x, y 実数とする．$x^2+y^2=1$ のとき (1) $x+y=a$，(2) $xy=b$ の最大値，最小値とそのときの (x, y) の値を求めよ．

単に，解を得ることを目的としません．高3は，少なくとも5つの解，高2は少なくとも4つの解，高1は少なくとも2つの解が，できるでしょうか．．．．高1では，学んでいるジャンルが少ないので，さまざまなジャンルで解を作ることは，困難です．高2，高3になると，多岐にわたり，解法を考えることができるようになります．さまざまなジャンルでの解法を身につけること，これが，入試攻略の1つの秘訣です．例えば，2020，一橋大第3問はvectorの問題ではありますが，結局は，以下，本問のいずれかの解に帰着できます．(尤も，vectorでの内容が理解できていることが，先決ではあります．)本題を[解1]から[解8]順に解説していきますが，最終的に，高2，3でしたら，これらの解法[解1]から[解7]を全て暗記して下さい．高1は，新しいジャンルを学習した後は，次々と加えて暗記していって下さい．根本的な間違いはないとは思っていますが，もしも，ありましたら，御一報下さい．

答	
(1)	a の最大値 $\sqrt{2}$　$(x, y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき
	a の最小値 $-\sqrt{2}$　$(x, y)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき
(2)	b の最大値 $\frac{1}{2}$　$(x, y)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 複号同順 のとき
	b の最小値 $-\frac{1}{2}$　$(x, y)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 複号同順 のとき

[考1] 一文字消去，判別式の利用，グラフの利用，

[解1] (1) $x^2+y^2=1$ ---① $x+y=a$ ---② ②より $y=a-x$ ---②′ ②′を①に代入 $x^2+(a-x)^2=1$

$2x^2-2ax+a^2-1=0$ ---③ ③で x の実数解が存在すれば，②′に入れて y の実数解も存在する．

よって ③の判別式 $\frac{D}{4} \geqq 0$ $a^2-2(a^2-1) \geqq 0$ $a^2-2 \leqq 0$ $(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2}) \leqq 0$ $\therefore -\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{2}$

最小値 $a=-\sqrt{2}$ のとき ③より※ $x=\frac{a}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ②′に代入 $y=-\sqrt{2}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(x, y)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき

(※ $a=-\sqrt{2}$ を①，②に入れる必要はありません．③より $x=\frac{a \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{2}$，$\frac{D}{4}=0$ です．)

最大値 $a=\sqrt{2}$ のとき ③より $x=\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ②′に代入 $y=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(x, y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき

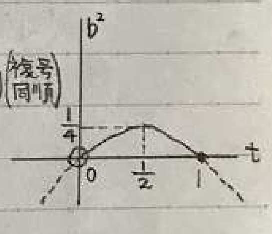
(2) $x^2+y^2=1$ ---① $xy=b$ ---②

(i) ②より $x \neq 0$ のとき $y=\frac{b}{x}$ これを①に代入 $x^2+\frac{b^2}{x^2}=1$ $x^4-x^2+b^2=0$ ---③ ①より $y^2=1-x^2 \geqq 0$ $0 \leqq x^2 \leqq 1$

$x \neq 0$ ときだから $0<x^2 \leqq 1$ ---④ ③における x の実数解 (x^2 も実数解) が④の範囲に少なくとも1つ存在する条件として捉える．$x^2=t$ とおけば，$t^2-t+b^2=0$ $(0<t \leqq 1)$ $b^2=-t^2+t=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ $(0<t \leqq 1)$ のグラフをたて軸 b^2，よこ軸 t で考える(右図) $0 \leqq b^2 \leqq \frac{1}{4}$ であればよい．$\therefore -\frac{1}{2} \leqq b \leqq \frac{1}{2}$

最大値 $b=\frac{1}{2}$ のとき $t=x^2=\frac{1}{2}$ $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ($x \neq 0$ に適) $y=\frac{\frac{1}{2}}{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ $(x, y)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (複号同順)

最小値 $b=-\frac{1}{2}$ のとき $t=x^2=\frac{1}{2}$ $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ $y=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$ $(x, y)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (複号同順)



(ii) ②より $x=0$ のとき ①より $y=\pm 1$，$b=0$ であるが，これが最大 最小となることはない．

[考2] 絶対不等式の利用 対称性があるものには有効です．Black Vol. I. P248の(7)解3)に用いました．(難問ですが…)

$x^2+y^2 \geqq 0$ (等号成立は $x=y=0$ のとき)，$(x+y)^2 \geqq 0$ (等号成立は $x+y=0$ のとき)，$(x-y)^2 \geqq 0$ (等号成立は $x=y$ のとき) など

$x^2+y^2+z^2 \geqq 0$ (等号成立は $x=y=z=0$ のとき) $(x \pm y \pm z)^2 \geqq 0$ (等号成立は $x \pm y \pm z=0$ のとき，複号任意)

$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\frac{1}{2}\left\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\} \geqq 0$ (等号成立は $x=y=z$ のとき) ----Ⓐ

$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=\frac{1}{2}\left\{(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\right\} \geqq 0$ (等号成立は $x=y=z=0$ のとき)

Ⓐは，よく用いられます．y に $-y$，z に $-z$ を入れたりしても OK です．

Black Vol. I. P.565. [解3] などは，あっさりしたものです．

絶対不等式と与えられた条件式を利用して，解くのだから，等号成立が非常に大切なことになります．

[解2] $x+y=a$, $xy=b$, $x^2+y^2=1$ $(x+y)^2-2xy=1$ $a^2-2b=1$ ---Ⓐ

$(x+y)^2\geqq 0$ は必ず成立する。(等号成立は $x+y=0$ のとき)

$x^2+y^2+2xy\geqq 0$ $1+2b\geqq 0$ $b\geqq -\frac{1}{2}$

最小値 $b=-\frac{1}{2}$ のとき $x+y=0$ ---① $xy=-\frac{1}{2}$ ---② $x^2+y^2=1$ ---③ (①,②,③全てをみたす x,y の存在を示す)

①,②より $(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}})$ 複号同順 (これは③をみたす)

$(x-y)^2\geqq 0$ は必ず成立する (等号成立は $x-y=0$ のとき)

$x^2+y^2-2xy\geqq 0$ $1-2b\geqq 0$ $b\leqq\frac{1}{2}$

最大値 $b=\frac{1}{2}$ のとき $x-y=0$ ---④ $xy=\frac{1}{2}$ ---⑤ $x^2+y^2=1$ ---⑥ (④,⑤,⑥全てをみたす x,y の存在を示す)

④,⑤より $(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ 複号同順 (これは⑥をみたす)

$b\geqq -\frac{1}{2}$ のときⒶより $b=\frac{a^2-1}{2}\geqq -\frac{1}{2}$ $a^2\geqq 0$ (次に $b\leqq\frac{1}{2}$ のときを考えた後で $a=0$ を考えることにする)

$b\leqq\frac{1}{2}$ のときⒶより $b=\frac{a^2-1}{2}\leqq\frac{1}{2}$ $a^2-2\leqq 0$ $-\sqrt{2}\leqq a\leqq\sqrt{2}$

最大値 $a=\sqrt{2}$ のとき $x-y=0$ ---⑦ $x+y=\sqrt{2}$ ---⑧ $x^2+y^2=1$ ---⑨ (このとき $b=xy=\frac{1}{2}$ は当然成立です)

⑦,⑧より $(x,y)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ これは⑨をみたす。

最小値 $a=-\sqrt{2}$ のとき $x-y=0$ ---⑩ $x+y=-\sqrt{2}$ ---⑪ $x^2+y^2=1$ ---⑫ (このとき $b=xy=\frac{1}{2}$ は当然成立です)

⑩,⑪より $(x,y)=(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ これは⑫をみたす。

ここで、$b\geqq -\frac{1}{2}$ のときの $a=0$ は考えなくてよいことがわかった。

[考3] $1=x^2+y^2$, $x^2\geqq 0$, $y^2\geqq 0$ ですから、相加相乗平均の関係より、--- a は $b=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}$ のグラフがわかりやすいが---

