本部 〒920-0864 金沢市高岡町2の23
TEL（〇七六）二三二一八〇六六
携帯 〇九〇一七七四四一五三一〇

# 医学科及び難関大学を目指す人のために

**新高1** 5月末迄の課題---テスト形式ならば、120分～150分（目標65%）

1 factorize　有理数の範囲　3点×4

(1) $x^3-3x^2y+x^2-10xy^2-3xy-10y^2$　(2) $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

(3) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$　(4) $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)-24$

2 二重根号をはずす　2点×4

(1) $\sqrt{8-\sqrt{48}}$　(2) $\sqrt{5-\sqrt{21}}$　(3) $\sqrt{21-\sqrt{360}}$　(4) $\sqrt{\frac{11}{3}-\sqrt{8}}$

3 計算　2点×2

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$　(2) $\dfrac{1+i}{(2-3i)(4+i)}$

4 $(x-2)(x-3)(x+4)(x+5)$ の $x^2$ の係数は□，$x$ の係数は□
1点×2

| □点 | 目標 |
|---|---|
| 80点満点 | 50点～55点 |

5 $\sqrt{7}$ の小数部分が $\alpha$ のとき $f(\alpha)=\alpha^4+5\alpha^3-\alpha^2-\alpha+2=$□
4点

6 1の3乗根 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とするとき $\omega^{2021}+\omega^{1000}-\omega^{301}+\omega-1=$□
4点

7 $x=\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$，$y=\dfrac{1}{3+\sqrt{7}}$ のとき $x+y=$□，$x^2+y^2=$□，$x^4-y^4=$□，$x^5+y^5=$□，$x^7y+xy^7=$□
1点×5

8 $x-\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$ のとき (1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=$□　(2) $x^2-\dfrac{1}{x^2}=$□　(3) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=$□　(4) $x^3-\dfrac{1}{x^3}=$□　(5) $x^5\pm\dfrac{1}{x^5}=$□
1点×5

9 $x+y+z=1$，$x^3+y^3+z^3=13$，$xyz=-2$ のとき (1) $xy+yz+zx=$□　(2) $x^4+y^4+z^4=$□　(3) $x^5+y^5+z^5=$□
2点×3

10 ある実数 $a,b,c$ に対して $\dfrac{c}{4a+4b}=\dfrac{a}{4b+4c}=\dfrac{b}{4c+4a}$ が成りたつとき、この式の値を全て求めよ.（記述）
5点（配点は解にある）

11 整式 $P(x)=x^4+ax^2+bx+17$ は $x^2+3x+4$ でわると余りが $-2x+1$ になる.このとき $a=$□，$b=$□，また $P\left(\dfrac{-3+\sqrt{7}i}{2}\right)=$□ となる.
2点×2　（完解2点）　（2点）

12 整式 $P(x)$ を $(x-2)^2$ でわったときの余りが $4x-3$ であり、$x+1$ でわったときの余りが $-4$ とする.このとき $P(x)$ を $(x-2)$ でわった余りは ア，$(x-2)(x+1)$ でわった余りは イ，$(x-2)^2(x+1)$ でわった余りは ウ である.
2点×3

13 $x$ についての恒等式 $\dfrac{x}{(x-1)^2(x+1)}=\dfrac{a}{(x-1)^2}+\dfrac{b}{(x-1)}+\dfrac{c}{(x+1)}$ が成り立つとき $a=$□，$b=$□，$c=$□ である.
3点（完解のみ3点）

14 $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{\square}\left(\dfrac{\square}{x(x+1)}-\dfrac{\square}{(x+1)(x+2)}\right)$ が成り立つ.よって $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}+\dfrac{1}{4\cdot5\cdot6}+\dfrac{1}{5\cdot6\cdot7}=$□ となる.
2点×2　（完解のみ2点）

15 $x$ の方程式 $ax=b$ を解け.（記述）
5点（完解のみ5点）

16 3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解を $\alpha,\beta,\gamma$ とする.解と係数の関係を示し、これを証明せよ.（記述）
（2点）　（3点）
5点（2点+3点）

[解]

1 (1) 与式 $= -10(x+1)y^2 - 3x(x+1)y + x^2(x+1) = -(x+1)(10y^2+3xy-x^2) = (x+1)(x^2-3yx-10y^2)$

$= \underline{(x+1)(x+2y)(x-5y)}$　(2)と(3)の順をmistakeしました. Perdon me.

(3) 与式 $=(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3-3abc)-3abc = (a+b+c)^3-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)-3abc$

$=(a+b+c)\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\}-3abc$

$=(a+b+c)(3ab+3bc+3ca)-3abc = 3\{(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc\} = \underline{3(a+b)(b+c)(c+a)}$ (∵(2)より)

(2) 与式 $=(a+(b+c))((b+c)a+bc)-bca = (b+c)a^2+((b+c)^2+bc)a+bc(b+c)-bca$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c) = (b+c)(a^2+(b+c)a+bc) = (b+c)(a+b)(a+c) = \underline{(a+b)(b+c)(c+a)}$

この結果は、暗記するに値する重要な式変形の1つです.

(4) 与式 $=(x-1)(x+3)(x-2)(x+4)-24 = (x^2+2x-3)(x^2+2x-8)-24 = (x^2+2x)^2-11(x^2+2x)+24-24$

$=(x^2+2x)(x^2+2x-11) = \underline{x(x+2)(x^2+2x-11)}$

2 (1) 与式 $=\sqrt{8-2\sqrt{12}} = \underline{\sqrt6-\sqrt2}$　(2) 与式 $=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{21}}{2}} = \frac{\sqrt7-\sqrt3}{\sqrt2} = \underline{\frac{\sqrt{14}-\sqrt6}{2}}$

(3) 与式 $=\sqrt{21-2\sqrt{90}} = \underline{\sqrt{15}-\sqrt6}$　(4) 与式 $=\sqrt{\frac{11-3\sqrt8}{3}} = \frac{\sqrt{11-3\cdot2\sqrt2}}{\sqrt3} = \frac{\sqrt{11-2\sqrt{18}}}{\sqrt3} = \frac{\sqrt9-\sqrt2}{\sqrt3} = \frac{3-\sqrt2}{\sqrt3} = \underline{\frac{3\sqrt3-\sqrt6}{3}}$

3 (1) 与式 $= \frac{(\sqrt2-\sqrt3+\sqrt5)-(\sqrt2-\sqrt3-\sqrt5)}{(\sqrt2-\sqrt3-\sqrt5)(\sqrt2-\sqrt3+\sqrt5)} - \frac{\sqrt2+\sqrt3+\sqrt5}{(\sqrt2+\sqrt3-\sqrt5)(\sqrt2+\sqrt3+\sqrt5)} = \frac{2\sqrt5}{(\sqrt2-\sqrt3)^2-(\sqrt5)^2} - \frac{\sqrt2+\sqrt3+\sqrt5}{(\sqrt2+\sqrt3)^2-(\sqrt5)^2}$

$= \frac{2\sqrt5}{-2\sqrt6} - \frac{\sqrt2+\sqrt3+\sqrt5}{2\sqrt6} = \frac{-2\sqrt5-\sqrt2-\sqrt3-\sqrt5}{2\sqrt6} = \frac{-\sqrt2-\sqrt3-3\sqrt5}{2\sqrt6} = -\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}+3\sqrt{30}}{12} = \underline{-\frac{2\sqrt3+3\sqrt2+3\sqrt{30}}{12}}$

(2) 与式 $= \frac{1+i}{8+2i-12i-3i^2} = \frac{1+i}{11-10i} = \frac{(1+i)(11+10i)}{(11-10i)(11+10i)} = \frac{11+10i+11i+10i^2}{121+110i-110i-100i^2} = \underline{\frac{1+21i}{221}}$

4 与式 $=(x-2)(x+4)(x-3)(x+5) = (x^2+2x-8)(x^2+2x-15) = (x^2+2x)^2-23(x^2+2x)+120$

$= x^4+4x^3+4x^2-23x^2-46x+120 = x^4+4x^3\underline{-19}x^2\underline{-46}x+120$

(別解) こちらの方法も大切.　$\underset{①}{(x-2)}\underset{②}{(x-3)}\underset{③}{(x+4)}\underset{④}{(x+5)}$　$x^2$の係数は、①,②,③,④ の4つから2つの$x$を選び、残りは、

定数項を選べばよいから、$x^2$の係数は、$(-2)(-3)+(-2)(+4)+(-2)(+5)+(-3)(+4)+(-3)(+5)+(+4)(+5) = \underline{-19}$

$x$の係数は、①,②,③,④ の4つから、1つの$x$を選んで残りは定数項を選べばよいから、$x$の係数は、

$(-2)(-3)(+4)+(-2)(-3)(+5)+(-2)(+4)(+5)+(-3)(+4)(+5) = 24+30-40-60 = 54-100 = \underline{-46}$

ついでに、$x^3$の係数は $(-2)+(+4)+(-3)+(+5)=4$

(問) $(x-2)(x-1)(x+2)(x+3)(x+4)$ の$x$の係数は□, $x^2$の係数は□, $x^3$の係数は□, $x^4$の係数は□,

$(x^2-4)(x^2+7x+12)(x-1) = (x^3-x^2-4x+4)(x^2+7x+12)$ と変形して、$x$の係数は $(-4)\cdot(+12)+(+7)\cdot(+4) = \underline{-20}$

$x^2$の係数は $(-1)\cdot(+12)+(+1)(+4)+(-4)\cdot(+7) = \underline{-36}$, $x^3$の係数は $(+1)(+12)+(-1)(+7)+(+1)(-4) = \underline{1}$

$x^4$の係数は $(+1)(+7)+(-1)(+1) = \underline{6}$. directに$x^2$の係数は $-2,-1,2,3,4$ と並べておいて、${}_5C_3 = \frac{5\cdot4}{2} = 10$通りの

異なる3つの積の和 $(-2)(-1)2+(-2)(-1)3+(-2)(-1)4+(-2)\cdot2\cdot3+(-2)\cdot2\cdot4+(-2)\cdot3\cdot4+(-1)\cdot2\cdot3+(-1)\cdot2\cdot4+(-1)\cdot3\cdot4$

$+2\cdot3\cdot4 = 4+6+8-12-16-24-6-8-12+24 = -36$

5 $\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$, $2<\sqrt{7}<3$ だから、$\sqrt{7}$ の整数部分は 2, $\therefore \sqrt{7}=2+\alpha$　$7=(2+\alpha)^2=4+4\alpha+\alpha^2$, $\alpha^2+4\alpha-3=0$ ---①

(その1) 割り算実行して、$f(\alpha)=\alpha^4+5\alpha^3-\alpha^2-\alpha+2=(\alpha^2+4\alpha-3)(\alpha^2+\alpha-2)+10\alpha-4$

①より $f(\alpha)=10\alpha-4=10(\sqrt{7}-2)-4=\underline{10\sqrt{7}-24}$ ($\because \alpha=\sqrt{7}-2$)

$$\begin{array}{r}
\alpha^2+\alpha-2 \\
\alpha^2+4\alpha-3\,\big)\ \overline{\alpha^4+5\alpha^3-\alpha^2-\alpha+2} \\
\alpha^4+4\alpha^3-3\alpha^2 \qquad\quad \\
\hline
\alpha^3+2\alpha^2-\alpha+2 \\
\alpha^3+4\alpha^2-3\alpha \qquad \\
\hline
-2\alpha^2+2\alpha+2 \\
-2\alpha^2-8\alpha+6 \\
\hline
10\alpha-4
\end{array}$$

(その2) ①より $\alpha^2=-4\alpha+3$, $\alpha^3=-4\alpha^2+3\alpha=-4(-4\alpha+3)+3\alpha=19\alpha-12$

$\alpha^4=19\alpha^2-12\alpha=19(-4\alpha+3)-12\alpha=-88\alpha+57$

よって $f(\alpha)=(-88\alpha+57)+5(19\alpha-12)-(-4\alpha+3)-\alpha+2=(-88+95+4-1)\alpha+57-60-3+2$

$=10\alpha-4=10(\sqrt{7}-2)-4=\underline{10\sqrt{7}-24}$

(補) $\sqrt{7}=2.64575$---(菜に虫来ない), $\sqrt{6}=2.44949$ (似よよくよく), $\sqrt{5}=2.2360679$---(富士山麓オーム鳴く)

$\sqrt{3}=1.7320508$---(人並におごれや), $\sqrt{2}=1.41421356$---(人世、人世に人見頃)

割り算実行は、有効です. 次数下げの方法も覚える.

6 $\overset{\text{オメガ}}{\omega}=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ は、1の3乗根だから $\omega^3=1$, $\omega^3-1=0$ $(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$, $\omega\neq1$ から $\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^2=-\omega-1$

与式 $=(\omega^3)^{673}\omega^2+(\omega^3)^{333}\omega-(\omega^3)^{100}\omega+\omega-1=\omega^2+\omega-\omega+\omega-1=\omega^2+\omega-1=(-\omega-1)+\omega-1=\underline{-2}$

7 $\underline{x+y}=\dfrac{3+\sqrt{7}+3-\sqrt{7}}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}=\dfrac{6}{2}=\underline{3}$, $xy=\dfrac{1}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}=\dfrac{1}{2}$, $\underline{x^2+y^2}=(x+y)^2-2xy=3^2-2\cdot\dfrac{1}{2}=\underline{8}$

$x-y=\dfrac{(3+\sqrt{7})-(3-\sqrt{7})}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}=\dfrac{2\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$, $x^2-y^2=(x+y)(x-y)=3\sqrt{7}$, $\underline{x^4-y^4}=(x^2+y^2)(x^2-y^2)=8\cdot3\sqrt{7}=\underline{24\sqrt{7}}$

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=3\left(8-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{45}{2}$, $\underline{x^5+y^5}=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)=8\cdot\dfrac{45}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot3=180-\dfrac{3}{4}=\underline{\dfrac{717}{4}}$

$\underline{x^7y+xy^7}=xy(x^6+y^6)=\dfrac{1}{2}\left\{(x^3+y^3)^2-2(xy)^3\right\}=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{45}{2}\right)^2-2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\right\}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2025}{4}-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2024}{4}=\underline{253}$

(補) 解と係数の関係より、$x, y$ は、2次式 $t^2-3t+\dfrac{1}{2}=0$ の解である. $x^2=3x-\dfrac{1}{2}$, $y^2=3y-\dfrac{1}{2}$ $(x>y)$

$x^n, y^n$ をそれぞれかけて、$x^{n+2}=3x^{n+1}-\dfrac{1}{2}x^n$, $y^{n+2}=3y^{n+1}-\dfrac{1}{2}y^n$, 辺々たして、$x^{n+2}+y^{n+2}=3(x^{n+1}+y^{n+1})-\dfrac{1}{2}(x^n+y^n)$

辺々引いて、$x^{n+2}-y^{n+2}=3(x^{n+1}-y^{n+1})-\dfrac{1}{2}(x^n-y^n)$　$n=1$ を入れて、$x^3+y^3=3(x^2+y^2)-\dfrac{1}{2}(x+y)=3\cdot8-\dfrac{1}{2}\cdot3=\dfrac{45}{2}$

$x^3-y^3=3(x^2-y^2)-\dfrac{1}{2}(x-y)=3\cdot3\sqrt{7}-\dfrac{1}{2}\sqrt{7}=\dfrac{17\sqrt{7}}{2}$　$n=2$ を入れて $x^4+y^4=3(x^3+y^3)-\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)=3\cdot\dfrac{45}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot8=\dfrac{127}{2}$

$\underline{x^4-y^4}=3(x^3-y^3)-\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)=3\cdot\dfrac{17\sqrt{7}}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot3\sqrt{7}=\underline{24\sqrt{7}}$　$n=3$ を入れて $\underline{x^5+y^5}=3(x^4+y^4)-\dfrac{1}{2}(x^3+y^3)=3\cdot\dfrac{127}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{45}{2}$

$=\dfrac{762}{4}-\dfrac{45}{4}=\underline{\dfrac{717}{4}}$　$n=4$ を入れて $x^6+y^6=3(x^5+y^5)-\dfrac{1}{2}(x^4+y^4)=3\cdot\dfrac{717}{4}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{127}{2}=\dfrac{2151-127}{4}=\dfrac{2024}{4}=506$

$\underline{x^7y+xy^7}=xy(x^6+y^6)=\dfrac{1}{2}\cdot506=\underline{253}$

$\boxed{8}$ (1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}=(\sqrt{5})^2+2=\underline{7}$

(2) $x+\dfrac{1}{x}$ の値を求める. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2=7+2=9$ $\therefore x+\dfrac{1}{x}=\pm3$

$x^2-\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\underline{\pm3\sqrt{5}}$

(3) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2-x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=\pm3\,(7-1)=\underline{\pm18}$

(4) $x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=\sqrt{5}\,(7+1)=\underline{8\sqrt{5}}$

(5) $x^5+\dfrac{1}{x^5}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)-x^2\cdot\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}\cdot x^3=7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\dfrac{1}{x^2}\right)-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)(7-1)-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=41\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=41\cdot(\pm3)=\underline{\pm123}$

$x^5-\dfrac{1}{x^5}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3-\dfrac{1}{x^3}\right)+x^2\cdot\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}\cdot x^3=7\cdot8\sqrt{5}+\dfrac{1}{x}-x=56\sqrt{5}-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=56\sqrt{5}-\sqrt{5}=\underline{55\sqrt{5}}$

(補) $x-\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$ のとき $x^2-1=\sqrt{5}x$, $x^2-\sqrt{5}x-1=0$, $x=\dfrac{\sqrt{5}\pm\sqrt{5+4}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}\pm3}{2}$ となり、$x$ の値は2つ存在します.

