集合

集合のまとめ(具体的に、次の設提を交えながらまとめることにします。必要十分、命題など論理の基礎です。)

[設提] 全体集合Uを全ての正の整数、集合Aを1,3,5,7,9、集合Bを3,6,9とする。----Ⓣ

集合---ある条件のもとでまとまっているものの集まり。

集合のなかの1つ1つのものを要素(元)という。$x\in A$(xはAの要素)などと表す。

$-2\notin U$, $-2\notin A$, $-2\notin B$, $2\in U$, $2\notin A$, $2\notin B$, $1\in U$, $1\in A$, $1\notin B$, $3\in U$, $3\in A$, $3\in B$, $5\in U$, $5\in A$, $5\notin B$, $6\notin A$, $6\in B$,

$U=\{1,2,3,4,\cdots,n,\cdots\}=\{x\mid x$は全ての正の整数$\}$

$A=\{1,3,5,7,9\}=\{x\mid x=2n-1, n=1,2,3,4,5\}=\{x\mid x$は1以上9以下の奇数$\}=\{2n-1\mid n=1,2,3,4,5\}$

$B=\{3,6,9\}=\{x\mid x=3n, n=1,2,3\}=\{3n\mid n=1,2,3\}$

部分集合 Xのどの要素もYに含まれるとき、XはYの部分集合である。$X\subset Y$(XはYに含まれる)とかく。

Ⓣでは、$A\subset U$, $B\subset U$, $B\not\subset A$(6はBの要素であるがAの要素ではない。Bのどの要素もAに含まれているわけではない)

空集合ϕ---要素を1つももたない集合(全ての集合に空集合ϕ(ファイ)は存在します。)

部分集合の個数(空集合ϕも部分集合の1つです。)

(1) $A=\phi$注, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{9\}$, $\{1,3\}$, $\{1,5\}$, $\{1,7\}$, $\{1,9\}$, $\{3,5\}$, $\{3,7\}$, $\{3,9\}$, $\{5,7\}$, $\{5,9\}$, $\{7,9\}$

$\{1,3,5\}$, $\{1,3,7\}$, $\{1,3,9\}$, $\{1,5,7\}$, $\{1,5,9\}$, $\{1,7,9\}$, $\{3,5,7\}$, $\{3,5,9\}$, $\{3,7,9\}$, $\{5,7,9\}$

$\{1,3,5,7\}$, $\{1,3,5,9\}$, $\{1,3,7,9\}$, $\{1,5,7,9\}$, $\{3,5,7,9\}$　注. ϕは$\{\phi\}$とはかきません。ϕは部分集合の1つです。

$\{1,3,5,7,9\}$　以上 $1+5+10+10+5+1=32$(個)

(2) Aの異なる5個(1,3,5,7,9)の要素から、0個,1個,2個,3個,4個,5個とるそれぞれの組合せの総和だから、

(ア) ${}_5C_0+{}_5C_1+{}_5C_2+{}_5C_3+{}_5C_4+{}_5C_5=2\times({}_5C_0+{}_5C_1+{}_5C_2)=2\times(1+5+10)=32$ ($\because {}_nC_r={}_nC_{n-r}$)

(イ) 2項定理を用いると、$(x+1)^5={}_5C_0x^0+{}_5C_1x^1+{}_5C_2x^2+{}_5C_3x^3+{}_5C_4x^4+{}_5C_5x^5$ のxに$x=1$を代入して、

$2^5={}_5C_0+{}_5C_1+{}_5C_2+{}_5C_3+{}_5C_4+{}_5C_5$ $(=32)$です。

(ウ) 更に、異なる5個の要素1,3,5,7,9のそれぞれが部分集合に含まれるか、含まれないかの2つであることから$2^5=32$

真部分集合の個数　部分集合の個数から、全ての要素を含む場合の1個を引く。

Aの真部分集合の個数$=32-1=31$ ($A=\{1,3,5,7,9\}$の5個の要素全てをとる場合の1個の部分集合を引く。)