とすれば、[解2]もグラフを利用すればよかったですが、数式だけによる解も大切です。

[解3] $x^2\geqq 0$, $y^2\geqq 0$ だから相加相乗平均の関係より。$1=x^2+y^2\geqq 2\sqrt{x^2y^2}=2|xy|$ 等号成立は $x^2=y^2$ ---① のとき

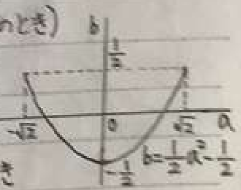
$|xy|\leqq\frac{1}{2}$ $\therefore -\frac{1}{2}\leqq xy(=b)\leqq\frac{1}{2}$

最大値 $b=\frac{1}{2}$ のとき $xy=\frac{1}{2}$ ---② $x^2+y^2=1$ ---③ ①,③より $(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ 複号任意であるが、

②をみたすのは $(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ 複号同順のとき (① and ② and ③のとき)

最小値 $b=-\frac{1}{2}$ のとき $xy=-\frac{1}{2}$ ---④ ①,③より $(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ 複号任意であるが

④をみたすのは、$(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}})$ 複号同順のとき (① and ③ and ④のとき)



$x^2+y^2=1$ より $a^2-2b=1$ $b=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}$ 右グラフより $-\frac{1}{2}\leqq b\leqq\frac{1}{2}$ となる a の範囲は $-\sqrt{2}\leqq a\leqq\sqrt{2}$

最大値 $a=\sqrt{2}$ のとき $x+y=\sqrt{2}$, $xy=\frac{1}{2}$ $t^2-\sqrt{2}t+\frac{1}{2}=(t-\frac{1}{\sqrt{2}})^2\overset{※}{=}0$ の解が x,y $\therefore (x,y)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ のとき

最小値 $a=-\sqrt{2}$ のとき $x+y=-\sqrt{2}$, $xy=\frac{1}{2}$ $t^2+\sqrt{2}t+\frac{1}{2}=(t+\frac{1}{\sqrt{2}})^2\overset{※}{=}0$ の解が x,y $\therefore (x,y)=(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ のとき

※は、解と係数の関係からです。

更に、3つの解をかくことができますか

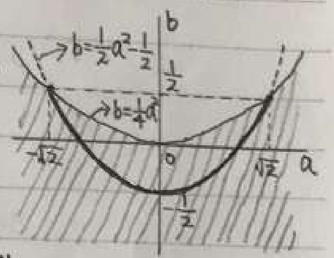
ここまでの解どれか1つの解で、できたでしょうか。3つの解法を全て言えますか。難問にも対応できる実力をつけるには、解を得ることを目的と

[解4]からの解法を入れてmixした解も作れます。次の[解4]は、有名ですね。

せず、内容をしっかりと理解、暗記することも必要なことです。

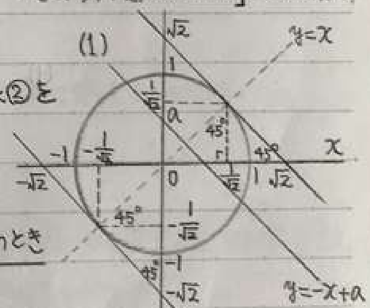
[考4] $x+y=a$, $xy=b$. 解と係数の関係より、x, y は 2次式 $t^2-at+b=0$ の実数解 ∴判別式 $D\geqq0$ が必要です.
下に[考4']あります.

[解4] $x+y=a$, $xy=b$ $x^2+y^2=1$ より $(x+y)^2-2xy=1$ ∴$a^2-2b=1$ $b=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}$ ---①
解と係数の関係より. x, y は, 2次式 $t^2-at+b=0$ の実数解 よって判別式 $D\geqq0$ $a^2-4b\geqq0$ $b\leqq\frac{1}{4}a^2$ ---②
たて軸 b, よこ軸 a で ① and ② を図示する.(右図,太線部となる.)



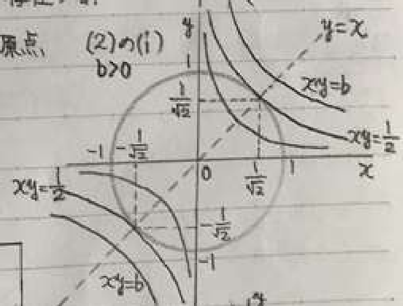
最大値 $a=\sqrt{2}$ $x+y=\sqrt{2}$, $xy=\frac{1}{2}$ のときだから $t^2-\sqrt{2}t+\frac{1}{2}=(t-\frac{1}{\sqrt{2}})^2=0$ の解が x, y.
$(x,y)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ のとき
最小値 $a=-\sqrt{2}$ $x+y=-\sqrt{2}$, $xy=\frac{1}{2}$ のときだから $t^2+\sqrt{2}t+\frac{1}{2}=(t+\frac{1}{\sqrt{2}})^2=0$ の解が x, y
$(x,y)=(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ のとき
最大値 $b=\frac{1}{2}$ $xy=\frac{1}{2}$, $x+y=\pm\sqrt{2}$ のときだから $t^2\pm\sqrt{2}t+\frac{1}{2}=(t\pm\frac{1}{\sqrt{2}})^2=0$ の解が x, y
$(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ 複号同順 のとき
最小値 $b=-\frac{1}{2}$ $xy=-\frac{1}{2}$, $x+y=0$ のときだから $t^2-\frac{1}{2}=0$ $t=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
$(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}})$ 複号同順のとき

[考5] 図形と方程式, 難関大は,このジャンルと他のジャンルを融合した問題が多いです.奥が深いジャンルです.
特に文系は,さまざまな角度から,取り組まなければなりません. $xy=b(>0)$ は, $y=x$ に対称で b が大きくなるにつれて,原点0から遠ざかっていきます.数式+図形なので,目で見て考えることができます.「中高のかけはし」P23の(3),(4).

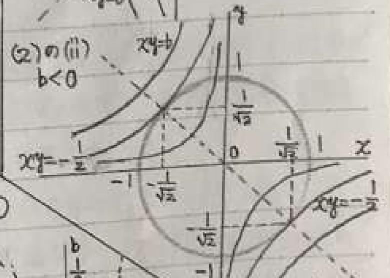


[解5] (1) 円: $x^2+y^2=1$ ---① $x+y=a$ $y=-x+a$ ---② 傾き-1, y切片 a である直線②を
平行移動させ,円①と共通点をもつような, a の範囲を考える.共通点をもてば,
実数 x, y が存在し,実数 a も存在する. 45°, 45°, 90° の3角形の比 $1:1:\sqrt{2}$ を利用
すると, 最大値 $a=\sqrt{2}$, $(x,y)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ のとき, 最小値 $a=-\sqrt{2}$ $(x,y)=(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ のとき

(2) 円: $x^2+y^2=1$ ---① $xy=b$ ---② $b=0$ となる $(x,y)=(\pm1,0),(0,\pm1)$ として存在する.
(i) $b>0$ のとき 双曲線②は,直線 $y=x$ に対称であり, b が大きくなるにつれて,原点,
から遠ざかっていくグラフである.円①との共有点を考えると,
最大値 $b=\frac{1}{2}$ $(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ 複号同順のとき
(ii) $b<0$ のとき (i)と同様に 最小値 $b=-\frac{1}{2}$ $(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}})$ 複号同順のとき



[考4'] 対称式は $x+y=a$, $x-y=c$ でも表すことができます.判別式は----
[解4'] $x+y=a$, $x-y=c$, (a, c 実数)とおき. 2乗して辺々引けば, $4xy=a^2-c^2$
$xy=\frac{a^2-c^2}{4}$ (=bとおく). 解と係数の関係より, x, y は 2次式 $t^2-at+\frac{a^2-c^2}{4}=0$
の実数解であるが,判別式 $D=a^2-4\cdot\frac{a^2-c^2}{4}=c^2\geqq0$ は常に成立し,判別式は
考えなくてよい. $x^2+y^2=1$ より, $(x+y)^2-2xy=1$ $a^2-2\cdot\frac{a^2-c^2}{4}=1$ ∴$a^2+c^2=2$ ---①
①より, $c^2=2-a^2\geqq0$ ∴$-\sqrt{2}\leqq a\leqq\sqrt{2}$ ---② ①より $c^2=2-a^2$ を $b=\frac{a^2-c^2}{4}$ に代入
$b=\frac{a^2-(2-a^2)}{4}=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}$ ②の範囲では $-\frac{1}{2}\leqq b\leqq\frac{1}{2}$ 以下[解4]に同じ.