$\alpha=\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}$, $\beta=\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$ $(\alpha>0>\beta)$ とおく. $\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{2}{\sqrt{5}+3}=\dfrac{2(\sqrt{5}-3)}{5-9}=-\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}=-\beta$, 同様に $\dfrac{1}{\beta}=-\alpha$ となる. $\beta=-\dfrac{1}{\alpha}$, $\alpha=-\dfrac{1}{\beta}$

解と係数の関係より、$\alpha+\beta=\sqrt{5}=\alpha-\dfrac{1}{\alpha}=-\dfrac{1}{\beta}+\beta=\beta-\dfrac{1}{\beta}$ ということ. $\alpha\beta=-1=\alpha\cdot\left(-\dfrac{1}{\alpha}\right)=\left(-\dfrac{1}{\beta}\right)\cdot\beta$ も納得できます.

したがって、この設問は、$x^2-\sqrt{5}x-1=0$ の解を $\alpha, \beta$ とするとき、$x-\dfrac{1}{x}=\alpha-\dfrac{1}{\alpha}=\beta-\dfrac{1}{\beta}=\sqrt{5}$ のとき (1)は、$\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$ or $\beta^2+\dfrac{1}{\beta^2}$ の値を求めよ. すなわち $\alpha^2+(-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$ or $\beta^2+(-\alpha)^2=\beta^2+\alpha^2$ の値を求めよ. (2)は $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ or $\beta+\dfrac{1}{\beta}$ すなわち $\alpha-\beta$ or $\beta-\alpha$ の値を求めよ. ということです. $x+\dfrac{1}{x}=\pm3$ と2つの値があることも当然のことです.

$x^5+\dfrac{1}{x^5}=\alpha^5+\dfrac{1}{\alpha^5}=\alpha^5+(-\beta)^5=\alpha^5-\beta^5$ or $\beta^5+\dfrac{1}{\beta^5}=\beta^5+(-\alpha)^5=\beta^5-\alpha^5$ の値を求めよということでした.

$\boxed{9}$ $\boxed{16}$の解と係数の関係を利用します. $\boxed{7}$の(補)を利用してみます. (別解)の $x^5+y^5+z^5$ の troublesome が身にしみます.

(1) $13=x^3+y^3+z^3=(x^3+y^3+z^3-3xyz)+3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$=1\cdot\{(x+y+z)^2-2xy-2yz-2zx-xy-yz-zx\}+3\cdot(-2)=1^2-3(xy+yz+zx)-6=-5-3(xy+yz+zx)$

$\therefore xy+yz+zx=\dfrac{-5-13}{3}=\underline{-6}$

(2), (3), 解と係数の関係より, 3次式 $t^3-t^2-6t+2=0$ の解が $x, y, z$ である. $x^3=x^2+6x-2$ $x^n$ をかけて.

$x^{n+3}=x^{n+2}+6x^{n+1}-2x^n$ 同様に $y^{n+3}=y^{n+2}+6y^{n+1}-2y^n$, $z^{n+3}=z^{n+2}+6z^{n+1}-2z^n$ 辺々たして.

$x^{n+3}+y^{n+3}+z^{n+3}=(x^{n+2}+y^{n+2}+z^{n+2})+6(x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1})-2(x^n+y^n+z^n)$ --- Ⓣ

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=1^2-2\cdot(-6)=13$

Ⓣに $n=1$ を入れて. $\underline{x^4+y^4+z^4}=(x^3+y^3+z^3)+6(x^2+y^2+z^2)-2(x+y+z)=13+6\cdot13-2\cdot1=13\cdot7-2=\underline{89}$

Ⓣに $n=2$ を入れて. $\underline{x^5+y^5+z^5}=(x^4+y^4+z^4)+6(x^3+y^3+z^3)-2(x^2+y^2+z^2)=89+6\cdot13-2\cdot13=89+4\cdot13=\underline{141}$

(別解) $\underline{x^4+y^4+z^4}=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)=13^2-2\{(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)\}=13^2-2(36+4)=\underline{89}$

$\underline{x^5+y^5+z^5}=(x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3)-(x^2y^3+z^3x^2+x^3y^2+y^2z^3+z^2x^3+y^3z^2)=13^2-\{x^2y^2(x+y)+y^2z^2(y+z)+z^2x^2(z+x)\}$

$=13^2-\{x^2y^2(1-z)+y^2z^2(1-x)+z^2x^2(1-y)\}=13^2-\{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-xyz(xy+yz+zx)\}$

$=13^2-\{(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)-(-2)(-6)\}=169-\{36-2(-2)\cdot1-12\}=169-28=\underline{141}$

10 $\dfrac{c}{4a+4b}=\dfrac{a}{4b+4c}=\dfrac{b}{4c+4a}=k$ とおく. $c=(4a+4b)k$, $a=(4b+4c)k$, $b=(4c+4a)k$, 辺々たして. $a+b+c=8(a+b+c)k$

$(a+b+c)(8k-1)=0$ が必要である. (i) $a+b+c=0$ のとき $\dfrac{c}{-4c}=\dfrac{a}{-4a}=\dfrac{b}{-4b}=k$ $\therefore k=-\dfrac{1}{4}$

(ii) $k=\dfrac{1}{8}$ のとき $c=\dfrac{a+b}{2}$, $a=\dfrac{b+c}{2}$, $b=\dfrac{c+a}{2}$, すなわち $a+b=2c$ ---①, $b+c=2a$ ---②, $c+a=2b$ ---③

③より、$c=2b-a$ を①,② に代入 $a+b=2(2b-a)=4b-2a$ $\therefore 3a=3b, a=b$, $b+(2b-a)=2a, 3b=3a$ $\therefore b=a$

$c=a=b$ のとき成立　したがって、求める値は $\underline{-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}}$ (値のみは3点、$a=b=c$ の十分が示されない場合−2点という事)

11 右. わり算実行により、$P(x)=(x^2+3x+4)(x^2-3x+a+5)+(b-3a-3)x-4a-3$

余り $(b-3a-3)x-4a-3=-2x+1$ より.

$b-3a-3=-2$ かつ $-4a-3=1$

$\therefore \underline{a=-1}$, $\underline{b}=3a+1=\underline{-2}$

よって $P(x)=(x^2+3x+4)(x^2-3x+4)-2x+1$

$\dfrac{-3+\sqrt{7}i}{2}=\alpha$ とおけば、$-3+\sqrt{7}i=2\alpha$ 　$2\alpha+3=\sqrt{7}i$, $(2\alpha+3)^2=(\sqrt{7}i)^2$

$4\alpha^2+12\alpha+9=-7$ 　$4\alpha^2+12\alpha+16=0$ $\therefore \alpha^2+3\alpha+4=0$

$P(\alpha)=(\alpha^2+3\alpha+4)(\alpha^2-3\alpha+4)-2\alpha+1=0-2\alpha+1=-2\cdot\dfrac{-3+\sqrt{7}i}{2}+1=\underline{4-\sqrt{7}i}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-3x+(a+5) \\
\hline
x^2+3x+4 & x^4 \quad +ax^2 \quad +bx \quad +17 \\
 & x^4+3x^3+4x^2 \\
\hline
 & -3x^3+(a-4)x^2 \\
 & -3x^3-9x^2-12x \\
\hline
 & (a+5)x^2+(b+12)x \\
 & (a+5)x^2+(3a+15)x+4a+20 \\
\hline
 & (b-3a-3)x+(-3-4a)
\end{array}
$$

12 $P(x)=(x-2)^2Q_1(x)+4x-3=(x+1)Q_2(x)-4$ 　$\therefore P(2)=5$, $P(-1)=-4$ ---①

$P(x)$ を1次式 $\underline{x-2}$ でわった余りは、$P(2)=\underline{5}$

$P(x)$ を2次式 $\underline{(x-2)(x+1)}$ でわった余りは、高々1次式 $ax+b$ とおけて $P(x)=(x-2)(x+1)Q_3(x)+ax+b$

①より. $P(2)=2a+b=5$, $P(-1)=-a+b=-4$. 辺々引いて $3a=9$ $a=3$, $b=a-4=-1$ 　$\therefore$ 求める余りは $\underline{3x-1}$

$P(x)$ を3次式 $(x-2)^2(x+1)$ でわった余りは、高々2次式 $ax^2+bx+c$ であるから $P(x)=(x-2)^2(x+1)Q_4(x)+ax^2+bx+c$

とおけるが、$(x-2)^2$ でわった余りが $4x-3$ だから $ax^2+bx+c=a(x-2)^2+4x-3$ でなければならない.

すなわち $P(x)=(x-2)^2(x+1)Q_4(x)+a(x-2)^2+4x-3$ 　①より $P(-1)=9a-4-3=-4$ 　$9a=3$ $\therefore a=\dfrac{1}{3}$

したがって、求める $\underline{(x-2)^2}$ でわった余りは、$\dfrac{1}{3}(x-2)^2+4x-3=\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{3}+4x-3=\underline{\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{8}{3}x-\dfrac{5}{3}}$

(別解) $P'(x)=2(x-2)Q_1(x)+(x-2)^2Q_1'(x)+4=2(x-2)(x+1)Q_4(x)+(x-2)^2Q_4(x)+(x-2)^2(x+1)Q_4'(x)+2ax+b$

$P(2)=5=4a+2b+c$, $P(-1)=-4=a-b+c$, $P'(2)=4=4a+b$ これを解けば $a=\dfrac{1}{3}$, $b=\dfrac{8}{3}$, $c=-\dfrac{5}{3}$

13 与恒等式に $(x-1)^2(x+1)$ を両辺にかけて. $x=a(x+1)+b(x-1)(x+1)+c(x-1)^2$ ---① も恒等式

$x=1$ を入れて $1=2a$ $\therefore \underline{a=\frac{1}{2}}$, $x=-1$ を入れて $-1=4c$ $\therefore \underline{c=-\frac{1}{4}}$, $x=0$ を入れて $0=a-b+c$, $\underline{b}=a+c=\underline{\frac{1}{4}}$

(補) 与恒等式に $x=1$, $x=-1$ を代入することは、できませんが、① にすると $x=1$, $x=-1$ を代入してもよいことになり、$a, b, c$ を求めたならば、$x\neq1$, $x\neq-1$ のとき、①の両辺を $(x-1)^2(x+1)$ でわって 与恒等式が成り立ちます。

14 一般に部分分数に分けるには、例えば $\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}$ のようにおきます。分母が1次式，2次式，3次式---ならば、分子は、それぞれ、定数，1次式，2次式，---とおくということです。次には、恒等式として、$a,b,c$ を求めればよい。$a,b,c$ を求めると $a=\frac{1}{3}, b=-\frac{1}{3}, c=-\frac{2}{3}$ となり $\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}\right)$ となります。理系微積で用います。この設問の場合には、じっと見つめて、数値をあてはめてみる。次の設問から、変な数値ではない。

$\underline{\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(x+1)(x+2)}\right)}$ $x=1$ のとき $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)$，$x=2$ のとき $\frac{1}{2\cdot3\cdot4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)$

--- $x=5$ のとき $\frac{1}{5\cdot6\cdot7}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5\cdot6}-\frac{1}{6\cdot7}\right)$ 辺々たせば、途中が消えて、求める値は $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{6\cdot7}\right)=\underline{\frac{5}{21}}$

15 (i) $a=0$ のとき $0\cdot x=b$ (ア) $b=0$ ならば、$0\cdot x=0$ だから $x$ は全ての数 (イ) $b\neq0$ ならば $x$ は解なし。

(ii) $a\neq0$ ならば、$x=\frac{b}{a}$

| 答 | $a=0$ かつ $b=0$ ならば $x$ は全ての数<br>$a=0$ かつ $b\neq0$ ならば、$x$ は解なし，$a\neq0$ ならば $x=\frac{b}{a}$ |
|---|---|

(補) (ii) は、分子 $b=0$ ならば、$x$ の値が0となるだけです。分母$=0$，分母$\neq0$ に分けるだけです。

このような設問の場合には、そうでなくても、答はキチンとかきましょう。

16 $\underline{\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}}$ ---Ⓣ

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ の両辺を $a$ でわって（3次式だから $a\neq0$） $x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$ この解が $\alpha,\beta,\gamma$ だから

$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=(x-\gamma)(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta)=x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x-\gamma x^2+(\gamma\alpha+\beta\gamma)x-\alpha\beta\gamma$

$=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma\ (=0)$ よって Ⓣ が得られる。

38. 次を計算せよ. $(n=1,2,3,\cdots)$

(1) $(-2)^7-(-2^7)$ (2) $(-2)^7+(-2^7)$ (3) $(-2)^{2n+1}-(-2^{2n+1})$ (4) $(-2)^{2n+1}+3\times2^{2n}-(-2)^{2n}$ (5) $\dfrac{3+\sqrt3}{3-\sqrt3}-\dfrac{3-\sqrt3}{3+\sqrt3}$

(6) $\angle C=90^\circ$ の直角三角形ABCにおいて, $AB=\sqrt3+\sqrt2-1$, $BC=\sqrt3-\sqrt2+1$, のとき $CA=\square\sqrt{\sqrt{\square}-\sqrt{\square}}$ (□は正の整数)

[考] (1) $(-2)^{キスウ}=-2^{キスウ}$ です. (4) $2^{2n}$ をくくり出す. (5) 高校では, 有理化を習いますが, ここでは通分すると考えます. 更に, 分母を $3-\sqrt3=\sqrt3(\sqrt3-1)$ などと考えると, ----。 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ を利用する計算は大切です. [補]参照.

(6) ルートの中にルート?, 高校ですが, 計算は, 君にもできます.

[解] (1) $(-2)^7-(-2^7)=-2^7+2^7=\underline{0}$ (2) $(-2)^7+(-2^7)=-2^7-2^7=-(2^7+2^7)=-(2\times2^7)=-2^8=-2^3\times2^3\times2^2=-8\times8\times4=\underline{-256}$

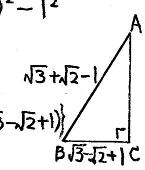
(補) $2^7=2^3\times2^3\times2=8\times8\times2=128$ と簡単に求まりますが, ----。 $2^8=2^4\times2^4=16\times16=256$ のようにもできます.