異なる要素がn個ある部分集合の個数は、上の(イ),(ウ)より、2^n個、真部分集合の個数は2^n-1個です。

ⓉのU,A,Bの関係---$A\subset U$(集合Aは集合Uに含まれる), $B\subset U$, $B\not\subset A$, $A\not\subset B$,

集合X=集合Yのときも$X\subset Y$ (or $Y\subset X$)です。従って、$X\subset Y$かつ$Y\subset X$のとき$X=Y$となります。

$X\subset Y$とは「$x\in X$ならば$x\in Y$」ということ。すなわち「$x\in X$をみたす任意のxが、$x\in Y$をみたしている」ということ。

和集合 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ または $x\in B\}=\{1,3,5,6,7,9\}$

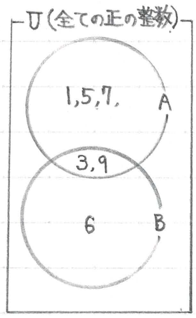
積集合(共通部分) $A\cap B=\{x\mid x\in A$ かつ $x\in B\}=\{3,9\}$

補集合 $\overline{A}=\{x\mid x\in U$ かつ $x\notin A\}=\{x\mid x$は1,3,5,7,9以外の全ての正の整数$\}$

$\overline{\overline{A}}=A$, $A\cup\overline{A}=U$, $A\cap\overline{A}=\phi$, $X\subset Y$ならば$\overline{X}\supset\overline{Y}$

交換、結合、分配、ド・モルガンの各法則については、教科書及び次頁以降参照。

Venn図



集合Xの要素の個数$n(X)$　右のVenn図から、$n(A)=5$, $n(B)=3$, $n(A\cap B)=2$, $n(A\cup B)=6$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=6$ などが成立することを確かめて下さい。

$n(\overline{A}\cap B)=1$ (6の1個です。) $n(\overline{A}\cup B)$=無数にある。(1,5,7以外の全ての正の整数の個数)

次頁以降に詳しくあります。索引参照。

Ⓣについては、$(A\cap B)\subset A$, $(A\cap B)\subset B$, $A\subset(A\cup B)$, $B\subset(A\cup B)$, $(A\cap B)\subset(A\cup B)$, $\overline{A}\cap B(=\overline{A}\cap\overline{\overline{B}}=\overline{A\cup\overline{B}})\subset B$ などもあります。

13.の④ 直角三角形ABC（$\angle A=90^\circ$, $AB=1$, $AC=2$）と直角三角形A'BC（$\angle A'=90^\circ$, $A'B=2$, $A'C=1$）を辺BCが一致するように重ね合わせる。ACとA'Bの交点をDとする。図形BCA'DAB（凹五角形）をBCを軸として回転してできる回転体の体積Vを求めたい。(1) 長さ2を右の長さとする。←- - - 2 - - -→ 題意の凹五角形を作図せよ。(2) 体積Vを求めよ。

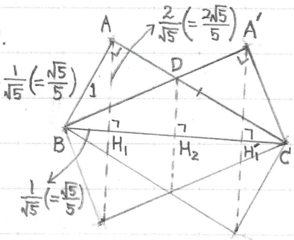
小は、$\angle A=90^\circ$, $AB=3$, $AC=4$, $\angle A'=90^\circ$, $A'B=4$, $A'C=3$ として解いて下さい。

[考] (1) BCを軸として回転するのだから、(2)のことも考えて、見やすくしましょう。[これでもカイ]で計算力UPの練習をします。

(2) 円錐台の体積は、「円錐 $-$（マイナス）円錐」で求めるか、「円錐の体積比」を利用するかです。計算は、複雑にならないように、考えましょう。

気付いておられる人もいるでしょうが、下段にある[Best解]をせずに、まず[これでもカイ]を必ずやって下さい。

[これでもカイ] (1) 右図（余分な線を消しましたが、コンパス、定規で作図しました。）



(2) 対称性から  をBH₂の回りに回転させた回転体の体積を求め2倍する。

($\triangle ABC \backsim \triangle H_1BA$)