[考6] 3角関数 $x=\cos\theta,\ y=\sin\theta.\ (0\leqq\theta<2\pi)$

[解6] $x=\cos\theta.\ y=\sin\theta.\ 0\leqq\theta<2\pi$ とおく.

(1) $a=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$ $\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<2\pi+\frac{\pi}{4}$ $-1\leqq\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\leqq1$

最大値 $a=\sqrt{2}$ $\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ $\theta=\frac{\pi}{4}$ すなわち $(x,y)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ のとき

最小値 $a=-\sqrt{2}$ $\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$ $\theta=\frac{5}{4}\pi$ すなわち $(x,y)=(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ のとき

(2) $b=\sin\theta\cos\theta=\frac{\sin2\theta}{2}$ $0\leqq2\theta<4\pi$ $-1\leqq\sin2\theta\leqq1$

最大値 $b=\frac{1}{2}$ $2\theta=\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+2\pi,$ $\theta=\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}+\pi,$ $(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ 複号同順のとき

最小値 $b=-\frac{1}{2}$ $2\theta=\frac{3}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi+2\pi$ $\theta=\frac{3}{4}\pi,\frac{3}{4}\pi+\pi$ $(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}})$ 複号同順のとき

[考7] vector $\vec{p}=(x,y).\ \vec{q}=(1,1)$ 内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を2通りで表し等号で結ぶ、(2) $1=x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(\vec{p}\cdot\vec{q})^2-2xy$

[解7] $\vec{p}=(x,y),\ \vec{q}=(1,1)$ とおく.

(1) $\vec{p}\cdot\vec{q}=x\cdot1+y\cdot1=a$, 一方 $\vec{p}\cdot\vec{q}=\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}\cos\theta=\sqrt{2}\cos\theta$ ($\because x^2+y^2=1$, θは、$\vec{p},\vec{q}$のなす角 $0\leqq\theta\leqq\pi$)

$a=\sqrt{2}\cos\theta$

最大値 $a=\sqrt{2}$ $\vec{p},\vec{q}$のなす角 $\theta=0$ $\vec{p}=k\vec{q},\ k>0$ $\binom{x}{y}=k\binom{1}{1}=\binom{k}{k}$ $x^2+y^2=1$ に代入 $2k^2=1$ $k>0$ $\therefore k=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$(x,y)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ のとき

最小値 $a=-\sqrt{2}$ $\vec{p},\vec{q}$のなす角 $\theta=\pi$. $\vec{p}=k\vec{q},\ k<0$ $\binom{x}{y}=k\binom{1}{1}=\binom{k}{k}$ $x^2+y^2=1$ に代入 $2k^2=1$ $k<0$ $\therefore k=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$(x,y)=(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ のとき

(2) $1=x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(\vec{p}\cdot\vec{q})^2-2b$ $b=\frac{1}{2}(\vec{p}\cdot\vec{q})^2-\frac{1}{2}$ (1)より $-\sqrt{2}\leqq\vec{p}\cdot\vec{q}\leqq\sqrt{2}$ $0\leqq|\vec{p}\cdot\vec{q}|\leqq\sqrt{2}$ $0\leqq(\vec{p}\cdot\vec{q})^2\leqq2$

最大値 $b=\frac{1}{2}\cdot2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ $\vec{p}\cdot\vec{q}=\pm\sqrt{2}$ $\theta=0,\pi$ $\binom{x}{y}=k\binom{1}{1}$ $x^2+y^2=1$ に代入 $2k^2=1$ $k=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ 複号同順のとき

最小値 $b=\frac{1}{2}\cdot0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ $\vec{p}\cdot\vec{q}=0$ $\theta=\frac{\pi}{2}$ $\vec{q}=\binom{1}{1}$ と $\frac{\pi}{2}$ の角をなすvectorは $\binom{1}{-1}$ or $\binom{-1}{1}$ $\left(\left(\binom{1}{1}\binom{1}{-1}=0,\ \binom{1}{1}\binom{-1}{1}=0\right)\right)$

$\vec{p}=t\binom{1}{-1}$ のとき $|\vec{p}|=1$ より $1=|t|\left|\binom{1}{-1}\right|=\sqrt{2}|t|$ $t=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ (これは $\binom{-1}{1}$ も含んでいる)

$(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}})$ 複号同順のとき

(補) $\vec{p},\vec{q}$のなす角 $\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ は、左回りを正と決めている訳ではありません.

以上、[解1]〜[解7]、順追って解法が言えますか、更に、それぞれの解をかくことができますか、難問ができる人、数学ができる人は、これができる人です。数学もある意味では暗記なのです。ただ、量が多いことは、確かです。大数学者は、天才です。そのようなまねはできない。彼が、発想し、作り上げたものを、我々は、ありがたぁ〜く頂戴いたしましょう。
東大はじめ、難関を目指す人は、5割得点することを目指しなさい。7割、8割などなかなか、とれるものではありません。
ましてや、他の科目もあります。しかしながら、得点差が大きくなるのが数学です。数学攻略が、医学科及び難関大学合格の秘訣です。次に[解8]として、理系微積をかいてみました。このような解をする人は、いないでしょうが、興味ある事実が、うかんできます。

80の(3)②

[考察] 実際に、この問題を、このように解く人はいないでしょうが、興味ある事実がわかります. 理系数楼です.

[解2] (1) $y=a-x$　$x^2+(a-x)^2=1$　$(a-x)^2=1-x^2$　$a-x=\pm\sqrt{1-x^2}$　$a=x+\sqrt{1-x^2}$ …① or $a=x-\sqrt{1-x^2}$ …②

$a=x+\sqrt{1-x^2}$ の a に $-a$, x に $-x$ を入れると、$-a=-x+\sqrt{1-(-x)^2}$ ∴ $a=x-\sqrt{1-x^2}$ よって ①, ② は原点対称

$f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$ とおき、グラフをかく. 定義域 $-1\leqq x\leqq 1$　$f'(x)=1+\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$-1<x<1$ の範囲で $f'(x)=0$ を解けば、 により、$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

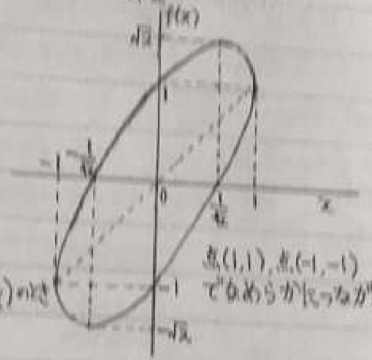
増減表

x	-1	…	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	…	1
$f'(x)$	╳	$+$	0	$-$	╳
$f(x)$	-1	↗	$\sqrt{2}$	↘	1

極大値 $f(\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}$

$\lim_{x\to -1+0} f'(x)=+\infty$

$\lim_{x\to 1-0} f'(x)=-\infty$



よって、原点対称を考えて、$y=x\pm\sqrt{1-x^2}$ のグラフは右の様

したがって、最大値 $a=\sqrt{2}$　$(x, y)=(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ のとき. 最小値 $a=-\sqrt{2}$ $(x, y)=(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ のとき

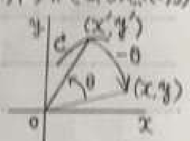
(2) [解1] の(2)と同様になります.

[補] これでは面白くないので、もう少し考えましょう. どうも上の曲線は楕円らしいですね. 上解の ① or ② すなわち、$x^2+(a-x)^2=1$ の a を y にかえると、曲線 C : $x^2+(y-x)^2=1$ …㋐ は楕円? 展開すると $2x^2-2xy+y^2-1=0$

実数 x についての判別式 $\frac{D}{4}\geqq 0$　$y^2-2(y^2-1)\geqq 0$　$y^2-2\leqq 0$ ∴ $-\sqrt{2}\leqq y\leqq\sqrt{2}$,　$y^2-2xy+2x^2-1=0$ の実数 y についての判別式 $\frac{D}{4}\geqq 0$　$x^2-(2x^2-1)\geqq 0$　$x^2-1\leqq 0$ ∴ $-1\leqq x\leqq 1$ すなわち x, y には、どちらにもハサマレル制限があります. グラフは限られた平面内に存在するということですが、3つの2次曲線、放物線、楕円、双曲線のうち、おそらく、楕円でしょう. それでは、㋐ のグラフを標準形にしてみましょう.