(3) $2n+1$ は奇数だから $(-2)^{2n+1}-(-2^{2n+1})=-2^{2n+1}+2^{2n+1}=\underline{0}$

(4) $(-2)^{2n+1}+3\times2^{2n}-(-2)^{2n}=-2^{2n+1}+3\times2^{2n}-2^{2n}=2^{2n}(-2+3-1)=2^{2n}\times0=\underline{0}$ (補) $(-2)^{グウスウ}=2^{グウスウ}$ です.

(5) $\dfrac{3+\sqrt3}{3-\sqrt3}-\dfrac{3-\sqrt3}{3+\sqrt3}=\dfrac{\sqrt3(\sqrt3+1)}{\sqrt3(\sqrt3-1)}-\dfrac{\sqrt3(\sqrt3-1)}{\sqrt3(\sqrt3+1)}=\dfrac{\sqrt3+1}{\sqrt3-1}-\dfrac{\sqrt3-1}{\sqrt3+1}=\dfrac{(\sqrt3+1)^2-(\sqrt3-1)^2}{(\sqrt3-1)(\sqrt3+1)}=\dfrac{\{(\sqrt3+1)+(\sqrt3-1)\}\{(\sqrt3+1)-(\sqrt3-1)\}}{(\sqrt3)^2-1^2}$

$=\dfrac{2\sqrt3\times2}{2}=\underline{2\sqrt3}$




(6) 三平方の定理より, $CA^2=AB^2-BC^2=(AB+BC)(AB-BC)=\{(\sqrt3+\sqrt2-1)+(\sqrt3-\sqrt2+1)\}\{(\sqrt3+\sqrt2-1)-(\sqrt3-\sqrt2+1)\}$

$=2\sqrt3\times(2\sqrt2-2)=2^2(\sqrt6-\sqrt3)$ $\therefore CA=\underline{2\sqrt{\sqrt6-\sqrt3}}$

[補] 高校数学を先取りした人で, $\dfrac{3+\sqrt3}{3-\sqrt3}=\dfrac{(3+\sqrt3)^2}{(3-\sqrt3)(3+\sqrt3)}=\dfrac{9+6\sqrt3+3}{9-3}=\dfrac{12+6\sqrt3}{6}=2+\sqrt3$ のように, すぐに有理化をしてしまう人がいます. 勿論, それはそれで悪くはないのですが, もう少しは, 式をよく見て, 上の[解]のように, 分母, 分子から, $\sqrt3$ を出して, 有理化というより, 通分したら, 分母が $(\sqrt3-1)(\sqrt3+1)=3-1=2$ のように, 自然と有理化の形になってしまう, と考えて計算をすすめて欲しいものです. 大学入試では, $\dfrac{1}{\sqrt2}$, $\dfrac{1}{\sqrt3}$ などは, 特別な事情がない限り, 立派な答ですが----

$(\sqrt3-\sqrt2+1)^2=(\sqrt3)^2+(-\sqrt2)^2+1^2+2\times\sqrt3\times(-\sqrt2)+2\times(-\sqrt2)\times1+2\times1\times\sqrt3=$ ---- などと計算をすすめて(6)の[解]を得られた人は, 高校数学要注意です. 一般の高校教科書が全てできる(基礎が完了?)ようになったからといって, 大学入試での基本ができているとは言いません. 少なくとも, 傍用問題集を全てマスターすることが, 基本としては必要でしょう. 大学入試問題は, 基本ができていても, 簡単に, 時間内に, 全問解くことなどできないのが普通です. (基本ができて3割程できるか?)

[類] (1) $\left(-\dfrac12\right)^3\times(-2^2)-\left(-\dfrac12\right)^2\div\dfrac12=\left(-\dfrac{1}{2^3}\right)\times(-2^2)-\dfrac{1}{2^2}\times2=\dfrac{2^2}{2^3}-\dfrac{2}{2^2}=\dfrac12-\dfrac12=\underline{0}$

(2) $-2^2\div(-3)^3\times\left(-\dfrac34\right)^2\div\left(\dfrac12-1\right)^3=\dfrac{-2^2}{-3^3}\times\dfrac{3^2}{4^2}\div\left(-\dfrac12\right)^3=\dfrac{2^2\times3^2}{3^3\times2^4}\div\left(-\dfrac{1}{2^3}\right)=-\dfrac{2^2\times3^2\times2^3}{3^3\times2^4}=\underline{-\dfrac23}$

(3) $\dfrac{12\left\{1-\left(-\frac12\right)^4\right\}}{1-\left(-\frac12\right)}=\dfrac{12\left(1-\frac{1}{2^4}\right)}{1+\frac12}=\dfrac{12\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\times2^4}{\left(1+\frac12\right)\times2^4}=\dfrac{12(2^4-1)}{(2+1)\times2^3}=\dfrac{3\times2^2\times15}{3\times2^3}=\underline{\dfrac{15}{2}}$

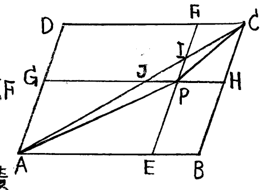
(4) $2\times\left\{(-0.25)^2-\dfrac1{16}\right\}-2^2\div0.125\times\left(-\dfrac12\right)^3=2\times\left\{\left(\dfrac14\right)^2-\dfrac1{16}\right\}-2^2\times\dfrac{1000}{125}\times\left(-\dfrac{1}{2^3}\right)=2\times0+\dfrac{2^2\times8}{2^3}=\dfrac82=\underline{4}$

カットし



[類9] 平行四辺形ABCDの△ABCの内部に点Pを次のような条件をみたすように、とることにする。

条件：点Pを通り、AD(//BC)に平行な直線をひき、辺AB，辺DCとの交点をそれぞれ、点E，点F とする。更に点Pを通り、AB(//DC)に平行な直線をひき、辺AD，辺BCとの交点をそれぞれ、点G，点H，とする。このとき、平行四辺形PFDG，平行四辺形PEBHの面積は、それぞれ、$S_1$，$S_2$ をみたす定数である。




(1) $S_1 > S_2$ でなければならないことを証明せよ。

(2) △PCAの面積Sは、$S_1$と$S_2$で表わされる定数であることを証明せよ

高校生(3) このような平行四辺形ABCDの面積Tの最小値$T_0$を$S_1$，$S_2$で表せ。(△PCAは不用)((解)は、次頁下)

(考1) P.7の(10)にある、平行四辺形の性質です。面積については、2本の対角線によって分けられる4つの三角形の面積は等しいがあります。勿論、1本の対角線で分けられる2つの三角形の面積は等しいです。(1)は、この性質により、平行四辺形PGAE，平行四辺形PHCF の面積 $S_0$，$S_0'$ を考えるとeasyです。(2)は、(解2)は解を見ると、easyに見えますが、一つの受験テクニックとして、覚えて欲しい技法ではあります。文字の数は、条件分析をして、組み入れた、最小の文字数を用います。結果は、$S=$($S_1$と$S_2$だけの式)となるということです。平行四辺形は、全部で、何個ありますか？ ${}_3C_2 \times {}_3C_2 = 9$個です。(たて、3本のうち2本を選び、よこ3本のうち2本を選べば、平行四辺形が1個できる) この9個から、△PCA(=S)を含むものを選んで、平行四辺形の性質、上述、波線部を用いることを考えます。このとき、平行であることを用いて、三角形の面積の移動を考えることは、いうまでもありません。$\triangle ABC = S + S_2 + \frac{S_0}{2} + \frac{S_0'}{2} = \triangle ACD$ ですが、$S_1$との連結がうまくいきません。△PIJが、邪魔をしているからです。そこで、$\triangle PIJ = x$ とおいて、…すると、$\triangle PCI = y$，$\triangle PJA = z$ とおき、$x+y+z=S$，$x, y, z$ を介して、Sとの連結を考えることになります。他の平行四辺形の波線部の条件を考えて、△ABC＝△ACDに持ち込むことになります。このような解法に気付くには、条件分析がしっかりなされていること、この設問の場合、波線部を、平行四辺形の条件から選び出せたかということですが、平行四辺形の面積には、これしかありませんのでeasyです。このような解法に気付かなくても、次の(解3)のようにもできます。いきなり、$\triangle ICF = a$，$\triangle JGA = b$ などとおいても、勿論できますが、平行四辺形の性質と、対称性を考えると、$S_1$，$S_2$，とある以上、$S_0$，$S_0'$ を持ち込むのが、数学的には、一般的です。$x, y, z$を持ち出さないで、直接 $S, S_1, S_2, S_0, S_0'$ だけで考えるのがBestです。2△ABC＝平行四辺形ABCD とすればOKです。(解1)にしました。

(例) この設問で、$S_1 = 10$，$S_2 = 4$ のとき $S = \square$ である。((その2)，(その3)，(補)，は、本題の(2)，(3)の(解)にも適用します。)

(カイ) (その1) 穴埋め問題と捉えれば、右図、長方形でも求まります。$S_1 = 2\times5$，$S_2 = 2\times2$ とする

$\underline{S} = \triangle ABC - \triangle PAB - \triangle PBC = \frac{1}{2}\times4\times7 - \frac{1}{2}\times4\times2 - \frac{1}{2}\times7\times2 = 14-4-7 = \underline{3}$

(その2) $\triangle PFDG = S_1 = 10$，$\triangle PEBH = S_2 = 4$，$\triangle PIJ = x$，$\triangle PCI = y$，$\triangle PJA = z$，平行四辺形$PGAE = S_0$

図は次頁

平行四辺形$PHCF = S_0'$ とおく。△ABC＝△ACDに持ち込む。

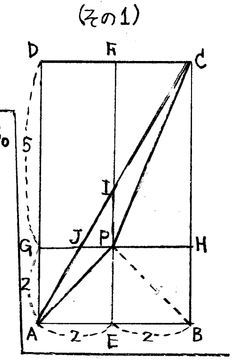
$\triangle ABC = \triangle PCA + \triangle PAE + \triangle PHC +$ 平行四辺形$PEBH = (x+y+z) + \frac{1}{2}S_0 + \frac{1}{2}S_0' + 4$

$\triangle ACD = \triangle JGA + \triangle ICF +$ 図形$DFIJG$ $= (\frac{1}{2}S_0 - z) + (\frac{1}{2}S_0' - y) + (10 - x)$

よって $x+y+z+\frac{1}{2}S_0 + \frac{1}{2}S_0' + 4 = \frac{1}{2}S_0 - z + \frac{1}{2}S_0' - y + 10 - x$

$\therefore 2x+2y+2z = 10-4 = 6 \quad 2(x+y+z) = 6 \quad 2S = 6 \quad \underline{\therefore S = 3}$

(その1)




(補) この設問は、$S = \square$ であり、題意の図形は、$S_1 = 10$，$S_2 = 4$ ならば、必ずSが求まるということですから、長方形にして、適当に長さをとっても必ず解は得られます。途中経過を示せならば、この(その1)は、outです。

(その3) 図のように長さを決めると、条件は、$S_1 = ad = 10$, $S_2 = bc = 4$

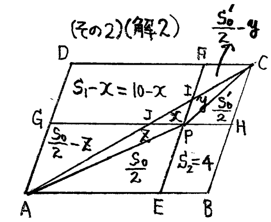
$\triangle PCA = S = \frac{1}{2}(c+d)\times PJ$

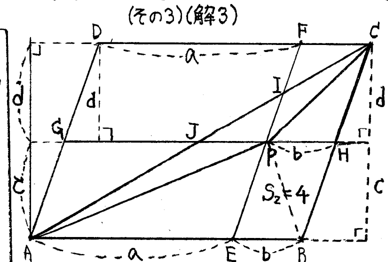
$PJ = JH - PH = JH - b$　$\triangle ABC \sim \triangle JHC$ だから $AB : JH = BC : HC = c+d : d$

$(c+d)\times JH = d\times AB = d\times(a+b)$　∴ $JH = \frac{d(a+b)}{c+d}$

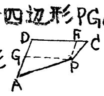
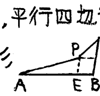
$PJ = \frac{d(a+b)}{c+d} - b$　∴ $\triangle PCA = S = \frac{1}{2}(c+d)\times PJ = \frac{1}{2}(c+d)\left\{\frac{d(a+b)}{c+d} - b\right\} = \frac{1}{2}\{d(a+b) - b(c+d)\} = \frac{1}{2}(ad-bc)$

$ad=10$, $bc=4$ を入れて、$\triangle PCA = S = \frac{1}{2}(10-4) = 3$ （この解は、P.15の(3)と深く結びつきます。）




(解1) (1) 平行四辺形PGAE$=S_0$, 平行四辺形PHCF$=S_0'$ とする。△ABC内に点Pがあるから

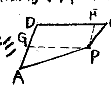
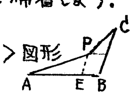
図形  ＞ 図形  すなわち、$S_1+\frac{S_0}{2}+\frac{S_0'}{2} > S_2+\frac{S_0}{2}+\frac{S_0'}{2}$　∴ $S_1>S_2$

(2) $2\triangle ABC = 2\times\left(S+\frac{S_0}{2}+\frac{S_0'}{2}+S_2\right)$ = 平行四辺形ABCD $= S_1+S_0+S_0'+S_2$

$2S+S_0+S_0'+2S_2 = S_1+S_0+S_0'+S_2$　$2S = S_1-S_2$　∴ $S=\frac{S_1-S_2}{2}$ (定数)

注、∠BADが鈍角でもOKです。

(補) 座標においてしまうのも、わかりやすいでしょう。これを(解4)とできます。更に他の解を考えます。点Jを通り、AD(//BC)に平行な直線をひき、6個の平行四辺形にして、△JPC, △JPAを等積変形するとできますが、結局(解1)に帰着します。

(解2) (1) 平行四辺形PGAE$=S_0$, 平行四辺形PHCF$=S_0'$ とする。△ABC内に点Pがあるから、図形  ＞ 図形 

平行四辺形PFDG＋△PGA＋△PCF ＞ 平行四辺形PEBH＋△PAE＋△PHC

$S_1+\frac{S_0}{2}+\frac{S_0'}{2} > S_2+\frac{S_0}{2}+\frac{S_0'}{2}$　∴ $S_1>S_2$

(2) 例の(その2)において、$10=S_1$, $6=S_2$ とすれば $S=\frac{S_1-S_2}{2}$

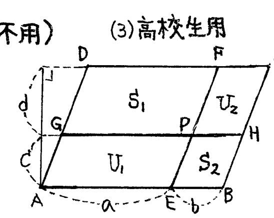
(補) 高校のジャンルを用いると、∠BAD$=\theta$ などとおいて、三角でもできます。

| | |
|---|---|
| 答 | (1) 左解　(2) $S=\frac{S_1-S_2}{2}$ |
| | (3) $T_0=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$ |

(解3) (1) (解1)に同じ

(2) 例の(その3)において、$ad=S_1$, $bc=S_2$ とかきなおせばよい（座標をとっても、同じようなことです。）

高 高校生用 設問(3) このような平行四辺形ABCDの面積Tの最小値$T_0$を求めよ。(△PCAは不用)




($U_1U_2 = S_1S_2$ も成立しますね。何故ですか？)

(解) 右図のように、a, b, c, d とする。$ad=S_1$, $bc=S_2$, ∴ $d=\frac{S_1}{a}$, $c=\frac{S_2}{b}$

$T=(a+b)(c+d)=(a+b)\left(\frac{S_2}{b}+\frac{S_1}{a}\right)=\frac{a}{b}S_2+S_1+S_2+\frac{b}{a}S_1=\frac{b}{a}S_1+\frac{a}{b}S_2+S_1+S_2$

相加相乗平均の関係より、$\frac{b}{a}S_1+\frac{a}{b}S_2 \geqq 2\sqrt{\frac{b}{a}S_1\cdot\frac{a}{b}S_2} = 2\sqrt{S_1S_2}$

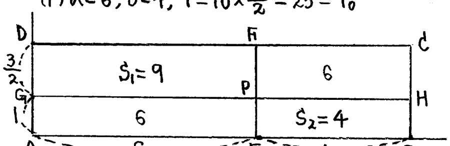
等号成立は $\frac{b}{a}S_1=\frac{a}{b}S_2$, $a^2S_2=b^2S_1$, $a\sqrt{S_2}=b\sqrt{S_1}$, $a:b=\sqrt{S_1}:\sqrt{S_2}$ のとき

求める最小値 $T_0 = S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2} = (\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$

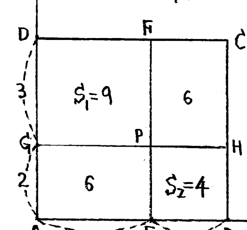
(補) 下図(i), (ii), (iii), 全て $S_1=9$, $S_2=4$ の場合です。

(i), (ii)は、$a:b=\sqrt{S_1}:\sqrt{S_2}=\sqrt{9}:\sqrt{4}=3:2$ です。
どちらも $T=T_0=25$　(iii)は、$a:b=3:4 \neq 3:2$, $T=28$

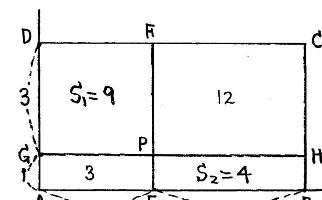
(i) $a=6$, $b=4$, $T=10\times\frac{5}{2}=25=T_0$




(ii) $a=3$, $b=2$, $T=5\times5=25=T_0$




(iii) $a=3$, $b=4$, $T=7\times4=28>T_0=25$



# 放物線と三角形の面積

この設問は(解)を得ることだけを目的としません.さまざまな内容をgrasp！この様な勉強の仕方が,成績upにつながります.