三平方の定理より、$BC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt5$，相似を利用すると、$BH_1=AB\times\frac{1}{\sqrt5}=1\times\frac{1}{\sqrt5}=\frac{1}{\sqrt5}\left(=\frac{\sqrt5}{5}\right)$

$AH_1=BH_1\times\frac{2}{1}=\frac{2}{\sqrt5}\left(=\frac{2\sqrt5}{5}\right)$，$CH_2=\frac{BC}{2}=\frac{\sqrt5}{2}$，$CH_1=AH_1\times2=\frac{4}{\sqrt5}\left(=\frac{4\sqrt5}{5}\right)$

・$\triangle ABH_1$の回転体（円錐）$V_1=\pi\times\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)^2\times\frac{\sqrt5}{5}\times\frac13=\pi\times\frac45\times\frac{\sqrt5}{5}\times\frac13=\frac{4\sqrt5\pi}{3\times5^2}$

・台形AH_1H_2Dの回転体（円錐台）V_2について。

$\triangle AH_1C \backsim \triangle DH_2C$（相似比 $CH_1:CH_2=\frac{4\sqrt5}{5}:\frac{\sqrt5}{2}=\frac45:\frac12=\frac85:1=8:5$）より、体積比 $8^3:5^3$

$\triangle AH_1C$の回転体（円錐）：$\pi\times\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)^2\times\frac{4\sqrt5}{5}\times\frac13=\frac{4^2\sqrt5\pi}{3\times5^2}$

よって $V_2=\frac{4^2\sqrt5\pi}{3\times5^2}\times\frac{8^3-5^3}{8^3}$※ $=\frac{4^2\sqrt5\pi\times387}{3\times5^2\times(2\times4)^3}=\frac{4^2\sqrt5\times3\times129}{3\times5^2\times2^3\times4^3}\pi=\frac{129\sqrt5}{5^2\times2^3\times4}\pi$ ----①

したがって $V_1+V_2=\frac{4\sqrt5}{3\times5^2}\pi+\frac{129\sqrt5}{5^2\times2^3\times4}\pi=\frac{\sqrt5}{5^2}\pi\times\left(\frac43+\frac{129}{2^3\times4}\right)=\frac{\sqrt5}{5^2}\pi\times\left(\frac43+\frac{129}{32}\right)=\frac{\sqrt5}{5^2}\pi\times\frac{4\times32+3\times129}{3\times32}=\frac{\sqrt5}{5^2}\pi\times\frac{515}{3\times32}$

$=\frac{\sqrt5}{5^2}\times\frac{5\times103}{3\times32}\times\pi=\frac{103\sqrt5}{3\times32\times5}\pi$

よって求める体積は、$2(V_1+V_2)=\frac{2\times103\sqrt5}{3\times32\times5}\pi=\frac{103\sqrt5}{3\times16\times5}\pi=\underline{\frac{103\sqrt5}{240}\pi}$

答	(1) 上図 (2) $\frac{103\sqrt5}{240}\pi$

※(補1) $8^3-5^3=512-125=387$ ですが、高校になると $8^3-5^3=(8-5)(8^2+8\times5+5^2)=3\times(64+40+25)=3\times129$ のように、計算できて、3の因数が見えてます。君の計算力はどうでしたか？ここで、[Best解]をやってみることにしましょうか！

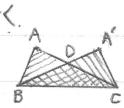
(補2) V_2を円錐 $-$（マイナス）円錐で計算してみます。$DH_2=CH_2\times\frac12=\frac{\sqrt5}{2}\times\frac12=\frac{\sqrt5}{4}$

$V_2=\pi\times\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)^2\times\frac{4\sqrt5}{5}\times\frac13-\pi\times\left(\frac{\sqrt5}{4}\right)^2\times\frac{\sqrt5}{2}\times\frac13=\frac{4^2\sqrt5}{3\times5^2}\pi-\frac{5\sqrt5}{4^2\times2\times3}\pi=\frac{\sqrt5}{3}\pi\times\left(\frac{4^2}{5^2}-\frac{5}{4^2\times2}\right)=\frac{\sqrt5}{3}\pi\times\frac{4^4\times2-5^3}{5^2\times4^2\times2}$