㋐ の x に $-x$, y に $-y$ を入れると、$(-x)^2+\{(-y)-(-x)\}^2=1$　$x^2+(-y+x)^2=1$ ∴ $x^2+(y-x)^2=1$ となり、元の ㋐ と同じになるから、グラフは原点対称です. (その1)(その2) 2つの方法で標準形と焦点を求めます. もう1つかきました (その3)

(その1) ㋐ 上の点 (x', y') を原点のまわりに $-\theta$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ だけ回転した点を (x, y) とする.



点 (x, y) を原点のまわりに θ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ 回転させると点 (x', y') となる.

$(x+yi)(\cos\theta+i\sin\theta)=x'+y'i$　$(x\cos\theta-y\sin\theta)+(x\sin\theta+y\cos\theta)i=x'+y'i$

$x'=x\cos\theta-y\sin\theta$, $y'=x\sin\theta+y\cos\theta$　点 (x', y') は、曲線 C : $x^2+(y-x)^2=1$ 上の点だから

$x'^2+(y'-x')^2=1$ が成り立ち、これに、上の x', y' を代入して x, y の関係を作れば、これが回転したときの式となる. $(x\cos\theta-y\sin\theta)^2+\{(x\sin\theta+y\cos\theta)-(x\cos\theta-y\sin\theta)\}^2=1$

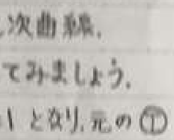
$(x\cos\theta-y\sin\theta)^2+\{x(\sin\theta-\cos\theta)+y(\sin\theta+\cos\theta)\}^2=1$　左辺を展開したときの xy の係数が、0 となるように θ を定めると標準形が得られる.

xy の係数 $=-2\sin\theta\cos\theta+2(\sin\theta-\cos\theta)(\sin\theta+\cos\theta)=-\sin 2\theta+2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)$

$=-\sin 2\theta-2\cos 2\theta=0$　$2\cos 2\theta=-\sin 2\theta$ ∴ $\tan 2\theta=-2$ ($\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$ ということです)

x^2 の係数 $=\cos^2\theta+(\sin\theta-\cos\theta)^2=\cos^2\theta+1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}+1-\sin 2\theta=\frac{1}{2}\cos 2\theta-\sin 2\theta+\frac{3}{2}$

$\tan 2\theta=-2$, $\sin 2\theta>0$, $\cos 2\theta<0$ より、$\sin 2\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos 2\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$



したがって、x^2 の係数 $=\frac{1}{2}(-\frac{1}{\sqrt{5}})-\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}-\frac{5}{2\sqrt{5}}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{2}{3+\sqrt{5}}$

次頁に続く.

y^2の係数 $=\sin^2\theta+(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1-\cos2\theta}{2}+1+\sin2\theta=-\dfrac{1}{2}\cos2\theta+\sin2\theta+\dfrac{3}{2}$

$=-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt5}\right)+\dfrac{2}{\sqrt5}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2\sqrt5}=\dfrac{3+\sqrt5}{2}=\dfrac{2}{3-\sqrt5}$

よって、標準形は $\left(\dfrac{2}{3+\sqrt5}\right)x^2+\left(\dfrac{2}{3-\sqrt5}\right)y^2=1$, $\dfrac{x^2}{\frac{3+\sqrt5}{2}}+\dfrac{y^2}{\frac{3-\sqrt5}{2}}=1$, $\sqrt{\dfrac{3+\sqrt5}{2}}=\sqrt{\dfrac{6+2\sqrt5}{4}}=\dfrac{\sqrt5+1}{2}$, $\sqrt{\dfrac{3-\sqrt5}{2}}=\sqrt{\dfrac{6-2\sqrt5}{4}}=\dfrac{\sqrt5-1}{2}$, だから、

$\dfrac{x^2}{\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)^2}=1$ となって、確かに、長径がx軸上にある楕円です。

さて、次に、曲線C：$x^2+(y-x)^2=1$ の焦点Fの座標を求めてみましょう。標準形の焦点の正のx座標は、

$\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt5+1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt5-1}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt5+1}{2}+\dfrac{\sqrt5-1}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt5+1}{2}-\dfrac{\sqrt5-1}{2}\right)}=\sqrt{\sqrt5}$ したがって F(x, y)は、原点のまわりにθ回転させて

$x+yi=(\sqrt{\sqrt5}+0\cdot i)(\cos\theta+i\sin\theta)=\sqrt{\sqrt5}\cos\theta+i\sqrt{\sqrt5}\sin\theta$

$x=\sqrt{\sqrt5}\cos\theta=\sqrt{\sqrt5}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{2\sqrt5(\sqrt5+1)}}=\dfrac{2}{\sqrt{2(\sqrt5+1)}}=\sqrt{\dfrac{4}{2(\sqrt5+1)}}=\sqrt{\dfrac{\sqrt5-1}{2}}$

$y=\sqrt{\sqrt5}\sin\theta=\sqrt{\sqrt5}\cdot\dfrac{\sqrt5+1}{\sqrt{2\sqrt5(\sqrt5+1)}}=\sqrt{\dfrac{\sqrt5+1}{2}}$

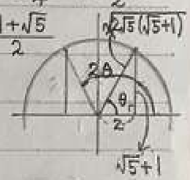
したがって曲線C：$x^2+(y-x)^2=1$ の焦点は $\left(\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt5-1}{2}}, \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt5+1}{2}}\right)$ 複号同順

$\tan2\theta=-2=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ $-1+\tan^2\theta=\tan\theta$

$\tan^2\theta-\tan\theta-1=0$ θは$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$の範囲にあるから $\tan\theta=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$

$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{2\sqrt5(\sqrt5+1)}}$

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt5+1}{\sqrt{2\sqrt5(\sqrt5+1)}}$



$(\sqrt5+1)^2+2^2=10+2\sqrt5$
$=2\sqrt5(\sqrt5+1)$

(その2) 曲線C：$x^2+(y-x)^2=1$ は原点対称のグラフである。楕円であると仮定する。

原点を通る直線ℓ：$y=mx$ とし、曲線Cとの2つの交点のうちx座標αが正である交点を$P(\alpha, m\alpha)$とする。

OPの長さが、最大、最小となる傾きmの値を求める。

$x^2+(y-x)^2=1$ に $y=mx$ を代入 $x^2+(mx-x)^2=1$ $x^2(1+(m-1)^2)=1$ $x^2=\dfrac{1}{m^2-2m+2}=\alpha^2$

$OP^2=\alpha^2+(m\alpha)^2=\alpha^2(m^2+1)=\dfrac{m^2+1}{m^2-2m+2}=f(m)$ とおく。$f'(m)=\dfrac{1}{(m^2-2m+2)^2}\{2m(m^2-2m+2)-(2m-2)(m^2+1)\}$

$f'(m)=\dfrac{2m^3-4m^2+4m-2m^3-2m+2m^2+2}{(m^2-2m+2)^2}=\dfrac{-2m^2+2m+2}{(m^2-2m+2)^2}=\dfrac{-2(m^2-m-1)}{(m^2-2m+2)^2}$ $f'(m)=0$ のとき $m=\dfrac{1\pm\sqrt5}{2}=m_1, m_2$

$m_1^2=m_1+1$, $m_2^2=m_2+1$, $(m_1<m_2)$

増減表

m	$\cdots$	$\frac{1-\sqrt5}{2}$ m_1	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt5}{2}$ m_2	$\cdots$
$f'(m)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(m)$	↘	$f\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)$	↗	$f\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)$	↘

極小値 $f\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)=f(m_1)=\dfrac{m_1^2+1}{m_1^2-2m_1+2}=\dfrac{(m_1+1)+1}{(m_1+1)-2m_1+2}=\dfrac{m_1+2}{-m_1+3}$