[類-1] 原点Oを頂点とする放物線C上に点A(-3,▢),点B(6,12)がある.(1)放物線Cの式と点Aのy座標▢を求めよ.
(2)直線ABの式を求めよ. (3)△AOBの面積を求めよ. (4)直線$x=k_1$で△AOBの面積を2等分するとき,$k_1$の値を求めよ. (5)直線$y=k_2$で△AOBの面積を2等分するとき,$k_2$の値を求めよ. (6)原点Oを通る直線$l_1$で△AOBの面積を2等分するとき,直線$l_1$の式を求めよ. (7)放物線C上にある点Bと異なる点Pのとき,△AOBの面積が,△AOPの面積と等しくなるC上の点Pの座標を求めよ.(8)△AOQの面積が△AOBの面積の2倍となる放物線C上の点Qの座標を全て求めよ. (9)点A,点O,点B ともう1つの点が平行四辺形となるとき,もう1つの点を全て求めよ.
(10)点E(6,0)をとり,点Eと点Bの中点をMとする.点Mを通り,四角形AOEBの面積を2等分する直線$l_2$の式を求めよ.

2次関数未修の人は,点A(-3,3)として,(1),(7),(8)以外を解いて下さい.(解)(1),(2),(3)は,P.15の(7),(解)(4)~(10)は,P.15の(12),(13).

(考)点A(-3,3)が求まれば,(7),(8)以外は,放物線(2次関数)が絡まないので,1次関数の問題です.様々な問題ができるようになります.解法は,1つだけではありません.なるべく多くの解法にtry！理解できれば,高校内容でも------
次のことは,是非とも理解して欲しい内容です.等積変形,図形の性質なども,うまく利用することが大切です.

例1 点A(-2,3),点B(3,-4)のとき,直線ABの式

直線$y=ax+b$の形(異なる2点のx座標が一致するとき,傾きは存在せず,直線$x=k$(定数)の形になる.)では,傾きと1つの定点を利用して,連立方程式を用いなくても求まります.

• $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$のとき (i) $x_1 \neq x_2$ ならば 傾き$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$,定点として$A(x_1,y_1)$とすると $y=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)+y_1$
(これは,必ず,点$B(x_2,y_2)$も通ります.定点として$B(x_2,y_2)$を用いることもできます.) (ii) $x_1=x_2$ ならば $x=x_1$

(カイ) 傾きは,$\frac{3-(-4)}{(-2)-3}=\frac{7}{-5}=-\frac{7}{5}$ $y=-\frac{7}{5}(x-3)-4=-\frac{7}{5}x+\frac{21}{5}-4=-\frac{7}{5}x+\frac{1}{5}$

例2 点$A(x_1,y_1)$,点$B(x_2,y_2)$の中点$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

例3 直線$l_1$:$y=-\frac{3}{2}x+1$ に垂直な,点$A(-\frac{3}{2},-2)$を通る直線$l_2$の式及び$l_1$と$l_2$の交点Hの座標

直線$y=m_1x+n_1$と直線$y=m_2x+n_2$が垂直に交わるとき $m_1\times m_2=-1$ ($n_1,n_2$には関係ありません.)

(カイ) 求める直線$l_2$の傾きを$m$とすると,$l_1$と$l_2$は垂直に交わるから($l_1$の傾き$-\frac{3}{2}$である) $(-\frac{3}{2})\times m=-1$
$-\frac{3m}{2}=-1$ $\frac{3m}{2}=1$ $3m=2$ $m=\frac{2}{3}$ ($l_1$の逆数に符号マイナスをつけたもの). $l_2$はA$(-\frac{3}{2},-2)$を通るから
$l_2$:$y=\frac{2}{3}(x-(-\frac{3}{2}))-2=\frac{2}{3}x-1$ 交点Hの座標は,$l_1$と$l_2$を連立して解く $-\frac{3}{2}x+1=\frac{2}{3}x-1$ $2=\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}x$
$12=4x+9x$ $12=13x$ $x=\frac{12}{13}$ $y=\frac{2}{3}\times\frac{12}{13}-1=\frac{8}{13}-1=-\frac{5}{13}$ ∴$H(\frac{12}{13},-\frac{5}{13})$

例4 $|x-1|=|2x+3|$ を解け.(数には,虚数※というものもありますが,今は,全て実数として捉えます.)

• $|A|=|B| \Leftrightarrow A=B$ or $A=-B$ ($B=A$ or $B=-A$も同じこと,$A=\pm B$とかきます.)

• $|A|=B$ のときは,$B<0$ならばAそのものが存在しません.$B\geqq0$のとき$A=B$ or $A=-B$です.一般に$|A|=B$とあるとき$B\geqq0$を前提とします.例えば$|x|=-1$のとき$x$は解なし $|x|=1$のとき$x=1$ or $x=-1$(これを$x=\pm1$とかく)
高校では,"場合分け"という重要なことを習います.それは,さておき,上の事実を有難ぁ~く頂載することとします.

• $\sqrt{A^2}=|A|$ ついでに,例えば $|1-x|=|-(x-1)|=|(-1)\times(x-1)|=|-1|\times|x-1|=1\times|x-1|=|x-1|$
$\sqrt{(2-t)^2}=3$ のとき $|2-t|=3 \Leftrightarrow |t-2|=3 \Leftrightarrow t-2=3$ or $t-2=-3 \Leftrightarrow t=5$ or $t=-1$

(カイ) $x-1=2x+3$ or $x-1=-(2x+3)=-2x-3 \Leftrightarrow -4=x$ or $3x=-2 \Leftrightarrow x=-4$ or $x=-\frac{2}{3}$

※虚数とは根号(ルート)の中が負の数のことです.$\sqrt{-1}=i$と定義し,例えば$\sqrt{-3}=\sqrt{3\times(-1)}=\sqrt{3}\times\sqrt{-1}=\sqrt{3}i$です.
虚数に,大小関係はありません.($2i>3i$, $2i<3i$ということはない)不等式がある場合実数のみを取扱う.

背理法など

(例1.5) $x^2=1$ をとけば、$x=1$ または $x=-1$ これを $x=\pm 1$ とかく. $x^2=4$ をとけば $x=2$ または $x=-2$ $x=\pm 2$

$x^2=2$ をとけば、$x=1.414\cdots$ または $x=-1.414\cdots$ であり、いつまでも続く数で分数にすることができません。

そこで、$1.414\cdots=\sqrt{2}$（ルート2）とかくことにしました. $x^2=2$ の解は $x=\pm\sqrt{2}=\pm 1.414\cdots$ です. $(\pm\sqrt{2})^2=2$

$x^2=3$ の解は、$x=\pm\sqrt{3}$ $x^2=5$ の解は、$x=\pm\sqrt{5}=\pm 2.236\cdots$ $x^2=6$ の解は $x=\pm\sqrt{6}=\pm\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\pm 2.44949\cdots$

$x^2=7$ の解は $x=\pm\sqrt{7}=\pm 2.64575\cdots$ $x^2=8$ の解は $x=\pm\sqrt{8}=\pm\sqrt{2^2\times 2}=\pm\sqrt{2^2}\times\sqrt{2}=\pm 2\sqrt{2}=\pm 2.282\cdots$

$x^2=12$ の解は $x=\pm\sqrt{12}=\pm\sqrt{2^2\times 3}=\pm\sqrt{2^2}\times\sqrt{3}=\pm 2\sqrt{3}$, $x^2=\frac{1}{2}$ の解は $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$(\sqrt{2})^2=\sqrt{2^2}$, $x^2=2028$ の解は $x=\pm\sqrt{2028}=\pm\sqrt{3\times 2^2\times 13^2}=\pm\sqrt{3\times(2\times 13)^2}=\pm\sqrt{26^2\times 3}=\pm 26\sqrt{3}$ 先にP.15の(7)下へ

---

$-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\pi\cdots$ など、いつまでも続く数で、分数にできない数を無理数といいます. $0.333\cdots=0.\dot{3}=\frac{1}{3}$ ですから無理数でなく有理数です. 高校で習うことになりますが、次の事は、知識程度に留めておいて下さい.

ルート($\sqrt{\ }$, 根号)の中が負のときもあります. $x^2=-1$ の解は、$x=\pm\sqrt{-1}=\pm i$ とかきます. $\sqrt{-1}=i$ です. これを虚数といいます. $x^2=-2$ の解は、$x=\pm\sqrt{-2}=\pm\sqrt{2\times(-1)}=\pm\sqrt{2}\times\sqrt{-1}=\pm\sqrt{2}i$ $x^2=-12$ の解は、$x=\pm\sqrt{-12}=\pm\sqrt{12}i=\pm 2\sqrt{3}i$

全ての数(複素数)は、実数と虚数($i$が入っている数)があるということです. 実数は、有理数と無理数があります. 有理数は、整数と分数(分数にできる小数も含まれる)がある. 更に、整数は、正の整数(自然数)と0と負の整数の3種類がある. ここで、有名な証明方法を1つ覚えてもらいます. 背理法といいます. 高校では、重要です. 数学の規則の概念(定義、定理など)がわかっていないと証明できません. $\sqrt{2}$ が無理数の証明は教科書.

- 「2, 3, 4の長さで、三角形ができることを示し、この三角形は、直角三角形でないことを証明せよ.」詳しくします.

  (カイ) $a, b, c$ で3角形ができるためには、$a>0, b>0, c>0$, $|a-b|<c<a+b$（どの数が、中央でもOK）

  最大辺が $a$ とわかっているときには、$a>0, b>0, c>0$, $a<b+c$ でよい

  2, 3, 4 は全て正であり、最大が4である. $4<2+3$ が成立するから、三角形ができる.

  三角形の分け方の1つには「直角三角形である」かまたは「直角三角形でない」がある.

  (その1) 直角三角形では、斜辺が最大であり、三平方の定理(斜辺の2乗は、他の2辺のそれぞれの平方の和に等しい)が成り立つ. 2, 3, 4 で、できる三角形が、直角三角形であるとする. $4^2=2^2+3^2$ が成立する.
  左辺 $4^2=16$, 右辺 $=2^2+3^2=13$ であるから、不合理である. これは、2, 3, 4 で、できる三角形が、直角三角形であるとしたことから、導き出された矛盾である. よって背理法により、示された.

  (補) 実際には、このような(その1)はしません. (その2)です.

  (その2) 最大辺4の平方 $4^2=16$, 他の二辺のそれぞれの平方の和 $=2^2+3^2=13$ であるから、三平方の定理は、成り立たない. ($4^2\neq 2^2+3^2$) よって、直角三角形でない.

- 「三角形の3つの内角のうち少なくとも1つは60°以上であることを証明せよ.」

  3角形の3つの内角をそれぞれ $a°, b°, c°$ とすると、$a°+b°+c°=180°$, 60°の大きさで分けると、次の4つの場合があります. (i) 全ての角が60°より小さい (ii) 2つの角が60°より小さい かつ 残りの1つの角が60°以上.
  (iii) 1つの角が60°より小さい かつ 残り2つの角が60°以上 (iv) 全ての角が60°以上

  少なくとも1つが60°以上とは、(ii) または (iii) または (iv) の場合です. (i) とすると、不合理であることを示せばよいということになります. (iv) 全ての角が60°以上とは ($a°=60°$ または $a°>60°$) かつ ($b°=60°$ または $b°>60°$) かつ ($c°=60°$ または $c°>60°$) ということですから、このときは $a°+b°+c°=180°$ から $a°=b°=c°=60°$ のときと全く同じことになります.

  (カイ) 3つの内角全てが60°より小さいとすると、3つの内角の和は180°より小さい となる. これは、三角形の内角の和が、丁度180°であることに矛盾する. したがって背理法により題意がいえる.

(・「$\sqrt{2}$ は無理数である」の証明は、背理法では有名ですが、あえてかきませんでした.)