$=\frac{\sqrt5}{3}\pi\times\frac{512-125}{5^2\times4^2\times2}=\frac{387\sqrt5}{3\times5^2\times4^2\times2}\pi=\frac{3\times129\sqrt5}{3\times5^2\times4^2\times2}=\frac{129\sqrt5}{5^2\times4^2\times2}$ $\left(=\frac{129\sqrt5}{5^2\times4\times2\times4}=\frac{129\sqrt5}{5^2\times2^3\times4}\right.$ となり①と同じ$\left.\right)$

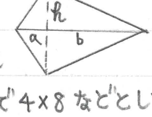
となって、この方法が良いかも、--- 8^3-5^3は出てこないが、4^4が出てきました。分母は、積のままで、計算すると、分子との約分ができる場合に便利です。計算も因数分解の形を用いましょう。

[Best解] $\triangle ABC$と$\triangle A'BC$を単独に回転させ2つの体積の和から、doubleで計算した$\triangle DBC$の回転体の体積をひく。



求める体積 $=\left\{\pi\times\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)^2\times\sqrt5\times\frac13\right\}\times2-\pi\times\left(\frac{\sqrt5}{4}\right)^2\times\sqrt5\times\frac13=\frac{8\sqrt5\pi}{5\times3}-\frac{5\sqrt5\pi}{4^2\times3}=\frac{\sqrt5\pi}{3}\times\left(\frac85-\frac{5}{4^2}\right)$

$=\frac{\sqrt5\pi}{3}\times\frac{8\times4^2-5^2}{5\times4^2}=\frac{\sqrt5\pi\times103}{3\times5\times4^2}=\underline{\frac{103\sqrt5}{240}\pi}$（この方法は是非とも覚える）



の体積 $=\pi\times h^2\times(a+b)\times\frac13$

[これでもカイ]と[Best解]の差、大変なことです。しかし、[これでもカイ]の計算は、今、中3のstageで、身につけておくことです。先日、小6生に $2^2, 2^3, 2^4, \cdots, 2^{25}$ まで、順にかけて、（途中で 4×8 などとしてはいけない）、答を出せと、やってもらいました。途中、間違ったら答が出ません。ウサギとカメです。計算力は、「確実に」が先であることを教訓とします。

[類1] 本題の凹五角形BCA'DABの面積を求めよ.

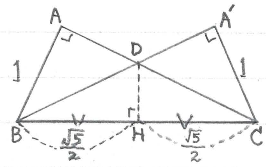
(解) DからBCに垂線DHをおろす. 対称性から, BH＝CH

三平方の定理より, $BC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, $CH=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

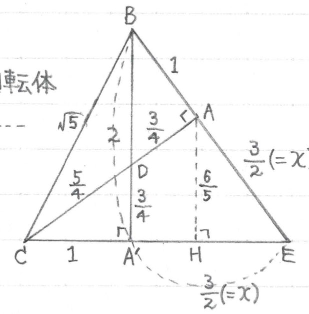
$\triangle ABC \backsim \triangle HDC$ から, $DH=CH\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$

したがって 凹五角形 $=\triangle ABC+\triangle A'BC-\triangle BCD=2\triangle ABC-\dfrac{1}{2}\times BC\times DH$

$=2\times\left(1\times2\times\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\dfrac{\sqrt{5}}{4}=2-\dfrac{5}{8}=\underline{\underline{\dfrac{11}{8}}}$



[類2] 本題で, CA'を軸として, 凹五角形BCA'DABを回転したときの体積 $V_{CA'}$ を求めよ.