$=\dfrac{\frac{1-\sqrt5}{2}+2}{-\frac{1-\sqrt5}{2}+3}=\dfrac{1-\sqrt5+4}{-1+\sqrt5+6}=\dfrac{5-\sqrt5}{5+\sqrt5}=\dfrac{\sqrt5-1}{\sqrt5+1}=\dfrac{(\sqrt5-1)^2}{4}$

極大値 $f\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)=f(m_2)=\dfrac{m_2+2}{-m_2+3}=\dfrac{\frac{1+\sqrt5}{2}+2}{-\frac{1+\sqrt5}{2}+3}=\dfrac{5+\sqrt5}{5-\sqrt5}=\dfrac{\sqrt5+1}{\sqrt5-1}=\dfrac{(\sqrt5+1)^2}{4}$

したがって、極大値 $\dfrac{(\sqrt5+1)^2}{4}=\left(\dfrac{\sqrt5+1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{長径}{2}\right)^2$、極小値 $\dfrac{(\sqrt5-1)^2}{4}=\left(\dfrac{\sqrt5-1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{短径}{2}\right)^2$ であることがわかった。

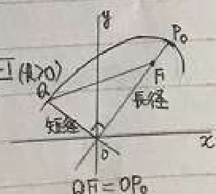
標準形は $\dfrac{x^2}{\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)^2}=1$ である。

次に曲線C：$x^2+(y-x)^2=1$ の焦点の座標を求める。長径の傾きはm_2だから $y=m_2x$ 上に焦点Fは存在する。

右図 $\overrightarrow{OF}=k\begin{pmatrix}1\\m_2\end{pmatrix}$ $(k>0)$ 三平方の定理より、$|\overrightarrow{OF}|^2=QF^2-OQ^2=OP_0^2-OQ^2=\dfrac{(\sqrt5+1)^2}{4}-\dfrac{(\sqrt5-1)^2}{4}=\sqrt5$

$k^2\left(1+\left(\dfrac{\sqrt5+1}{2}\right)^2\right)=\sqrt5$, $k^2\left(\dfrac{10+2\sqrt5}{4}\right)=\sqrt5$, $k^2\left(\dfrac{5+\sqrt5}{2}\right)=\sqrt5$ $k^2\left(\dfrac{\sqrt5+1}{2}\right)=1$ $k^2=\dfrac{2}{\sqrt5+1}=\dfrac{\sqrt5-1}{2}$ $k=\sqrt{\dfrac{\sqrt5-1}{2}}$ $(k>0)$

$km_2=\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt5+1}}\cdot\dfrac{\sqrt5+1}{2}=\sqrt{\dfrac{\sqrt5+1}{2}}$ $\therefore F=(k, km_2)=\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt5-1}{2}}, \sqrt{\dfrac{\sqrt5+1}{2}}\right)$



よって、求める曲線Cの焦点は $\left(\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt5-1}{2}}, \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt5+1}{2}}\right)$ 複号同順

(補) 原点を極とする極方程式にすると $(r(\theta))^2\left(\dfrac{1}{2}\cos2\theta-\sin2\theta+\dfrac{3}{2}\right)=1$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ が得られ、破線部の最大、最小を求めることにより、$r(\theta)$の最大、最小が求まります。(その1)で求めたように $\tan2\theta$ の値も得られ、(その2)との融合形みたいな解もできます。

意欲ある方は、やってみて下さい。この方法もいいですねぇ〜、やはり、がきましょう。次頁(その3)です。

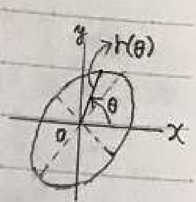
[解1]から[解7]は、理解、暗記です。[解8]は意外な展開となりましたが、数学力をつけるとは、このようなことなのです。

設問形式にしておきました.(理系,80の(3)⑨下は文理共通)

(その3) 楕円C: $x^2+(y-x)^2=1$ (1)対称性をのべ,原点を極とする極方程式を求む (2)楕円Cの焦点の座標を求む

(かい)(1) xに$-x$, yに$-y$を同時に入れても同じ式になるから,楕円Cは,原点対称である.

$x=r(\theta)\cos\theta,\ y=r(\theta)\sin\theta$ (対称性から,$0\leqq\theta\leqq\pi$ とおく.)



$(r(\theta)\cos\theta)^2+(r(\theta)\sin\theta-r(\theta)\cos\theta)^2=1$ $\{r(\theta)\}^2\{\cos^2\theta+(\sin\theta-\cos\theta)^2\}=1$

波線部$=0$ となるθは存在しないので $\{r(\theta)\}^2=\dfrac{1}{\cos^2\theta+(\sin\theta-\cos\theta)^2}$

波線部$=\cos^2\theta+1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1+\cos2\theta}{2}+1-\sin2\theta=\dfrac12\cos2\theta-\sin2\theta+\dfrac32$

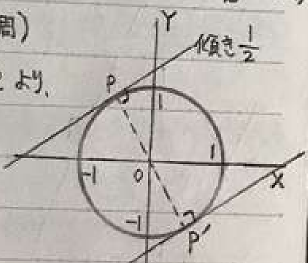
よって $r(\theta)=\dfrac{\sqrt2}{\sqrt{\cos2\theta-2\sin2\theta+3}}$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$

(2) 楕円Cは,$r(\theta)$が最大のとき$\dfrac{長径}{2}$,最小のとき$\dfrac{短径}{2}$となる.

分母の根号の中$=\cos2\theta-2\sin2\theta+3=k$ とおいて,kの最小値を求める.(このとき$r(\theta)$は最大であり,$\dfrac{長径}{2}$となる)

$\cos2\theta=X,\ \sin2\theta=Y$ とおくと,$Y=\dfrac12X+\dfrac{3-k}{2}$, $X^2+Y^2=1$, ($0\leqq2\theta\leqq2\pi$ より,円は全周)

$\dfrac{3-k}{2}$ の最大値(このときkは最小)は,右図点Pで接するときであるから,OPの傾き-2より,

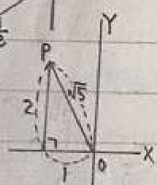


P:$(X,Y)=(\cos2\theta,\sin2\theta)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt5},\dfrac{2}{\sqrt5}\right)$ のとき $\dfrac{3-k}{2}$ は最大値をとる. ----①

$\dfrac{3-k}{2}\leqq Y-\dfrac12X=\sin2\theta-\dfrac12\cos2\theta=\dfrac{2}{\sqrt5}-\dfrac12\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt5}\right)=\dfrac{\sqrt5}{2}$ $\therefore k\geqq3-\sqrt5$

したがって $r(\theta)$の最大値$=\dfrac{長径}{2}=\dfrac{\sqrt2}{\sqrt{3-\sqrt5}}=\sqrt{\dfrac{2}{3-\sqrt5}}=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt5}{2}}=\sqrt{\dfrac{6+2\sqrt5}{4}}=\dfrac{\sqrt5+1}{2}$

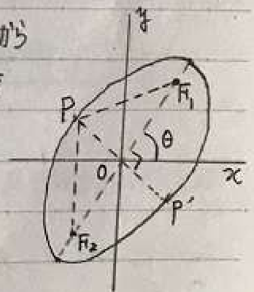
kの最大値(このとき$r(\theta)$は最小であり,$\dfrac{短径}{2}$となる)は,右図点P'で接するときであるから,OP'の傾き-2より,P':$(X,Y)=(\cos2\theta,\sin2\theta)=\left(\dfrac{1}{\sqrt5},-\dfrac{2}{\sqrt5}\right)$のとき$\dfrac{3-k}{2}$は最小値をとる.