かけはし



(カイ.2) $0^\circ < a^\circ \leqq b^\circ \leqq c^\circ < 180^\circ$ と仮定しても一般性は、失われない。(最大角 $c^\circ$ は他の2角より大きいかまたは等しい)

$c^\circ \geqq a^\circ$ かつ $c^\circ \geqq b^\circ$ かつ $c^\circ \geqq c^\circ$ であるから辺々たせば $3c^\circ \geqq a^\circ + b^\circ + c^\circ = 180^\circ$ ∴ $c^\circ \geqq 60^\circ$ すなわち、最大角は、必ず $60^\circ$ 以上であることが示された。よって、題意が成り立つ。

- 「$x, y$ が実数, $x^2+y^2=0$ ならば、$x=y=0$ であることを証明せよ。」

$x=y=0 \Leftrightarrow x=0$ かつ $y=0$, Aが実数ならば $A^2 \geqq 0$, Bが虚数ならば、例えば、$B=\sqrt{-2}=\sqrt{2}i$ のとき $B^2=-2<0$ となります。背理法を用いると、用いることができる数式が1つふえます。

(カイ.1) $x$ は実数であるから、$x^2 \geqq 0$, $x \neq 0$ とすると $x^2>0$, $x^2+y^2=0$ より $y^2=-x^2<0$ となる。ところが、$y$ は実数であるから、$y^2 \geqq 0$ でなければならない。これは、$x \neq 0$ としたことから導き出された矛盾である。

よって(背理法により) $x=0$ このとき $x^2+y^2=0$ に $x=0$ を代入して $y=0$ すなわち $x=y=0$

(カイ2) $x, y$ は実数だから、$x^2 \geqq 0$ かつ $y^2 \geqq 0 \Leftrightarrow$ ($x^2>0$ かつ $y^2>0$) または ($x^2>0$ かつ $y^2=0$) または ($x^2=0$ かつ $y^2>0$) または ($x^2=0$ かつ $y^2=0$) この4つの場合のうち $x^2+y^2=0$ をみたすのは、($x^2=0$ かつ $y^2=0$) の場合に限られる。∴ $x=0$ かつ $y=0$ ∴ $x=y=0$

- 「$a, b$ が有理数, $\sqrt{c}$ が無理数または虚数とする。$a+b\sqrt{c}=0$ ならば、$a=b=0$ であることを証明せよ」

(カイ) $b \neq 0$ とすると $a+b\sqrt{c}=0$ $b\sqrt{c}=-a$ $\sqrt{c}=-\frac{a}{b}$ 左辺 $\sqrt{c}$ は無理数または虚数であるが、右辺 $-\frac{a}{b}$ は、$a, b$ が有理数だから有理数、となり不合理。$b \neq 0$ としたことから出た矛盾。よって $b=0$ $a+b\sqrt{c}=0$ に $b=0$ を代入して $a=0$ すなわち $a=b=0$

- 「(1) $x$ が奇数ならば、$x^2$ は奇数であることを証明せよ (2) $x^2$ が奇数ならば、$x$ が奇数であるは真か偽か。」(正しいことを真(シン)、正しくないことを偽(ギ)という)、真ならば、それを証明し、偽ならば、どのような条件を加えれば、真となるかを示し、それを証明せよ。(3) $a, b, c$ が整数, $a^2+b^2=c^2$ のとき、$a, b, c$ のうち少なくとも1つは偶数であることを証明せよ

(カイ) (1) $x=2n+1$, $n$ は整数 とおける。$x^2=(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4(n^2+n)+1$ $n^2+n$※ は整数であり、これに偶数4をかけた $4(n^2+n)$ は偶数 したがって これに1をたした $x^2=4(n^2+n)+1$ は奇数である。

(2) $x=\sqrt{3}$ を入れると $x^2=3$ となり奇数であるが $x=\sqrt{3}$ は奇数ではない($x$ は無理数) よって偽である。

条件 $x$ は整数 を加えて、「$x$ が整数, $x^2$ が奇数ならば $x$ は奇数であることを証明せよ」とする。

証明: $x$ が整数、$x^2$ が奇数のとき $x$ が偶数であるとする。$x$ が偶数だから $x^2$ は偶数であるが、これは、条件 $x^2$ が奇数に反する。よって背理法により、$x$ は奇数である。

(3) $a, b, c$ が整数、$a^2+b^2=c^2$ のとき $a, b, c$ 全てが奇数であるとする。(1)により、$a^2, b^2, c^2$ 全て奇数である。左辺 $a^2+b^2$ は 奇数+奇数=偶数 であるが、右辺 $c^2$ は奇数であるから、偶数=奇数となって不合理。

よって背理法により'$a, b, c$ 全てが奇数である'は、間違いであることがわかった。証明できた。

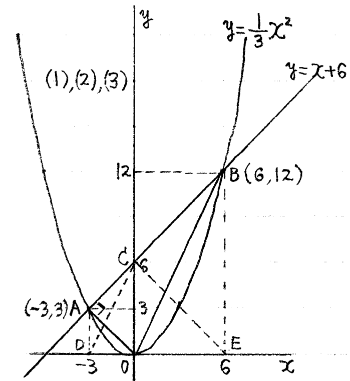
※ $n^2+n=n(n+1)$ は、連続する2つの整数だから、$n$, $n+1$ のいずれか一方は必ず偶数(他方は奇数) したがって、積 $n(n+1)$ は必ず偶数であり、4をかけてなくても1をたしたら奇数となります。詳しくすると、$x^2=4(n^2+n)+1=4n(n+1)+1$ は $n(n+1)$ は2の倍数(偶数), $4n(n+1)$ は8の倍数、ですから、$x$ が奇数のとき $x^2$ を8でわると必ず余りが1になるということです。

無理数が現れる(解)を今から、しますので、少しだけ $\sqrt{\ }$ (ルート)についてかいてからと思いましたが、教科書に、無理数であることの証明らしきものがありました(背理法)ので、まとめてみました。[類4]の(解)を得るために、この頁及び前頁の後半は、必要ありません。「$\sqrt{2}$ が無理数である」ことの証明は、教科書、参考書、全てに載っています。

定三角定規のまとめ(下の方)

(解) (1) C：$y=ax^2$ とおく. B(6,12)がC上にあるから $12=a\times6^2=36a$, $a=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$ ∴C：$\underline{y=\frac{1}{3}x^2}$

A(−3,⊡)はC上にあるから ⊡ $=\frac{1}{3}\times(-3)^2=\underline{3}$ ∴A(−3,3)




(2) $\underline{y}=\frac{12-3}{6-(-3)}(x-6)+12=\frac{9}{9}(x-6)+12=\underline{x+6}$

(3) (カイ1) 右図、等積変形により、$\triangle AOB=\triangle CDE=\frac{1}{2}\times DE\times OC=\frac{1}{2}\times9\times6=\underline{27}$

(カイ2) $\triangle AOB=$台形ADEB$-\triangle AOD-\triangle BOE=\frac{(3+12)\times9}{2}-\frac{3\times3}{2}-\frac{6\times12}{2}=\underline{27}$

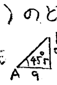
(カイ3) OAの傾きは−1 (OA：$y=-x$), ABの傾きは1 (AB：$y=x+6$)なので

$OA\perp AB$　$AB=\sqrt{(-3-6)^2+(3-12)^2}\overset{※}{=}\sqrt{9^2+9^2}=\sqrt{2\cdot9^2}=9\sqrt{2}$

$OA=3\sqrt{2}$ (∵△AODは45°,45°,90°の定三角定規 $1:1:\sqrt{2}$, AD=OD=3)

よって $\triangle AOB=\frac{1}{2}\times OA\times AB=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times9\sqrt{2}=\underline{27}$

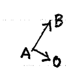
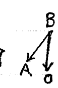
(補)※$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$のとき $\underline{AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}$ (3平方の定理)　$(x_1-x_2)^2=(x_2-x_1)^2$, $(y_1-y_2)^2=(y_2-y_1)^2$

公式を使わなくても  ですから $AB=9\sqrt{2}$ です. 2点間の距離の公式を覚えて下さい.

(カイ4)(高校内容. P.15の(3)参照) 知っていると便利です. 暗記するならば、確実に暗記する.

$\overrightarrow{OA}=(-3,3)$, $\overrightarrow{OB}=(6,12)$　$\triangle AOB=\frac{1}{2}|3\times6-(-3)\times12|=\frac{1}{2}|18+36|=\frac{1}{2}\times54=27$ $\left(\frac{1}{2}|(-3)\times12-3\times6|=\frac{1}{2}\times|-54|=27\right)$

(補)次のようにもできます. O(0,0), A(−3,3), B(6,12)

- $\overrightarrow{AO}=(0-(-3),0-3)=(3,-3)$, $\overrightarrow{AB}=(6-(-3),12-3)=(9,9)$　$\triangle AOB=\frac{1}{2}|9\times3-9\times(-3)|=27$ 
- $\overrightarrow{BA}=((-3)-6,3-12)=(-9,-9)$, $\overrightarrow{BO}=(0-6,0-12)=(-6,-12)$　$\triangle AOB=\frac{1}{2}|(-12)\times(-9)-(-6)\times(-9)|=\frac{1}{2}\times|54|=27$ 

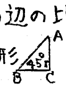
$(a,b),(c,d)$のとき $S=\frac{1}{2}|ad-bc|=\frac{1}{2}|bc-ad|$ (上のカイは絶対値の中が正になるように計算しました.)

(補)高校生で、すぐに(カイ4)をやってしまう人がいます. 難関大入試では、図形を利用する問題がよく出題されます.
図形を大切にして下さい.(vector, 3角では、特に円絡みの図形が大切です) いろいろと解法は、知っているが、
(カイ4)を用いて、計算だけで解をすすめる方が、easyなとき用います. 中学生には、recommendationしません.

---

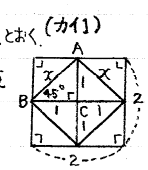
(解)(4)の前に定三角定規についてまとめます.(先に必ず、P.15の(9)波線部下の条件分析を理解する.) (解)(4)はP.15の(12)

[I] 45°,45°,90°の直角二等辺三角形の辺の比は、$1:1:\sqrt{2}$ であることを証明せよ

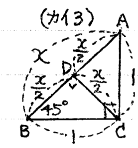
(カイ1) 45°,45°,90°の直角二等辺三角形  は、全て相似だから、AC=BC=1としても一般性は失われない. AB=$x$とおく.

右図、小さい方の正方形の面積×2＝大きい方の正方形の面積 だから $x^2\times2=2^2$ $x^2=2$ $x>0$ ∴$x=\sqrt{2}$

すなわち、$1:1:\sqrt{2}$ がいえた.




(カイ2)((カイ1)の1行目をかいて) 三平方の定理より、$AB^2=AC^2+BC^2=1^2+1^2=2$　$AB>0$ より $AB=\sqrt{2}$ ∴$1:1:\sqrt{2}$ がいえた.



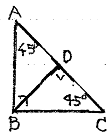

(カイ3)((カイ1)の1行目をかいて) 右図、点Cから辺ABに垂線CDをおろす. △ADC≡△BDC(一辺2角相等)

(AB=$x$とおく) $AD=BD=CD=\frac{x}{2}$　△ABCの面積$=\frac{1}{2}\times AB\times CD=\frac{1}{2}\times BC\times AC$

$\frac{1}{2}\times x\times\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\times1\times1$　$x^2=2$　$x>0$だから $x=\sqrt{2}$　すなわち $1:1:\sqrt{2}$ がいえた

(補)'ABの中点を点Dとする'から始めても同様なことです. (直角)二等辺三角形の頂角から、底辺へ垂線をおろせば、
底辺を2等分することは、用いてもいいです.(証明せよとあったらダメです. 上では、△ADC≡△BDCをかいておきました.)
∠C=90°だから、辺ABの中点Dを中心とする点A,点B,点Cを通る円(外接円、直径AB)がかける. AC=BCだから
∠ADC=∠BDC=90° から始めることもできます. $1:\sqrt{3}:2$ の直角三角形に利用できそうですが------

下図の直角二等辺三角形ABC（$\angle A=\angle C=45^\circ$, $\angle B=90^\circ$）のとき、①〜⑦に答えよ.（$BD\perp AC$とする）




① $AB=BC=1$ のとき $BD=\square$

(カイ1) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times AC\times BD=\frac{1}{2}\times AB\times BC$　$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times BD=\frac{1}{2}\times 1\times 1$　∴ $BD=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(カイ2) $BD=AC\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ （∵ $AD=CD=BD$）

(カイ3) $AB(=BC):BD=\sqrt{2}:1$　$1:BD=\sqrt{2}:1$　$\sqrt{2}\times BD=1\times 1$　∴ $BD=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(カイ4) 三平方の定理より $AD^2+BD^2=AB^2$, $AD=BD$　$2\times BD^2=1^2=1$, $BD^2=\frac{1}{2}$, $BD>0$　∴ $BD=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

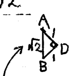
② $AB=BC=2$ のとき $BD=\square$


(カイ) $AB=BC=1$ のとき $AC=\sqrt{2}$ だから $AC$は$AB(=BC)$の$\sqrt{2}$倍，この問いでは$AB=BC=2$ だから $AC=2\sqrt{2}$

$BD=AC\times\frac{1}{2}=2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\sqrt{2}$ （∵ $AD=CD=BD$）

(カイ) $AB(=BC):BD=\sqrt{2}:1$　$2:BD=\sqrt{2}:1$　$\sqrt{2}\times BD=2\times 1$　$BD=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

③ $AC=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき　$AB=BC=$ ア　$BD=$ イ



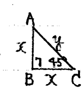

(カイ) $BD=AC\times\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2\times 3}=\frac{\sqrt{3}}{6}=$ イ，$BD=1$ のとき $AB(=BD)=\sqrt{2}$ だから$AB$は$BD$の$\sqrt{2}$倍

∴ $AB=BD\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{6}=$ ア

(カイ) $AB:AC=1:\sqrt{2}$　$\sqrt{2}\times AB=AC=\frac{1}{\sqrt{3}}$　$AB=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}=BC=$ ア

$BD=AC\times\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}=$ イ

④ $AB+AC=2$ のとき　$BC=\boxed{x}$, $AC=\boxed{y}$




(カイ1) $AC(=y)$は, $BC=AB(=x)$の$\sqrt{2}$倍（$BC(=AB):AC=1:\sqrt{2}$）$y=\sqrt{2}x$ と $x+y=2$ を連立

$x+\sqrt{2}x=2$　$x(1+\sqrt{2})=2$　$x=\frac{2}{\sqrt{2}+1}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$※$=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2})^2-1^2}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{2-1}=2(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}-2$

$y=\sqrt{2}x=\sqrt{2}\times 2(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=2(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}=2\times 2-2\sqrt{2}=4-2\sqrt{2}$

(補)※ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$（公式）　$\boxed{(a+b)}(a-b)=\boxed{(a+b)}a-\boxed{(a+b)}b=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$

ついでに、結果から $AB(=BC):AC=\cancel{2}(\sqrt{2}-1):\cancel{2}(2-\sqrt{2})=(\sqrt{2}-1):(2-\sqrt{2})=\cancel{(\sqrt{2}-1)}:\sqrt{2}\cancel{(\sqrt{2}-1)}=1:\sqrt{2}$

(カイ2) $AB:BC:AC=1:1:\sqrt{2}$ だから $AB(=BC)$は, 全周$(AB+BC+AC)$の $\frac{1}{1+1+\sqrt{2}}$ 倍

$AB(=BC)=(AB+BC+AC)\times\frac{1}{1+1+\sqrt{2}}$, $x=(x+x+y)\times\frac{1}{2+\sqrt{2}}$, $x=(x+2)\times\frac{1}{2+\sqrt{2}}$ （∵ $x+y=2$）

$(2+\sqrt{2})x=x+2$　$(2+\sqrt{2})x-x=2$　$(2+\sqrt{2}-1)x=2$　$(\sqrt{2}+1)x=2$　以下(カイ1)に同じ

(カイ3) 三平方の定理より, $AC^2=AB^2+BC^2$　$y^2=x^2+x^2=2x^2=(\sqrt{2}x)^2$　$y=\pm\sqrt{2}x$ であるが $x>0$, $y>0$ なので

$y=\sqrt{2}x$　以下(カイ1)に同じ　(補) $A^2=B^2 \Leftrightarrow A=\pm B$ or $B=\pm A$

⑤ $AB+BC+AC=2$ のとき　$AB=BC=\boxed{x}$, $AC=\boxed{y}$

(カイ) $AB:BC:AC=1:1:\sqrt{2}$ だから $AB(=BC)$は全周$(AB+BC+CA)$の $\frac{1}{1+1+\sqrt{2}}$ 倍

$AB(=BC)=(AB+BC+CA)\times\frac{1}{1+1+\sqrt{2}}$　$x=2\times\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{2(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\frac{2(2-\sqrt{2})}{2^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{2(2-\sqrt{2})}{4-2}=2-\sqrt{2}$

$AC=AB\times\sqrt{2}$　$y=\sqrt{2}x=\sqrt{2}(2-\sqrt{2})=2\sqrt{2}-(\sqrt{2})^2=2\sqrt{2}-2$

(カイ) $y=\sqrt{2}x$ と $2x+y=2$ を連立. $2x+\sqrt{2}x=2$　$(2+\sqrt{2})x=2$　$x=\frac{2}{2+\sqrt{2}}$　以下,上(カイ)に同じ

⑥ 直角二等辺三角形の面積が24のとき $AB=BC=\boxed{x}$, $AC=\boxed{y}$

(カイ) $\frac{1}{2}\times AB\times BC=24$　$\frac{x^2}{2}=24$　$x^2=2\times 24=2\times 8\times 3=16\times 3$　$x>0$ だから $x=\sqrt{16\times 3}=\sqrt{4^2\times 3}=4\sqrt{3}$

