2^6=64$ 通り

答	(1) 30	(2) 2	(3) 210
	(4) 55	(5) 64	(6) 10
	(7) 24	(8) 6	

(6) 赤=1, 青=2 とする.
(i) 1,1,1,1,1,1 でぬる場合 1通り
(ii) 1,1,1,1,1,2 でぬる場合 1通り
(iii) 1,1,1,1,2,2 でぬる場合
(ア) 互いに対面になるように2をぬる (イ) 2がとなりになるようにぬる
の2通り (ア)+(イ)
(iv) 1,1,1,2,2,2 でぬる場合
(ア) 互いに対面に2をぬり側面は1,1,1,2, 1通り
(イ) 上面2, 下面1, 側面に1,1,2,2 をぬる. 互いに対面に2,2をぬると(ア)と同じ
よって1通り
(ア)+(イ) = 2通り
(v) 1,1,2,2,2,2 は(iii)に同じ (vi) 1,2,2,2,2,2 は(ii)に同じ (vii) 222222は(i)に同じ
よって (i)+(ii)+(iii)+(iv)+(v)+(vi)+(vii) = 1+1+2+2+2+1+1 = 10 通り

(7) 1,2 を用いてぬりわけるのは, (6)の(i)と(vii)を除けばよいから 10−2=8通り
どの2色を用いるかで $_3C_2=3$ 通り ∴ $8\times3=24$ 通り

(8) 1,1,2,2,3,3 でぬり分ける.
(i) 互いに対面が同色のとき 1通り
(ii) 2つの対面が同色ということはなく, 1つの対面が同色の場合
例えば, 対面が1,1のとき 2と2, 3と3はとなりどうしであり 1通り
∴ $1\times3=3$ 通り
(iii) 対面どうしが全て異なるとき (1−2, 2−3, 3−1)
上1, 下2と決めると側面には, 左回りに2,3,3,1とぬるか 3,3,2,1とぬるかの2通り
よって (i)+(ii)+(iii) = 1+3+2 = 6 通り

問. 正n角形のn個の頂点から2個を選んで結ぶ線分を考える. このような線分は何本できるか. 更に, これらの線分から2本を選ぶとき正n角形の内部で交わっているものは何組あるか

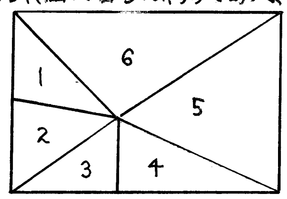
(解) $_nC_2=\underline{\dfrac{n(n-1)}{2}}$ (本)

n個の点から4個をとって4角形を作ると, 題意の線分の組は4角形の数に一致する
よって $_nC_4=\underline{\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}}$ (組)

[類1] 正5角柱の7つの面を異なる7つの色を全て使ってぬり分ける方法は何通りあるか。

(解) 7つの色から2色をとって、正5角形の2面をぬり、残り5色を円順列で5つの側面にぬる。(上下はないと見てよい) $\therefore {}_7C_2 \cdot 4! = \frac{7\cdot 6}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 42 \cdot 12 = \underline{504}$ (通り)

[類2] 右図の6つの3角形を異なる6色全てを用いてぬり分ける方法は $\boxed{ア}$ 通りあり、(図に番号はうってありません) 異なる6色のうち、異なる3色を選び出して、その3色全てを用いてぬり分ける方法は $\boxed{イ}$ 通りある。 A. ア 720 イ 1200

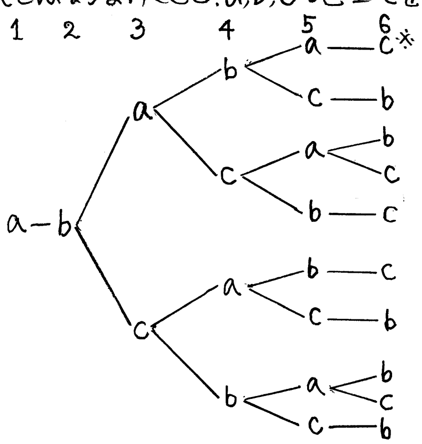


(考) (ア) 円順列ではありません。
(イ) 樹形図。3色全てを用いることと、treeの最後の色に注意。

(解) (ア) $6! = 720$

(イ) ${}_6C_3 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2} = 20$ 通りでまず3色の色を決める。a, b, c とする。右上図のように、3角形に1～6の番号をきめる。(元々、問題には番号はうってない)

番号1が a のとき番号2は b or c であり、$a-b$ のときを調べると $a-c$ も同様である。このとき番号6が a とはならないことと、a, b, c 3色全てを用いることに注意して、下 treeを作る。



※が b とすると a, b 2色になってしまいます。
よって $a-b$ は10通り、$a-c$ も10通り、
a から始まるのは20通り
b, c から始まるのもそれぞれ20通り
$\therefore 20\times 3 = 60$ 通り
さらに ${}_6C_3 = 20$ をかけて、求める個数は、$60\times 20 = 1200$

[類3] 立方体をとなり合った面の色は異なるようにぬり分ける。(1) 異なる5色をすべて用いる (2) 異なる4色を全て用いる。ときのぬり分けの方法は、それぞれ何通りあるか。 A. (1) 15 (2) 6

(解) (1) 異なる5色を1, 2, 3, 4, 5, として6面をぬり分ける。どの色を2面に使うかで、5通り。例えば、色1を2回使うとすれば、1, 1, 2, 3, 4, 5 でぬり分けることになる。1, 1は向かい合わせになる。4つの側面に2,3,4,5, をぬることになるが、2を固定すると、$3! = 6$ となるが、向かい合わせの1, 1に対しては、上下がなく、左回り、右回りを区別しなくてもよい。$\therefore \frac{3!}{2} = 3$ 通り よって、求める解は $3\times 5 = 15$ 通り

(2) P.182の(2)下