$\dfrac{3-k}{2}\geqq Y-\dfrac12X=\sin2\theta-\dfrac12\cos2\theta=-\dfrac{2}{\sqrt5}-\dfrac12\cdot\dfrac{1}{\sqrt5}=-\dfrac{\sqrt5}{2}$ $\therefore k\leqq3+\sqrt5$

したがって $r(\theta)$の最小値$=\dfrac{短径}{2}=\dfrac{\sqrt2}{\sqrt{3+\sqrt5}}=\sqrt{\dfrac{2}{3+\sqrt5}}=\sqrt{\dfrac{3-\sqrt5}{2}}=\sqrt{\dfrac{6-2\sqrt5}{4}}=\dfrac{\sqrt5-1}{2}$

求める2つの焦点F_1,F_2は長径上にある.長径の方向vectorの1つは,①のときの$(\cos2\theta,\sin2\theta)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt5},\dfrac{2}{\sqrt5}\right)$から求められる$(\cos\theta,\sin\theta)$ $((\cos\theta>0,\sin\theta>0))$であるから



$\overrightarrow{OF_1}=k\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ とおける.一方 $|\overrightarrow{OF_1}|^2=\underset{(3平方による)}{PF_1^2-OP^2}=\left(\dfrac{長径}{2}\right)^2-\left(\dfrac{短径}{2}\right)^2=\left(\dfrac{3+\sqrt5}{2}\right)-\left(\dfrac{3-\sqrt5}{2}\right)=\sqrt5$

よって $|\overrightarrow{OF_1}|=\left|k\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\right|=\sqrt{\sqrt5}$ $|k|=\sqrt{\sqrt5}$ $k=\pm\sqrt{\sqrt5}$ $\therefore \overrightarrow{OF_1}=\pm\sqrt{\sqrt5}(\cos\theta,\sin\theta)$

$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos2\theta}{2}=\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt5}}{2}=\dfrac{\sqrt5-1}{2\sqrt5}$ $\cos\theta>0$ より $\cos\theta=\sqrt{\dfrac{\sqrt5-1}{2\sqrt5}}$

$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos2\theta}{2}=\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt5}}{2}=\dfrac{\sqrt5+1}{2\sqrt5}$ $\sin\theta>0$ より $\sin\theta=\sqrt{\dfrac{\sqrt5+1}{2\sqrt5}}$

求める焦点の座標は $\pm\sqrt{\sqrt5}\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt5-1}{2\sqrt5}},\sqrt{\dfrac{\sqrt5+1}{2\sqrt5}}\right)=\left(\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt5-1}{2}},\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt5+1}{2}}\right)$ 複号同順

(補) x軸に長径をもつ標準形は $\dfrac{x^2}{\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)^2}=1$ ですから,この焦点$(\pm\sqrt{\sqrt5},0)$を求めて,θ回転の方が,troublesomeでない?

2次曲線 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ のとき,特殊な場合,例えば,因数分解できて,2つの直線を表す,などを除いて,判別式があります.記憶にとどめておいて損はしないでしょう.

・$b^2-4ac>0$ のとき双曲線 ・$b^2-4ac=0$のとき放物線 ・$b^2-4ac<0$ のとき楕円

証明は,回転させて,標準形にすることによりできます. $a(x+p)^2+b(x+p)(y+q)+c(y+q)^2+k=0$ とおいてしまうと $aX^2+bXY+cY^2+k=0$ の形にすることができます.意欲ある人は,やってみて下さい.

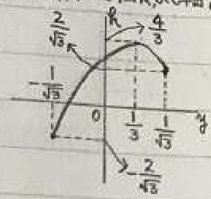
[類1] $x^2+3y^2=1$ のとき x^2+2y の最大値,最小値とそのときの x,y の値を求めよ.

(解) $x^2+3y^2=1$ ---①, $x^2+2y=k$ ---② とおく.①より $x^2=1-3y^2$ を②に代入 $k=(1-3y^2)+2y=-3(y-\frac{1}{3})^2+\frac{4}{3}$ ---③

$x^2=1-3y^2\geqq 0$　$3y^2-1\leqq 0$　$\therefore -\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq y\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}$ ---④ のとき実数 x が存在する.④の範囲で③のグラフを考える.(たて軸k,よこ軸y)

最大値 $\frac{4}{3}$　$y=\frac{1}{3}$ のとき $x=\pm\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$　$(x,y)=\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{1}{3}\right)$ のとき

最小値 $-\frac{2}{\sqrt{3}}$　$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $x=0$　$(x,y)=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ のとき



[類2] $x^2+xy-y^2=1$ のとき x^2+y^2 の最大値,最小値があれば求めよ.そのときの x,y の値も示せ(文系は最小値のみでよい)

(解) $x^2+xy-y^2=1$　$y^2-xy+1-x^2=0$　$y=\frac{1}{2}(x\pm\sqrt{5x^2-4})$, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}(x+\sqrt{5x^2-4})=+\infty$ $\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}(x+\sqrt{5x^2-4})=\lim_{\substack{t\to\infty\\(x=-t)}}\frac{1}{2}(-t+\sqrt{5t^2-4})=\right.$

$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{-4t^2+4}{-t-\sqrt{5t^2-4}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{-4t+\frac{4}{t}}{-1-\sqrt{5-\frac{4}{t^2}}}=+\infty$,原点対称により,$\left.\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2}(x-\sqrt{5x^2-4})=-\infty\right)$ よって x^2+y^2 は x が大きくなると y も大きくなり最大値はない

下限 $x^2+xy-y^2=1$ ---①　$x^2+y^2=k$ ---② とおく.①より $(x,y)\neq(0,0)$ ので $k>0$ が必要.

$x=\sqrt{k}\cos\theta$, $y=\sqrt{k}\sin\theta$, $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおけば,これは②をみたす.①に代入し,実数 θ が存在するような,$k(>0)$ を調べる.

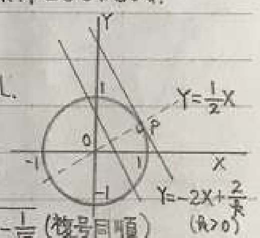
$k\cos^2\theta+k\cos\theta\sin\theta-k\sin^2\theta=1$　$k\cos 2\theta+\frac{k\sin 2\theta}{2}=1$　$k(2\cos 2\theta+\sin 2\theta)=2$　$2\cos 2\theta+\sin 2\theta=\frac{2}{k}(>0)$

更に $\cos 2\theta=X$, $\sin 2\theta=Y$ とおき,$X^2+Y^2=1$ のとき $Y=-2X+\frac{2}{k}$ $(k>0)$ が,実数解 X,Y をもつ条件として捉える.

右図,点Pで接するとき,$Y=\frac{1}{2}X$ と $X^2+Y^2=1$ の交点は,$X^2+\frac{1}{4}X^2=1$　$\frac{5}{4}X^2=1$　$X>0, Y>0$ より $P\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

したがって,このときの Y 切片 $\frac{2}{k}=2X+Y=\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$, $0<\frac{2}{k}\leqq\sqrt{5}$ であれば,(X,Y) が存在し,θ が存在し,

更に x,y が存在する.したがって $k\geqq\frac{2}{\sqrt{5}}$ であり,最小値は $\frac{2}{\sqrt{5}}$



このとき $X=\cos 2\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $Y=\sin 2\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$　$2\cos^2\theta-1=\frac{2}{\sqrt{5}}$　$\cos^2\theta=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{5}}$　$\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{5}}}$

$2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}>0$ より,$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の正負は一致する.$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}$　$\therefore\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}}$ (複号同順)

$$\left.\begin{aligned}&\text{よって } x=\sqrt{k}\cos\theta=\sqrt{\tfrac{2}{\sqrt{5}}}\left(\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{\sqrt{5}}}\right)=\pm\sqrt{\tfrac{2}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right)}=\pm\sqrt{\tfrac{1}{\sqrt{5}}+\tfrac{2}{5}}=\pm\sqrt{\tfrac{\sqrt{5}+2}{5}}\ (\text{複号同順})\\&y=\sqrt{k}\sin\theta=\sqrt{\tfrac{2}{\sqrt{5}}}\left(\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{\sqrt{5}}}\right)=\pm\sqrt{\tfrac{2}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right)}=\pm\sqrt{\tfrac{1}{\sqrt{5}}-\tfrac{2}{5}}=\pm\sqrt{\tfrac{\sqrt{5}-2}{5}}\end{aligned}\right\}\text{のとき最小値 }\frac{2}{\sqrt{5}}$$

(補) $x^2+xy-y^2=1$ は,原点対称な双曲線です.円の半径 $\sqrt{k}$ が $+\infty$ まで大きくなるのは当然です.理系微積的に言えば,

$\sqrt{k}=r(\theta)$ は,原点を極とする極方程式であり,$\{r(\theta)\}^2$ の最小値を求めていることと同じです.