$AC=AB\times\sqrt{2}=4\sqrt{3}\times\sqrt{2}=4\sqrt{6}=y$

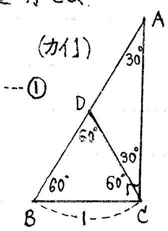
⑦ 直角二等辺三角形の面積が2028のとき　$AB=BC=\boxed{x}$, $AC=\boxed{y}$

(カイ) $\frac{x^2}{2}=2028=4\times 507=4\times 3\times 169=3\times 2^2\times 13^2$　$x^2=2\times 3\times(2\times 13)^2$　$x>0$ だから $x=\sqrt{6\times 26^2}=26\sqrt{6}$

$y=\sqrt{2}x=\sqrt{2}\times 26\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}=2\times 26\times\sqrt{3}=52\sqrt{3}$

(補) ついでに $2028=2^2\times 3\times 13^2$ の約数の個数は $(3\times 2\times 3)\times 2=4\times 9=36$ 個

[II] $\angle A=30°$, $\angle B=60°$, $\angle C=90°$ の直角三角形の辺の比は、$BC:AC:AB=1:\sqrt{3}:2$ であることを証明せよ




(カイ1) 全て相似な三角形なので、$BC=1$ としても一般性は失われない

$\angle BCD=60°$ となる点Dを辺AB上にとる. $\triangle DBC$ は、正三角形となる. $\therefore BD=CD=BC=1$ ---①

$\triangle ACD$ は底角が$30°$である二等辺三角形だから、$CD=AD$ ---②

①,②より $AD=BD=BC=1$ よって $AB=AD+BD=1+1=2$

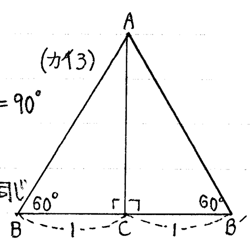
三平方の定理より、$AC^2=AB^2-BC^2=2^2-1^2=3$ $AC>0$ だから $AC=\sqrt{3}$

よって $BC:AC:AB=1:\sqrt{3}:2$ が示された

(別カイ)(AB=2を求めるまでは同じ) 中線定理を用いると $AC^2+BC^2=2(AD^2+CD^2)$

$AC^2+1^2=2(1^2+1^2)=4$ $AC^2=3$ $AC>0$ だから $AC=\sqrt{3}$

(カイ2)((カイ1)の1行目をかいて) $\angle C=90°$なので、円の性質により、ABの中点Dを中心とし、ABを直径とする点Cを通る円がかける.($\triangle ABC$の外接円という) よって $AD=CD=BD$, $\triangle DBC$は、$BD=CD$の二等辺三角形であり $\angle B=60°$から、正三角形DBCとなる. よって $AB=AD+BD=BC+BC=1+1=2$ 以下(カイ1)に同じ.




(カイ3)((カイ1)の1行目をかいて) 右図、ACを軸にして線対称な直角三角形$AB'C$をかく.

($\triangle ABC$をACを軸にして折り曲げた$\triangle AB'C$をかく) $\triangle ABC\equiv\triangle AB'C$, $\angle ACB=\angle ACB'=90°$ だから、点B,点C,点B′は一直線上にある. $BC=B'C=1$ より $BB'=2$, $AB=AB'$と $\angle ABC=\angle AB'C=60°$ より $\triangle ABB'$は正三角形. よって $AB=BB'(=AB')=2$ 以下(カイ1)に同じ

---

ここで(カイ4)をする前に、[I],[II]の証明をどのように捉えていくのかをかいておきます.(カイ)を見て、単に納得するだけでは、他の証明問題に活かされません. まず、条件分析から始めます.

[I]について. 直角二等辺三角形とかいてありますが、単に3つの角が45°,45°,90°の三角形とかいてあっても同じことです.

証明するのに$\triangle ABC$を自分で設定してかかなければなりません. 三角形の大きさも、自分で設定しなければなりません. そこで1行目をかくことになります.(そうでなければ、$AC=BC=\ell(>0)$ とかいて、ABの長さを求めることになる.)

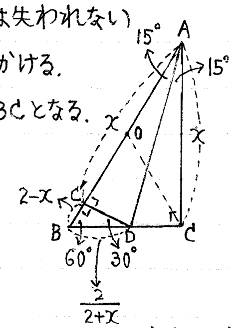
この場合 ①$\triangle ABC$は直角三角形,②$\triangle ABC$は、底角が等しいから二等辺三角形 ①,②をみたすものとして$AC=BC=1$ $\angle C=90°$を設定したということです. $AC=BC=1$ は②の条件をみたしていますので、次に①の条件を用いて、三平方の定理に持ち込んだということです.(カイ3)で、$\triangle ADC\equiv\triangle BDC$なので $AD=BD=CD=\frac{x}{2}$ がいえたので、中線定理(Black Vol.I, P.61)を用いても、$AC(=x)$は求まります.

[II]について. ①$\triangle ABC$は直角三角形 ②直角三角形ABCの直角でない角について、$\angle A=30°$,$\angle B=60°$は、決まっている.

②の条件を分析した結果として、(カイ1)(カイ2)(カイ3)のように、まず、$AB=2$が確定し、①の条件に三平方の定理または、中線定理を用いて、$AC=\sqrt{3}$を求めたということです. ②の条件をもう少し分析すると、30°,60°の関係は $30°\times2=60°$(あるいは、$60°\div2=30°$)から、$\angle B=60°$の角の二等分線をひくと、どうなるだろうということになります. するとさまざまなことが見えてきます. これを、更に分析していくと、三平方の定理を用いなくても、$AC=\sqrt{3}$が求まります. 中1,中2,中3(1学期まで?)のときに、できるだけ、沢山の(解)を考えて、定理,数式の用い方に慣れ、暗記するものは暗記する(特に、図形では多いです)姿勢が、君の計算力、数学力を高めます.

それでは、(カイ4)は、どのようになるでしょうか. 上述のことをヒントにして、考えてみて下さい. 次頁を見ないで考えること.

(カイ4) $\angle A=30^\circ, \angle B=60^\circ, \angle C=90^\circ$ の直角三角形は全て相似なので $BC=1$ としても一般性は失われない




$\angle C=90^\circ$ なので、円の性質により、ABの中点Oを中心とする、点A,点B,点Cを通る円がかける。

$OB=OC$ より、$\triangle OBC$ は、二等辺三角形であるが、$\angle OBC=\angle OCB=60^\circ$ なので、正三角形OBCとなる。

よって、$BC=OB=OC=OA=1$ ∴ $AB=OA+OB=2$

$\angle A$ の二等分線と辺BCの交点をD,点Dから辺ABへおろした垂線のあしを点C′とする。

直角三角形ADC ≡ 直角三角形ADC′（∵AD共通, $\angle CAD=\angle C'AD=15^\circ$, $\angle ADC=\angle ADC'=75^\circ$）

$AC=x$ とする。$AC=AC'=x$ だから $BC'=AB-AC'=2-x$ ---①

$\triangle DBC'$ は、$\angle BDC'=30^\circ, \angle DBC'=60^\circ, \angle BC'D=90^\circ$ の直角三角形，直角三角形ABCで、$AB:BC=2:1$ は示されたので

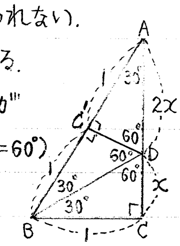
$\triangle ABC \backsim \triangle DBC'$ である直角三角形DBC′にも、これが適用できる。すなわち $BD=2\times BC'$ ---②

角の二等分線の定理より、$AB:AC=BD:CD=2:x$ であり、$BC=1$ であることから $BD=BC\times\frac{2}{2+x}=\frac{2}{2+x}$ ---③

よって、①,②,③より、$\frac{2}{2+x}=2\times(2-x)$　$(2-x)(2+x)=1$　$2^2-x^2=1$　$4-1=x^2$　$x^2=3$　$x>0$ だから $x=\sqrt{3}$

∴求める辺の比は $BC:AC:AB=\underline{1:\sqrt{3}:2}$（始めに、辺の比に2を出して、それを利用した、ということです。）

(カイ5) $\angle A=30^\circ, \angle B=60^\circ, \angle C=90^\circ$ の直角三角形は、全て相似なので $BC=1$ としても一般性は失われない。




$\angle B(=60^\circ)$ の二等分線と辺ACの交点をD、点Dから辺ABへおろした垂線のあしを点C′とする。

$\triangle BCD$ と $\triangle BC'D$ は、BD共通，$\angle CBD=\angle C'BD(=30^\circ)$, $\angle BDC=\angle BDC'(=60^\circ)$、一辺とその両端の角が

それぞれ等しいので、$\triangle BCD \equiv \triangle BC'D$ ---①　$\triangle BC'D$ と $\triangle AC'D$ は、DC′共通、$\angle BDC'=\angle ADC'(=60^\circ)$

$\angle BC'D=\angle AC'D(=90^\circ)$、一辺とその両端の角がそれぞれ等しいので $\triangle BC'D \equiv \triangle AC'D$ ---②

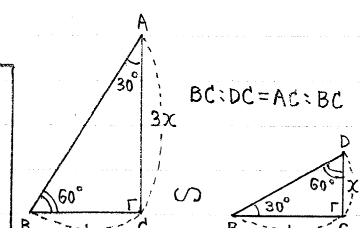
①,②より、$BC=BC'=AC'=1$　したがって $AB=AC'+BC'=2$。(ここから三平方の定理を用いないで解をすすめます。) $CD=x$ とおけば、角の二等分線の定理より、$BC:AB=CD:AD$　$1:2=x:AD$ ∴ $AD=2x$

$\triangle ABC \backsim \triangle BDC$ なので $BC:DC=AC:BC$　$1:x=3x:1$　$3x^2=1$　$x^2=\frac{1}{3}$　$x>0$ ∴ $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ∴ $AC=3x=3\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

よって $BC:AC:AB=1:\sqrt{3}:2$ が証明できた。

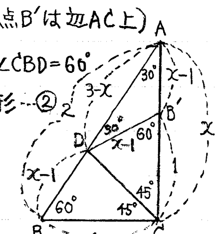
(カイ4)(カイ5)に共通なこと、まず、$AB=2$ を求めて、角の二等分線の利用でした。

もう1つの角の二等分線は、？(カイ4)、(カイ5)、と違うかき方をしてみました。




(カイ6) $AB=2$ を求めるまでは、(カイ4)と同じ、$\angle C$ の二等分線と辺ABの交点をD，

CDを対称の軸として、$\triangle BCD$ を折り曲げた三角形を $\triangle B'CD$（$\angle BCD=\angle ACD=45^\circ$ なので、点B′は辺AC上）




$\triangle BCD \equiv \triangle B'CD$ ---①　$\triangle AB'D$ の外角 $\angle CB'D=\angle DAB'+\angle ADB'=30^\circ+\angle ADB'$，①より、$\angle CB'D=\angle CBD=60^\circ$

なので $60^\circ=30^\circ+\angle ADB'$ ∴ $\angle ADB'=30^\circ=\angle DAB'$ 底角($30^\circ$)が等しいので $\triangle AB'D$ は二等辺三角形 ---②

$AC=x$ とおけば、$AB'=AC-B'C=x-1$（∵①より、$BC=B'C=1$）

②,①より、$AB'=B'D=BD=x-1$，$AD=AB-BD=2-(x-1)=3-x$（右図のようになる。）

角の二等分線の定理より、$BC:AC=BD:AD$　$1:x=(x-1):(3-x)$

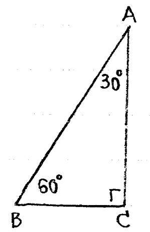
$x(x-1)=3-x$　$x^2-x=3-x$　$x^2=3$　$x>0$ だから $x=\sqrt{3}$　よって $BC:AC:AB=1:\sqrt{3}:2$

(補) $AB'=x$ とおいたらどうなるか、$AC=x+1$，$BD=B'D=AB'=x$，$AD=2-x$　$1:x+1=x:2-x$

$x(x+1)=2-x$　$x^2+x=2-x$　$x^2+2x-2=0$　$x=-1\pm\sqrt{3}$　$x>0$ なので $x=-1+\sqrt{3}=\sqrt{3}-1$

$AC=x+1=(\sqrt{3}-1)+1=\sqrt{3}$，(カイ4)(カイ5)も、軸にして、折り曲げれば、合同は明らかですね。

下図の直角三角形ABC($\angle A=30^\circ, \angle B=60^\circ, \angle C=90^\circ$)のとき①～⑩に答えよ



$AC=BC\times\sqrt{3}$, $AB=BC\times 2$ ですから、まずBCを求めることを考えると、わかりやすいです.

① $BC=2$ のとき $AB=\boxed{\text{ア}}$, $AC=\boxed{\text{イ}}$

(かい) $AB=BC\times 2=2\times 2=4=\boxed{\text{ア}}$, $AC=BC\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}=\boxed{\text{イ}}$

② $BC=\sqrt{3}$ のとき $AB=\boxed{\text{ア}}$, $AC=\boxed{\text{イ}}$

(かい) $AB=BC\times 2=2\sqrt{3}=\boxed{\text{ア}}$, $AC=BC\times\sqrt{3}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3=\boxed{\text{イ}}$

③ $AB=3$ のとき $AC=\boxed{\text{ア}}$, $BC=\boxed{\text{イ}}$　(かい) $AB=BC\times 2$　$3=2\times BC$　$BC=\frac{3}{2}=\boxed{\text{イ}}$　$AC=BC\times\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}=\boxed{\text{ア}}$

④ $AB=\sqrt{2}$ のとき $AC=\boxed{\text{ア}}$, $BC=\boxed{\text{イ}}$　(かい) $AB=BC\times 2$　$\sqrt{2}=2\times BC$　$BC=\frac{\sqrt{2}}{2}=\boxed{\text{イ}}$　$AC=BC\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{6}}{2}=\boxed{\text{ア}}$

⑤ $AC=2$ のとき $AB=\boxed{\text{ア}}$, $BC=\boxed{\text{イ}}$　(かい) $AC=BC\times\sqrt{3}$　$2=\sqrt{3}\times BC$　$BC=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}=\boxed{\text{イ}}$　$AB=BC\times 2=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times 2=\frac{4\sqrt{3}}{3}=\boxed{\text{ア}}$

⑥ $AC=\sqrt{2}$ のとき $AB=\boxed{\text{ア}}$, $BC=\boxed{\text{イ}}$　(かい) $AC=BC\times\sqrt{3}$　$\sqrt{2}=\sqrt{3}\times BC$　$BC=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}=\boxed{\text{イ}}$　$AB=BC\times 2=\frac{\sqrt{6}}{3}\times 2=\frac{2\sqrt{6}}{3}=\boxed{\text{ア}}$

⑦ $AC=\frac{\sqrt{6}}{6}$ のとき $AB=\boxed{\text{ア}}$, $BC=\boxed{\text{イ}}$　(かい) $AC=BC\times\sqrt{3}$　$\frac{\sqrt{6}}{6}=\sqrt{3}\times BC$　$BC=\frac{\sqrt{6}}{6\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{6}=\boxed{\text{イ}}$, $AB=BC\times 2=\frac{\sqrt{2}}{6}\times 2=\frac{\sqrt{2}}{3}=\boxed{\text{ア}}$

⑧ $AC+BC=2$ のとき $AB=\boxed{\text{ア}}$, $BC=\boxed{\text{イ}}$, $AC=\boxed{\text{ウ}}$　(かい1) $BC=x$, $AC=\sqrt{3}x$, $\sqrt{3}x+x=2$　$(\sqrt{3}+1)x=2$　$x=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2-1}$

$BC=\sqrt{3}-1=\boxed{\text{イ}}$, $AC=\sqrt{3}x=\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)=3-\sqrt{3}=\boxed{\text{ウ}}$　$AB=2\times BC=2\sqrt{3}-2=\boxed{\text{ア}}$

(かい2) $AC:BC=\sqrt{3}:1$　$\therefore AC=(AC+BC)\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=2\times\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=2\times\frac{3-\sqrt{3}}{2}=3-\sqrt{3}=\boxed{\text{ウ}}$　$BC=2-AC=2-(3-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1=\boxed{\text{イ}}$

$AB=2\times BC=2(\sqrt{3}-1)=2\sqrt{3}-2=\boxed{\text{ア}}$

⑨ $AB+BC+AC=2$ のとき $AB=\boxed{\text{ア}}$, $BC=\boxed{\text{イ}}$, $AC=\boxed{\text{ウ}}$　(かい1) $BC=(AB+BC+CA)\times\frac{1}{2+1+\sqrt{3}}=2\times\frac{1}{3+\sqrt{3}}=\frac{2(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}$

$=\frac{2(3-\sqrt{3})}{9-3}=\frac{2(3-\sqrt{3})}{6}=\frac{3-\sqrt{3}}{3}=\boxed{\text{イ}}$　$AB=2\times BC=\frac{6-2\sqrt{3}}{3}=\boxed{\text{ア}}$

$AC=BC\times\sqrt{3}=\frac{(3-\sqrt{3})\times\sqrt{3}}{3}=\frac{3\sqrt{3}-3}{3}=\sqrt{3}-1=\boxed{\text{ウ}}$

(かい2) $BC=x$, $AB=2x$, $AC=\sqrt{3}x$

$2x+x+\sqrt{3}x=2$　$(3+\sqrt{3})x=2$　$x=\frac{2}{3+\sqrt{3}}$

以下(かい1)に同じ

⑩ $\triangle ABC=24$ のとき $AB=\boxed{\text{ア}}$, $BC=\boxed{\text{イ}}$, $AC=\boxed{\text{ウ}}$
(面積)　(ルートの中にルートがあることもあります.)