(考) 直線BAと直線CA'の交点をEとして, △BCEの回転体－図形ADA'E(四角形ADA'E)の回転体としますか? いろいろありそうですが---- 本題の[Best解], [類1] などを参考にして, ---- CE(＝BE), AH などを求めるには, ----

(解) 図のように, 点E, 点H, をとり, $V_{CA'}=\triangle BCE$の回転体$(V_1)-\triangle ACE$の回転体$(V_2)+\triangle DCA'$の回転体(V_3)として求める. 対称性から, △BCEは二等辺三角形. $A'E=AE=x$ とすると, 直角三角形BA'Eに三平方の定理を用いて, $(x+1)^2=x^2+2^2$　$2x=3$　$x=\dfrac{3}{2}$

$\triangle BA'E \backsim \triangle AHE$ より, $AH=AE\times\dfrac{BA'}{BE}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{1+\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2\times2}{\left(1+\frac{3}{2}\right)\times2}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2\times2}{2+3}=\dfrac{6}{5}$

$\triangle ACE \backsim \triangle A'CD$ より, $DA'=CA'\times\dfrac{EA}{CA}=1\times\dfrac{\frac{3}{2}}{2}=\dfrac{3}{4}$, $V_1=\pi\times BA'^2\times CE\times\dfrac{1}{3}=\pi\times2^2\times\dfrac{5}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{10\pi}{3}$

$V_2=\pi\times AH^2\times CE\times\dfrac{1}{3}=\pi\times\left(\dfrac{6}{5}\right)^2\times\dfrac{5}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{6\pi}{5}$, $V_3=\pi\times DA'^2\times CA'\times\dfrac{1}{3}=\pi\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\times1\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{3\pi}{16}$

よって, 求める体積 $V_{CA'}=V_1-V_2+V_3=\dfrac{10\pi}{3}-\dfrac{6\pi}{5}+\dfrac{3\pi}{16}=\dfrac{50\pi-18\pi}{15}+\dfrac{3\pi}{16}=\dfrac{32\pi}{15}+\dfrac{3\pi}{16}=\dfrac{32\times16-3\times15}{15\times16}\pi=\underline{\dfrac{557}{240}\pi}$

((考)のようにすると少々, It's a bother.)

(補) $BD=BA'-DA'=2-\dfrac{3}{4}=\dfrac{5}{4}$ です. $DA=DA'=\dfrac{3}{4}$ ですから, △DABは $DA:AB:BD=\dfrac{3}{4}:1:\dfrac{5}{4}=3:4:5$ の直角三角形.
△DABと相似(or合同)である, △DA'C, △AHC, △EAC, △EHA, △EA'B も全て3:4:5です. 面白いですねぇ～.
辺の長さを求める方法として, 三平方の定理, 相似, を用いました. 三平法の定理は二乗の計算です. 数字が大きくなると, troublesome になることも珍しくありません. 簡単に求まることを確かめながら用いることとします.
ACを軸として回転させると, △CA'Dが外に少しとび出して, 面倒そうですねぇ～. try してみる?

「このように, 1つの問題を解くにしても, いろいろと自分なりに考えてみることが, 君の数学力を高めます. しかしながら, 現実的には, 高校に入ると, そうはいきません. 小学から中学2, 3年迄に, そのような勉強法を取り入れていたかです. 高校へ入っても, 応用が効くような問題の解き方をしたかです. 良問は, 深く考え, 暗記するものは, 暗記しなければなりません. 数学は, 暗記ではないと思い込んで, 高校へ進学し, 入学後もそれを続ける人がいます. よほどの人(中には, 天才的な数学の考え方をもっている人もいますが, そのような方は, 是非とも, 数学発展に尽くしてもらいたいものです.)でない限り, 必ず, 高校数学の壁につきあたり, 成績が落ちてきます. 長年(40年ぐらい?), 教えていると, 中学までは, めだってできる方ではなかったが, 高校へ入って急に伸びてくる人もいます. 中学迄の勉強の仕方が良かった人です. 逆に, 高校へ入って, はじめのうち(大体11月～12月までか?)は, どうにか, 成績も良かったが, 1月, 2月頃に実施される, 難関大(含む医学科)模擬試験で, 思うような成績がとれなくなっている自分に気付くのです. 設問のレベルが上がってくるからです. そのようにならないような勉強をしてください.」