(問) $0\leqq\theta<2\pi$, $\cos 2\theta\geqq 0$, $\sin 2\theta\geqq 0$ のとき $\cos\theta$, $\sin\theta$ を $\cos 2\theta$ で表せ

カイ. $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$　$\therefore\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$　$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta>0$ だから,$\cos\theta$, $\sin\theta$ の正負は一致する.

$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$　$\therefore\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}$　$\cos\theta$ と $\sin\theta$ は複号同順

$\frac{\sqrt{5}}{2}x^2-\frac{\sqrt{5}}{2}y^2=1$ なる双曲線が得られ,

結局,$x^2+xy-y^2=1$ を P.80 の(3)⑤の(その1)のように回転させ標準形にすると,$(\cos\theta,\sin\theta)=\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{5}}},\pm\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}}\right)$

円:$x^2+y^2=(\sqrt{k})^2$ との交点を考え,$\sqrt{k}\geqq\sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}}}$　$k\geqq\frac{2}{\sqrt{5}}$ となります.$\left(\pm\sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}}},0\right)$ を　「最小値を求めよ」でしょうから,

だけ回転させると,最小値 $\frac{2}{\sqrt{5}}$ をとるときの (x,y) の座標が得られます.文系的には,をみたす実数 x,y が存在する条件

lim を除いた上のような(解)となります.(別解)として,$x^2+xy-y^2=1$, $x^2+y^2=k$　$x\neq 0$ から x^2 でわって

だから,$k>0$ が必要で,定数項消去を考えて,$k(x^2+xy-y^2)=k=x^2+y^2$　$(k+1)y^2-kxy-(k-1)x^2=0$　Pardon me.

$\frac{y}{x}=t$ とおけば,$(k+1)t^2-kt-(k-1)=0$　t は実数,$k+1>0$,判別式 $D\geqq 0$ より $k\geqq\frac{2}{\sqrt{5}}$,この解が最速Best.

(解2) 前頁の Pardon me. です。

$x^2+xy-y^2=1$ …① $x^2+y^2=k$ …② $(x,y)\neq(0,0)$ から $k>0$

①より $y^2-xy-x^2+1=0$ $y=\frac{1}{2}(x\pm\sqrt{5x^2-4})$ ⊕の方だけ考えると x が大きくなるにつれて, y も大きくなり最大値は

ない。①×k−② より $(k-1)x^2+kxy-(k+1)y^2=0$ …③ ①より, $x=0$ ならば $-y^2=1$ となり不合理 ∴$x\neq0$

③の両辺を $x^2(\neq0)$ でわると, $(k-1)+k\left(\frac{y}{x}\right)-(k+1)\left(\frac{y}{x}\right)^2=0$ $\frac{y}{x}=m$ とおけば $(k+1)m^2-km-(k-1)=0$ …④

$k>0$ であったから, $k+1\neq0$ m は実数だから, ④の判別式 $D\geqq0$ $k^2+4(k+1)(k-1)\geqq0$ $5k^2-4\geqq0$ $k>0$ だから $k\geqq\frac{2}{\sqrt5}$

したがって k は最小値 $\frac{2}{\sqrt5}$ をとる。このときの (x,y) の値を求める。これ以降の $k=\frac{2}{\sqrt5}$ である。④から解の公式より,

$m=\frac{k}{2(k+1)}$ (∵$D=0$) $y=\frac{k}{2(k+1)}x$ …⑤ と $x^2+y^2=k$ …⑥ を解く。⑤の方向vectorは $(2(k+1),k)$ だから $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}2(k+1)\\k\end{pmatrix}$

$x=2(k+1)t$, $y=kt$ を⑥に代入, $4(k+1)^2t^2+k^2t^2=k$ $t^2(5k^2+8k+4)=k$ $t=\pm\sqrt{\dfrac{k}{5k^2+8k+4}}=\pm\sqrt{\dfrac{k}{8k+8}}$ (∵$k=\frac{2}{\sqrt5}$)

$x=\pm2(k+1)\sqrt{\dfrac{k}{8(k+1)}}=\pm\sqrt{\dfrac{4(k+1)^2k}{8(k+1)}}=\pm\sqrt{\dfrac{(k+1)k}{2}}=\pm\sqrt{\dfrac{k^2+k}{2}}=\pm\sqrt{\dfrac{\frac45+\frac{2}{\sqrt5}}{2}}=\pm\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt5}{10}}=\pm\sqrt{\dfrac{2+\sqrt5}{5}}$

$y=\pm k\sqrt{\dfrac{k}{8(k+1)}}=\pm\sqrt{\dfrac{k^2\cdot k}{8(k+1)}}=\pm\sqrt{\dfrac{\frac45\cdot\frac{2}{\sqrt5}}{8(\frac{2}{\sqrt5}+1)}}=\pm\sqrt{\dfrac{\frac{1}{5\sqrt5}}{\frac{2}{\sqrt5}+1}}=\pm\sqrt{\dfrac{\frac15}{2+\sqrt5}}=\pm\sqrt{\dfrac{1}{5(\sqrt5+2)}}=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt5-2}{5}}$ $(x,y)=\left(\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt5+2}{5}},\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt5-2}{5}}\right)$ (複号同順)

(補) (x,y) の値を求める方法として, directに $y=(\sqrt5-2)x$ を代入しても大した計算ではないでしょう。しかしながら, P.80の(3)①

(その3) で $x^2+y^2=k=\{r(\theta)\}^2$ が最大, 最小をとる (x,y) の値となると, 大変な計算です。(上の方法で最大, 最小はeasyですが)

(補) 問 (文理共通) $2x^2-2xy+y^2=1$ のとき x^2+y^2 の最大値とそのときの (x,y) の値を求めよ。最小値は, それだけでよい。

(解) $2x^2-2xy+y^2=1$ …① $x^2+y^2=k$ …② とおく。$(x,y)\neq(0,0)$ から $k>0$

①×k−② より, $(2k-1)x^2-2kxy+(k-1)y^2=0$ $x\neq0$ のとき両辺を x^2 でわって $(2k-1)-2k\left(\frac{y}{x}\right)+(k-1)\left(\frac{y}{x}\right)^2=0$ …③

($x=0$ のとき ①より $y=\pm1$ よって ②より $k=1$ なる値が存在する) $\frac{y}{x}=m$ とおけば, ③は $(k-1)m^2-2km+(2k-1)=0$ …③′

(i) $k=1$ のとき $-2m+1=0$ $m=\frac12$ $\frac{y}{x}=\frac12$ と $x^2+y^2=1$ を解けば, $x^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=1$ $\frac{5x^2}{4}=1$ $x^2=\frac45$ $x=\pm\frac{2}{\sqrt5}$ $y=\pm\frac{1}{\sqrt5}$ ($x\neq0$ に適)

(以上のことから, $(x,y)=(0,\pm1)$, $\left(\pm\frac{2}{\sqrt5},\pm\frac{1}{\sqrt5}\right)$ (複号同順), のとき $k=1$ なる値が存在することがわかる。)

(ii) $k\neq1$ のとき ③′は, 実数 m の2次方程式であり, 実数 m が存在する条件は, 判別式 $\frac{D}{4}\geqq0$ $k^2-(k-1)(2k-1)\geqq0$

$k^2-3k+1\leqq0$ $\frac{3-\sqrt5}{2}\leqq k\leqq\frac{3+\sqrt5}{2}$ $0<\frac{3-\sqrt5}{2}<1<\frac{3+\sqrt5}{2}$ なので k の最小値は $\frac{3-\sqrt5}{2}$, k の最大値は $\frac{3+\sqrt5}{2}$

k が最大値 $\frac{3+\sqrt5}{2}$ をとるときの (x,y) の値を求める。これ以降の $k=\frac{3+\sqrt5}{2}$ とする。$k^2-3k+1=0$ $k^2=3k-1$ …⑦

③′より $m=\frac{k}{k-1}$ (∵解の公式より, $D=0$) $x^2+y^2=k$ …②′ と $y=mx=\frac{k}{k-1}x$ …④ を連立して解く。(途中⑦を用いて

次数下げを行う) ④は $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}k-1\\k\end{pmatrix}$ (方向vector$(k-1,k)$) とおけるから, $x=(k-1)t$, $y=kt$ を②′に代入すると