(かい) $BC=x$, $AC=\sqrt{3}x$, $AB=2x$, $\frac{BC\times AC}{2}=\triangle ABC$　$\frac{\sqrt{3}x^2}{2}=24$　$x^2=\frac{2\times 24}{\sqrt{3}}=\frac{2\times 8\times 3}{\sqrt{3}}$

$x^2=\frac{16\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=16\sqrt{3}$　$x>0$　$x=\sqrt{16\sqrt{3}}=4\sqrt{\sqrt{3}}=\boxed{\text{イ}}$

$AB=2x=8\sqrt{\sqrt{3}}=\boxed{\text{ア}}$　$AC=\sqrt{3}x=\sqrt{3}\times 4\times\sqrt{\sqrt{3}}=4\sqrt{3\sqrt{3}}=\boxed{\text{ウ}}$

以上、定三角定規のまとめでした. 次に設問形式にしておきます.

[I] $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ の三角形の辺の比は、$1:1:\sqrt{2}$ であることを指示に従い説明せよ

(1) 三平方の定理を用いる.　(2) 三平方の定理を用いない

[II] $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の三角形の辺の比は $1:\sqrt{3}:2$ であることを指示に従い説明せよ

(1) 三平方の定理を用いる.　(2) 三平方の定理を用いない.

まとめを理解した人は、キチンとかけなくても説明できる筈です. 他の人に説明したとき、その人が納得できるように、順序だてて、説明できるかということです. 是非とも、他の人にも考えてもらって、説明してやって下さい. このような幾何の問題は、理論的に説明できるかにつきます.

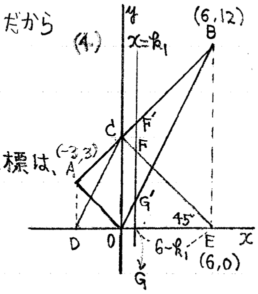
定三角定規の計算の仕方は、必ず覚えて下さい.

ようやく、P.15の(4)の[類4]の(解)(4)からです。

(解)(4)(カイ.1) $\triangle AOB=\triangle CDE(=27)$ だから $\triangle CDE$ を $x=k_1$ $(0<k_1<6)$ で二等分する。右図 $\angle FEG=45^\circ$ だから

$\triangle FGE$ は直角二等辺三角形 よって、$GE=GF=6-k_1$ $\frac{(6-k_1)^2}{2}=\frac{1}{2}\times\triangle CDE=\frac{27}{2}$

$(6-k_1)^2=27$ $6-k_1=\pm\sqrt{27}=\pm3\sqrt{3}$ $k_1=6\mp3\sqrt{3}$ であるが $0<k_1<6$ より $\underline{k_1=6-3\sqrt{3}}$



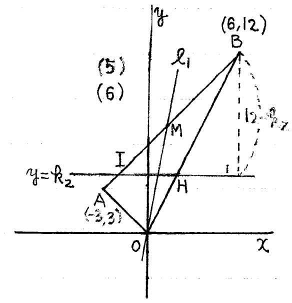

(カイ.2) $\triangle AOB$ を直接二等分する。直線AB: $y=x+6$ と直線 $x=k_1$ $(0<k_1<6)$ の交点F'のy座標は、

$y=k_1+6$、直線OB: $y=2x$ と直線 $x=k_1$ の交点G'のy座標は $y=2k_1$

したがって、$F'G'=(k_1+6)-2k_1=6-k_1$、$\triangle BF'G'$ の底辺を $F'G'$、高さを $GE=6-k_1$ と見て、

$\triangle BF'G'=\frac{\triangle AOB}{2}=\frac{27}{2}=\frac{1}{2}(6-k_1)^2$、$(6-k_1)^2=27$ 以下(カイ.1)に同じ

(補) $S=\frac{1}{2}|ad-bc|$ の公式も使えます。



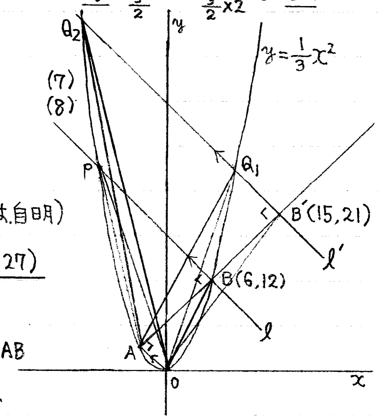

(5) $3<k_2<12$、直線OB: $y=2x$ と直線 $y=k_2$ の交点 $H(\frac{k_2}{2}, k_2)$、直線AB: $y=x+6$ と

直線 $y=k_2$ の交点 $I(k_2-6, k_2)$ したがって $HI=\frac{k_2}{2}-(k_2-6)=6-\frac{k_2}{2}=\frac{12-k_2}{2}$

$\triangle IBH=\frac{1}{2}\times IH\times(12-k_2)=\frac{1}{2}\times\frac{12-k_2}{2}\times(12-k_2)=\frac{1}{2}\times\triangle AOB=\frac{1}{2}\times27$

$(12-k_2)^2=54$ $12-k_2=\pm\sqrt{54}=\pm3\sqrt{6}$、$k_2=12\mp3\sqrt{6}$ であるが $3<k_2<12$ より $\underline{k_2=12-3\sqrt{6}}$

(6) ABの中点 $M\left(\frac{(-3)+6}{2}, \frac{3+12}{2}\right)=M\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right)$ AM:BM=1:1 なので求める直線 $l_1$ は直線OM: $\underline{y=}\frac{\frac{15}{2}}{\frac{3}{2}}x=\frac{\frac{15}{2}\times2}{\frac{3}{2}\times2}x=\underline{5x}$




(7) 点B(6,12)を通り、線分OAに平行な直線 $l$ と放物線C: $y=\frac{1}{3}x^2$ の交点を

Pとすればよい。直線 $l$: $y=(-1)\cdot(x-6)+12=-x+18$ ---①

Pの座標は、$y=\frac{1}{3}x^2$ と①を連立して解いて、$\frac{1}{3}x^2=-x+18$ $x^2=-3x+54$

$x^2+3x-54=0$ $(x-6)(x+9)=0$ (点Bのx座標6がこの解に含まれることは自明)

$x=6,-9$ であるが、点Pのx座標は $x=-9$ これを①に入れて $y=27$ $\underline{\therefore P(-9,27)}$

(8) $\angle OAB=90^\circ$ だから、$\triangle OAB$ の面積(27)を2倍にするには、半直線AB上に $AB'=2\times AB$

となる点B'をとり、$\triangle OAB'$ とすればよい。点B'を通り、線分OAに平行な直線 $l'$ と、

放物線C: $y=\frac{1}{3}x^2$ の交点が求める点Qである。($Q_1$, $Q_2$ 2つある)(半直線BA上に $AB''=2AB$ となる点B''は解に結びつかない)

$B'(x,y)$ とおけば、AB'の中点がBであるから $\frac{(-3)+x}{2}=6$, $-3+x=12$, $x=15$, $\frac{3+y}{2}=12$, $3+y=24$, $y=21$, $\therefore B'(15,21)$

直線 $l'$: $y=(-1)(x-15)+21=-x+36$ ---① $y=\frac{1}{3}x^2$ と①を連立して解く。$\frac{1}{3}x^2=-x+36$, $x^2=-3x+108$

$x^2+3x-108=0$ $(x-9)(x+12)=0$ $x=9$ のとき①に入れて $y=27$, $x=-12$ のとき①に入れて $y=48$ $\underline{\therefore Q_1(9,27), Q_2(-12,48)}$

(補)(8) $Q(t,\frac{1}{3}t^2)$ とおく。$\overrightarrow{OA}=(-3,3)$, $\overrightarrow{OQ}=(t,\frac{1}{3}t^2)$ $\triangle AOQ=\frac{1}{2}\left|3\times t-(-3)\times(\frac{1}{3}t^2)\right|=\frac{1}{2}|3t+t^2|=2\times\triangle AOB=2\times27=54$

$|t^2+3t|=108$ $t^2+3t=\pm108$ (i) $t^2+3t=-108$ のとき $t^2+3t+108=0$ $t$ の実数解はない。

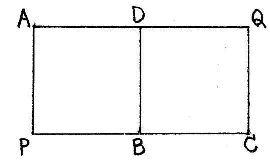
(ii) $t^2+3t=108$ のとき $t^2+3t-108=0$ $(t-9)(t+12)=0$ $t=9$ のとき $\frac{1}{3}t^2=\frac{1}{3}\times9^2=27$, $t=-12$ のとき $\frac{1}{3}t^2=\frac{1}{3}\times(-12)^2=48$

よって $Q_1=(9,27)$, $Q_2=(-12,48)$ 高校では、このように解くことができますが------

37. [1] 最短距離でP町からQ町まで向かう路線バスがある。バスは等確率で路線を走る。バス停は、A, B, C, D の4ヶ所ある。今、どのバス停を通るかもわからず「Q町行き」とだけかいてある1台のバスに跳び乗り、P町からQ町へ向かった。

(1) 路線は、何本あるか

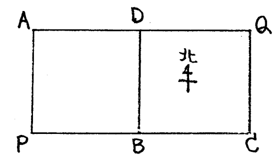
(2) 終点Q町におりることができる確率とバス停A, B, C, Dでおりることができる確率をそれぞれ求めよ。




[2] 最短距離でP町からQ町まで、バイクで行くことにする。分岐点では、コインを1回なげ、表が出たら東(右)へ、裏が出たら北(上)へ向かうことにする。今、コインをなげてP町を出発し、Q町へ向かう。(分岐点で留まるようなことはない)

(1) P町からQ町まで行く方法の数は、何通りあるか。

(2) Q町に着く確率と、地点A, B, C, Dを通る確率をそれぞれ求めよ。




[考] [1]と[2]の違いは、何でしょう。バスは、等確率で走行路線が決まっている。バイクはまず出発点Pでコインをなげて、A方向かB方向かを決めなければなりません。バイクは、地点Dでは、分岐点ではあるが、最短距離を進むので、Q方向に行くしかなく、コインをなげる必要はありません。確率の問題で確率が1より大きいことはありません。確率0はあります。本問でD→A、D→Bなどは、確率0です。

| 答 | |
|---|---|
| | [1] (1) 3本 (2) Q: 1, A: $\frac{1}{3}$, B: $\frac{2}{3}$, C: $\frac{1}{3}$, D: $\frac{2}{3}$ |
| | [2] (1) 3通り (2) Q: 1, A: $\frac{1}{2}$, B $\frac{1}{2}$, C: $\frac{1}{4}$, D: $\frac{3}{4}$ |

[解] [1] (1) P < A — D — Q ---①
B < D — Q ---②
C — Q ---③

①, ②, ③の路線 3本

(2) Q町におりることができるpro.(probability 確率の略)は、必ず3本の全ての路線でQに着くから求めるpro.は 1

(別解1) ①, ②, ③の3本の路線全てでQに着くから $\frac{3本}{3本}=\underline{1}$ $\left(\frac{Qに着く路線の数}{全ての路線の数}ということ\right)$

(別解2) ① or ② or ③の路線を選ぶpro.はそれぞれ $\frac{1}{3}$, よって、$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\underline{1}$ (①, ②, ③はQにつく路線)

A停におりることができるpro.は、①の路線のみで、$\frac{1本}{3本}=\underline{\frac{1}{3}}$ ((別解) ①の路線を選ぶpro.は、Pの時点で $\frac{1}{3}$)

B停におりることができるpro.は、②, ③の2つの路線で、$\frac{2本}{3本}=\underline{\frac{2}{3}}$ $\left(\frac{Bを通る路線の数}{全ての路線の数}ということ\right)$

(別解) ② or ③の路線を選ぶpro.は、それぞれ $\frac{1}{3}$ よって $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\underline{\frac{2}{3}}$

C停におりることができるpro.は、③の路線のみで、$\frac{1本}{3本}=\underline{\frac{1}{3}}$ ((別解) ③の路線を選ぶpro.は、Pの時点で $\frac{1}{3}$)

D停におりることができるpro.は、①, ②の2つの路線で、$\frac{2本}{3本}=\underline{\frac{2}{3}}$

(別解) ① or ②の路線を選ぶpro.は、それぞれ $\frac{1}{3}$ よって $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\underline{\frac{2}{3}}$

[2] (1) 最短距離で行くのは[1]の(1)と同じで 3通り

(2) Qに着くpro.は、①, ②, ③どのコースも必ずQに着くのだから、求めるpro.は 1

(別解) 表は㊍、裏は㋒とする。

(ア) ①のコースでQに着く場合　Pで㋒(pro. $\frac{1}{2}$)が出れば、Aに向かい、Aではコインはなげずに Dに向かう。Dでは、引き返すことはなく、最短でQに行くのだから、Dでコインはなげずに、必ずQに向かう。したがって、Pで㋒が出れば、必ず①のコースでQに着く。したがって $\frac{1}{2}$

次頁に続く

(イ)②のコースでQに着く場合　Pで㋔(pro. $\frac{1}{2}$)が出て、Bに向かい、Bで㋒(pro. $\frac{1}{2}$)が出てDに向かう。
Dで引き返したり、留まったりすることもなく、最短でQに行くのだから、
コインをなげることなくQに向かう。したがって $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(ウ)③のコースでQに着く場合　Pで㋔(pro. $\frac{1}{2}$)が出て、Bに向かい、Bで㋔(pro. $\frac{1}{2}$)が出て、Cに向かう。
Cでコインをなげる必要はなくQに向かう。したがって $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(ア)+(イ)+(ウ)がQに着くpro.であり $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\underline{1}$

Aを通るpro. ①のコースでQに着く場合だから、上述の(ア)より $\underline{\frac{1}{2}}$
(別解) Pで㋒が出ればよいので $\underline{\frac{1}{2}}$

Bを通るpro. ② or ③のコースでQに着く場合だから、上述の(イ)、(ウ)より $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\underline{\frac{1}{2}}$
(別解) Pで㋔が出ればよいので $\underline{\frac{1}{2}}$