$(k-1)^2t^2+k^2t^2=k$ $(2k^2-2k+1)t^2=k$ $\{2(3k-1)-2k+1\}t^2=k$ $(4k-1)t^2=k$ $t^2=\frac{k}{4k-1}$ $t=\pm\sqrt{\frac{k}{4k-1}}$

$x=\pm(k-1)\sqrt{\dfrac{k}{4k-1}}=\pm\sqrt{\dfrac{(k-1)^2k}{4k-1}}=\pm\sqrt{\dfrac{(k^2-2k+1)k}{4k-1}}=\pm\sqrt{\dfrac{\{(3k-1)-2k+1\}k}{4k-1}}=\pm\sqrt{\dfrac{k^2}{4k-1}}=\pm\sqrt{\dfrac{3k-1}{4k-1}}=\pm\sqrt{\dfrac{3\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)-1}{4\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)-1}}$

$=\pm\sqrt{\dfrac{9+3\sqrt5-2}{12+4\sqrt5-2}}=\pm\sqrt{\dfrac{3\sqrt5+7}{10+4\sqrt5}}=\pm\sqrt{\dfrac{3\sqrt5+7}{2\sqrt5(\sqrt5+2)}}=\pm\sqrt{\dfrac{(3\sqrt5+7)(\sqrt5-2)}{2\sqrt5}}=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt5+1}{2\sqrt5}}$

$y=\pm k\sqrt{\dfrac{k}{4k-1}}=\pm\sqrt{\dfrac{k^2\cdot k}{4k-1}}=\pm\sqrt{\dfrac{(3k-1)k}{4k-1}}=\pm\sqrt{\dfrac{3k^2-k}{4k-1}}=\pm\sqrt{\dfrac{3(3k-1)-k}{4k-1}}=\pm\sqrt{\dfrac{8k-3}{4k-1}}=\pm\sqrt{\dfrac{8\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)-3}{4\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)-1}}=\pm\sqrt{\dfrac{24+8\sqrt5-6}{12+4\sqrt5-2}}$

$=\pm\sqrt{\dfrac{18+8\sqrt5}{10+4\sqrt5}}=\pm\sqrt{\dfrac{9+4\sqrt5}{5+2\sqrt5}}=\pm\sqrt{\dfrac{4\sqrt5+9}{\sqrt5(\sqrt5+2)}}=\pm\sqrt{\dfrac{(4\sqrt5+9)(\sqrt5-2)}{\sqrt5}}=\pm\sqrt{\dfrac{2+\sqrt5}{\sqrt5}}$ $(x,y)=\left(\pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt5}{2\sqrt5}},\pm\sqrt{\dfrac{2+\sqrt5}{\sqrt5}}\right)$ 複号同順

[類] 曲線C_1: $y=x^2-2x$, 曲線C_2: $x=y^2-2y$ とする.

(1) 曲線C_1と曲線C_2の交点をx座標の小さい順に,点A,点B,点C,点Dとするとき,これらの交点の座標を求め,曲線C_1と曲線C_2のグラフを描け.

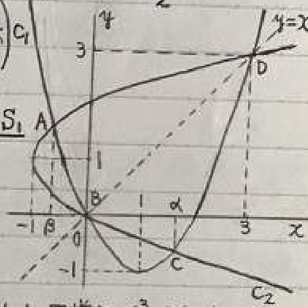
(2) 曲線C_1と曲線C_2で囲まれるハート型ではない,3つの図形の面積をそれぞれ求めよ.(2つは等しい)

(3)(理系微積です) Vol.Ⅲ. P.190 の例1.2を解け.

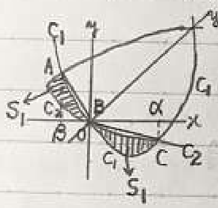
(考) (1) C_1とC_2は,$y=x$に関して対称です.曲線$C_1(C_2)$と直線$y=x$の交点は,必ずC_1とC_2の交点でもあります.

(2) $y=x$に関する対称性を利用します.

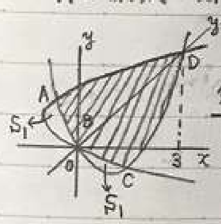
(解) (1) C_1とC_2は$y=x$に関して対称である. $y=x$とC_1: $y=x^2-2x$の交点は, $x=x^2-2x$ $x(x-3)=0$ $x=0,3$
により, $(0,0)$, $(3,3)$, 残り2つの交点について, $x=(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)=x^2(x-2)^2-2x(x-2)$
$x=x\{x(x-2)^2-2(x-2)\}=x(x^3-4x^2+4x-2x+4)=x(x^3-4x^2+2x+4)$
$x(x^3-4x^2+2x+4)-x=0$ $x(x^3-4x^2+2x+3)=0$ $x(x-3)(x^2-x-1)=0$ (注,$x=3$が解であることはわかっている)
$x^2-x-1=0$ より $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (これをα,β, $\beta<\alpha$とする) 交点のy座標は, $\beta^2-\beta-1=0$, $\beta^2=\beta+1$ を利用して,
$\beta^2-2\beta=(\beta+1)-2\beta=-\beta+1=-\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\alpha^2-2\alpha=(\alpha+1)-2\alpha=-\alpha+1=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
したがって, $A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $B(0,0)$, $C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $D(3,3)$ ($y=x$に関して対称だから,点Aを求めたら,点Cの結果は当然のことです.)



(2)



直線$y=x$に関する対称性から2つの斜線部は,どちらも同じ面積S_1
直線BC(O)の式を$y=m_1x$,直線AB(O)の式を$y=m_2x$とする.
$$S_1=\int_0^{\alpha}\{m_1x-(x^2-2x)\}dx-\int_{\beta}^{0}\{m_2x-(x^2-2x)\}dx$$
$$=-\frac{-1}{6}(\alpha-0)^3-\left\{-\frac{-1}{6}(0-\beta)^3\right\}=\frac{1}{6}(\alpha^3+\beta^3)$$ ※(補)
α,βは$x^2-x-1=0$の解だから, $\alpha^2-\alpha-1=0$, $\alpha^2=\alpha+1$, $\alpha^3=\alpha^2+\alpha=(\alpha+1)+\alpha=2\alpha+1$. 同様に$\beta^3=2\beta+1$
解と係数の関係より, $\alpha+\beta=1$ よって $S_1=\frac{1}{6}(\alpha^3+\beta^3)=\frac{1}{6}\{(2\alpha+1)+(2\beta+1)\}=\frac{1}{6}\{2(\alpha+\beta)+2\}=\frac{1}{6}(2\cdot1+2)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$



斜線部の面積S_2は$y=x$に関する対称性から$y=x$とS_1の面積を利用して
$$\frac{S_2}{2}=\int_0^3\{x-(x^2-2x)\}dx-S_1=-\frac{-1}{6}(3-0)^3-\frac{2}{3}=\frac{27}{6}-\frac{4}{6}=\frac{23}{6} \quad \therefore S_2=\frac{23}{6}\times2=\frac{23}{3}$$

(補) ※ $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$ だから $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=1^3-3\cdot(-1)\cdot1=4$ でもOK. しかし,指数が大きくなると,(解)のように次数下げが有効です. $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=(\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta\}=1\cdot\{1^2-3\cdot(-1)\}=4$ のようにもできます.
それでは,「問. $\alpha^{10}+\beta^{10}$を求めよ」です. (カイ) $x^2-x-1=0$ $x^2=x+1$ x^nをかけて $x^{n+2}=x^{n+1}+x^n$ $\alpha^{n+2}=\alpha^{n+1}+\alpha^n$
$\beta^{n+2}=\beta^{n+1}+\beta^n$ 辺々たして $\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})+(\alpha^n+\beta^n)$. $a_n=\alpha^n+\beta^n$ $(n=1,2,\cdots)$ とおけば, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$
$a_1=\alpha+\beta=1$, $a_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot(-1)=3$, $a_3=a_2+a_1=3+1=4$, $a_4=a_3+a_2=4+3=7$,
$a_5=7+4=11$, $a_6=11+7=18$, $a_7=18+11=29$, $a_8=29+18=47$, $a_9=47+29=76$, $a_{10}=76+47=123$
フィボナッチの数列になるということです.