Cを通るpro. ③のコースでQに着く場合だから 上述の(ウ)より $\underline{\frac{1}{4}}$
(別解) Pで㋔ and Bで㋔が出ればよいので $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\underline{\frac{1}{4}}$

Dを通るpro. ① or ②のコースでQに着く場合だから $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\underline{\frac{3}{4}}$
(別解) (Pで㋒が出て、$P\xrightarrow{\frac{1}{2}}A\xrightarrow{1}D$) or ((Pで㋔) and (Bで㋒)が出て $P\xrightarrow{\frac{1}{2}}B\xrightarrow{\frac{1}{2}}D$)
したがって $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\underline{\frac{3}{4}}$

[類1] サイコロ3個を同時に1回なげる。(1) 4,5,6の目が出るpro.を求めよ。(2) 5と6の目が必ず出て、5,6以外の目は出ていないpro.を求めよ。

(考1) サイコロは、全て異なるものとして考え、Ⓐ、Ⓑ、Ⓒのサイコロをなげるとします。全ての目の出方として 6×6×6 通りあります。

(1) (4,5,6)の目の出方は何通りありますか。全部かき出せば、どうなりますか。かき出さなくても、4,5,6を並びかえるだけ。すなわち(4,5,6)の順列です。※補 $\frac{(4,5,6)\text{の目の出方の数}}{\text{全ての目の出方の数}}$

(2) 例えば、(5,6,2)はダメ、(5,5,5)もダメ、(5,6,6)はOK、--- (5が1つと6が2つ) or (5が2つと6が1つ)
次のように考えることもできます。Ⓐ Ⓑ Ⓒ 5 5 5 / 6 6 6　2×2×2通りから、5だけの(5,5,5)と6だけの(6,6,6)の2通りを引く。----①

| Ⓐ | Ⓑ | Ⓒ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 3 |
| 4 | 4 | 4 |
| 5 | 5 | 5 |
| 6 | 6 | 6 |

上の表を用いて考えなさい

(解1) 全ての目の出方は 6×6×6 通り

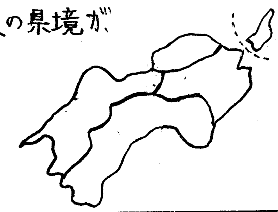
(1) (4,5,6)の目の出方は、$3!=3\times2\times1=6$ 通り　したがって $\frac{6}{6\times6\times6}=\underline{\frac{1}{36}}$
(別解) (4,5,6)を全て並べてかき出すと (4,5,6)(4,6,5)(5,4,6)(5,6,4)(6,4,5)(6,5,4)の6通り
したがって $\frac{6}{6\times6\times6}=\frac{1}{36}$
※補

(2) 題意の目の出方は $2\times2\times2-2=8-2=6$ 通り　したがって $\frac{6}{6\times6\times6}=\underline{\frac{1}{36}}$ ----①からです。
(別解) (ア) 5が1つ、6が2つの場合 (5,6,6)(6,5,6)(6,6,5) 3通り
(イ) 5が2つ、6が1つの場合 (5,5,6)(5,6,5)(6,5,5) 3通り
} 6通り　したがって $\frac{6}{6\times6\times6}=\underline{\frac{1}{36}}$

※補　順列については、P.26の(1)～(6)参照。「題意の目の出方」とは、問題文の「5と6の目が必ず出て、5,6以外の目は出ていない」ということです。数学には、独特の言い廻しがあります。そのうちに慣れてくるでしょう。

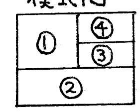
## 塗り分け問題

[類] 次は、四国4県を色で塗り分ける数学としての設問です。右図に、四国4県の県境が書いてある。今、4色の異なる色を用意する。
(1) 異なる4色全てを用いて塗り分ける方法は、何通りあるか。
(2) 塗り分ける方法は何通りあるか。隣りあう色が異なればよい。



[考] (2) 始めに、4色が用意してあるから、このうちの3色を用いてもOKです。

模式化



[解] 模式化すると右図、各県を①,②,③,④，用意してある4色をA,B,C,Dとする。

(1) 異なる4色全てを用いるから、①,②,③,④の順に4色A,B,C,Dを入れる。
①は4通りの選び方、例えばAを入れると②は、B,C,Dの3通りの選び方、例えば、Bを入れると、③は、C,Dの2通りの選び方、④は、③で選ぶと自動的に決まってしまう。よって $4\times3\times2=$ 24通り $(4!=24)$

(補) Black Vol. I $\boxed{\text{中学から高校へのかけはし}}$ P.26を復習する。

| 答 | (1) 24通り |
|---|---|
| | (2) 48通り |

(2) 用意してある異なる4色のうち、1色 or 異なる2色を用いて、塗り分けることはできない。
3色を用いる場合 (A,B,C) (A,B,D)、(A,C,D)、(B,C,D) の4通りの色の選び方ができる。$({}_4C_3=4)$
例えば、(A,B,C)の場合、3色で4つの部分①,②,③,④を塗り分けるのだから、3色のうち、いずれか1色は、2度用いることになる。2度用いる色で3通りある。例えば、Aを2度用いてA,A,B,Cとする。A,Aは、必ず②,④でなければならず、①,③には、(①,③)≡(B,C)、(C,B)の2通りの塗り方がある。
よって、3色を用いる場合は $4\times3\times2=24$ (通り)
求める塗り分ける方法の数は、(1)で求めた異なる4色全てを用いる場合との和であり、$24+24=$ 48通り

(補) $\boxed{\text{かけはし}}$ P.26の(6)にもあります。

---

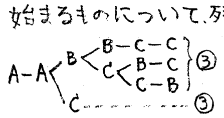
P.26の(4)の[類] AABBCCの6文字を全て用いてできる順列の個数Nを求めよ。

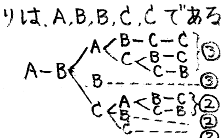
(考) A,B,Cをそれぞれ1,2,3とすると「1,1,2,2,3,3,の6つの数字を全て用いてできる6桁の整数の個数Nを求めよ。」あるいは、「$\boxed{A}$ $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{C}$ とかいてある6枚のカードを全て並べると何通り(N通り)の並べ方があるか」ということです。

(解1) 全ての順列がN通りあるとすると、AABBCCと並ぶpro.は、$\frac{1}{N}$ である。一方、1枚ずつ並べるとすると、そのpro.は
$\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{90}$ である。(C,Cは、pro.1で自動的に決まる) したがって $\frac{1}{N}=\frac{1}{90}$ $\therefore \underline{N=90}$

(解2) 6つの桁目 □□□□□□ を作っておき、6つの桁目から2つの桁目を選び $({}_6C_2)$、2つのAを入れ、残り4つの桁目から2つの桁目を選び $({}_4C_2)$ 2つのBを入れる。残り2つの桁目は自動的に2つのCに決まる。
したがって $\underline{N}={}_6C_2\times{}_4C_2=\frac{6!}{\cancel{4!}2!}\times\frac{\cancel{4!}}{2!2!}=\frac{6\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot3\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}}=\underline{90}$

(解3) treeをかく。対称性から、A,B,Cから始まるものは、それぞれ同数個あるから、Aから始まるものを求めて3倍する。更に、Aから始まるものについて、残りは、A,B,B,C,Cであるから、A−A $<^{B}_{C}$ は同数個，その他、同数個になるものも考えながら、数える。





A−Cは左A-Bに同じ　したがって $\underline{N}=\{3+3+(3+3+2+2+2)\times2\}\times3=\underline{90}$

かけなし

四捨五入

> [類3] 正の数$x$を7でわった数の小数第2位を四捨五入した数$y$に3をたした数が$3x$に等しい
> (1) $x$と$y$についての関係を不等式で表せ.(等式は(2)で利用する.)
> (2) $10y$が整数$n$に等しいことを利用し,(1)の不等式を$n$の不等式で表せ
> (3) (2)の不等式を解いて,整数$n$の値を全て求め,$x$の値と$y$の値を求めよ.

(考) (1) 前頁の[考]をしっかり理解してますか.(補)が(考)ですが,(解)を見ないで,(補)を参考に(解)にtry!

(解) (1) $y-0.05 \leqq \frac{x}{7} < y+0.05$ ---① (但し,四捨五入した数$y=0.0$のとき$0<\frac{x}{7}<0.05$ではある.)

(2) $10y=n$(整数) ---② $y+3=3x$ ---③

②より $y=\frac{n}{10}$ ---②′ ②′を③に代入 $\frac{n}{10}+3=3x$ ∴ $x=\frac{n}{30}+1$ ---③′

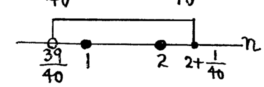
②′, ③′を①に代入 $\frac{n}{10}-\frac{1}{20} \leqq \frac{1}{7}\left(\frac{n}{30}+1\right) < \frac{n}{10}+\frac{1}{20}$ ---④

| 答 | |
|---|---|
| | (1) ① (2) ④ |
| | (3) $n=1$のとき $(x,y)=\left(\frac{31}{30},\frac{1}{10}\right)$ <br> $n=2$のとき $(x,y)=\left(\frac{16}{15},\frac{1}{5}\right)$ |

(3) ④×20 $2n-1 \leqq \frac{20}{7}\left(\frac{n}{30}+1\right) < 2n+1$ 7倍して $14n-7 \leqq 20\left(\frac{n}{30}+1\right) < 14n+7$

$14n-7 \leqq \frac{2}{3}n+20 < 14n+7$ 3倍して $42n-21 \leqq 2n+60 < 42n+21$

前の不等式より $40n \leqq 81$ ∴ $n \leqq \frac{81}{40} = 2+\frac{1}{40}$, 後の不等式より $39<40n$ ∴ $\frac{39}{40}<n$ ∴ $\frac{39}{40}<n \leqq 2+\frac{1}{40}$ ---Ⓣ




Ⓣをみたす整数$n$は $n=1$ or $n=2$

(i) $n=1$のとき ③′に入れて $x=\frac{1}{30}+1=\frac{31}{30}$, ②′に入れて $y=\frac{1}{10}(=0.1)$

(ii) $n=2$のとき ③′に入れて $x=\frac{2}{30}+1=\frac{16}{15}$, ②′に入れて $y=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}(=0.2)$

(補) $x=\frac{31}{30}$, $x=\frac{16}{15}$のとき,本当に題意にあっているか,実際に計算して確かめて下さい.

- $x, y, n$ 3文字の等式,不等式のまじった連立不等式です.制限があるのは,整数$n$ですから,2つの等式から,$y, x$を$n$の式で表し,不等式に入れ,整数$n$だけの不等式にします.この不等式から,まず整数$n$の値を求め,$y, x$を求めます.$\frac{x}{7}=x'$とおいて,$(x', y)$の階段状のグラフをかけば,おもしろいでしょう.P.34の(5)に大学入試問題あります.

[類4] $x$は整数でない正の数とする.$\frac{3x+1}{2}$の小数第1位を四捨五入した数が$2x-1$に等しいとき,$x$の値を求めよ.

(解) $\frac{3x+1}{2}$の小数第1位を四捨五入した数を整数$n$とする. $n-\frac{1}{2} \leqq \frac{3x+1}{2} < n+\frac{1}{2}$ ---① $n=2x-1$ ---② である.

②より $x=\frac{n+1}{2}$ ---②′ ②′を①に代入 $n-\frac{1}{2} \leqq \frac{3\left(\frac{n+1}{2}\right)+1}{2} < n+\frac{1}{2}$

2倍して $2n-1 \leqq \frac{3}{2}(n+1)+1 < 2n+1$ 更に2倍して, $4n-2 \leqq 3(n+1)+2 < 4n+2$

左の不等式より, $4n-3n \leqq 3+2+2$ ∴ $n \leqq 7$ 右の不等式より, $3+2-2 < 4n-3n$ ∴ $3<n$ $3<n \leqq 7$ ---Ⓣ

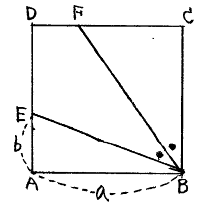
Ⓣをみたす整数$n$は, $n=4,5,6,7$

(i) $n=4$のとき ②′に入れて $x=\frac{5}{2}$ (ii) $n=5$のとき ②′に入れて, $x=3$ (iii) $n=6$のとき ②′に入れて $x=\frac{7}{2}$

(iv) $n=7$のとき ②′に入れて $x=4$

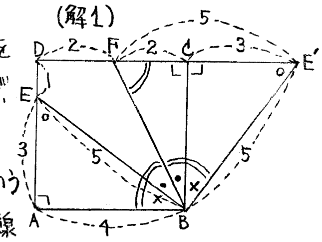
求める解は,整数でない正の数だから $x=\frac{5}{2}$ or $x=\frac{7}{2}$

[類] 右図、正方形ABCDの一辺の長さをa, 端点を含まない辺AD上にAE=bとなる点Eをとる.
∠CBEの二等分線と辺CDの交点をFとするとき、DFの長さをa,bで表せ.
意欲ある人は、a,bのままで、そうでない人は、a=2, b=1でtry?



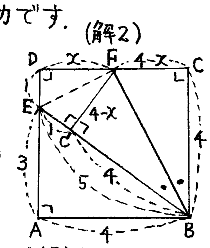

[考] $\boxed{a=4, b=3}$として、中学入試の例題を解いてみます.

(考1) この解法は、大学入試にも重要です.暗記して下さい.ある点を中心にして、図形を回転させると、回転した図形は、もとの図形と合同です.この場合、当然、△ABEですが、AB=BCだから、点Aが点Cに重なるように、点Bを中心にして、右回りに90°回転してみます.これから、二等分した角との関係を調べてみます.切り取ってはり付けるという考え方もできます.P.1の(3)問題4と同じような技法です.小学生は、角の二等分線の定理、三平方の定理などは、知りません.1次方程式ならば、何とか解けますから、(解2),(解3)ならば、何とかなりますか?




(解1) 右上図 直角三角形ABEを点Bを中心にして、右回りに90°回転させると、点Aは点Cに一致し、直角三角形CBE'となる. ∠ABE=∠CBE', 条件より∠EBF=∠CBF, したがって、∠ABF=∠E'BF (=x+•), FE'//ABだから、錯角が等しいことにより、∠ABF=∠E'FB よって、∠E'BF=∠E'FB, △E'FBは、二等辺三角形となるから、E'F=E'B=EB=5 (∵△ABEは、3,4,5の直角三角形) したがって、各辺の長さは、図のようになり、DF=2

(考2) 角の二等分線だから、△BFCをBFを折り目にして折ってみる.角の二等分には、これも有効です.

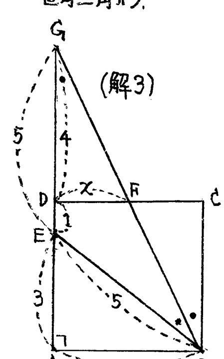



(解2) BFを折り目にして、直角三角形BFCを折ると、右図のように、直角三角形BFC'となる. DF=xとおくと、各辺の長さは、右図のようになる. 直角三角形DEFと直角三角形C'EFは、斜辺EF共通、DE=C'E=1であるから合同※. ∴DF=C'F, $x=4-x$, $2x=4$, $x=\underline{2=DF}$

※本問、a,bのときは、合同にはなりません. EFを介して、式を作ることになります.

△ABEは、3,4,5の直角三角形.

(考3) BFを延長し、ADの延長との交点をGとすると、△EBGは?




(解3) BFを延長し、ADの延長との交点をGとする. AG//BCだから、錯角が等しいことにより、
∠EGB=∠CBG=∠EBG (∵条件より) よって△EBGは二等辺三角形. ∴BE=GE=5,
すると各辺の長さは、図のようになる.
△GDF∽△GABにより、GD:GA=DF:AB, 4:8=x:4, $8x=16$, ∴$x=\underline{2=DF}$

(補) 次頁の解を含め、高校(大学)入試として、大切な事柄を含んでいます. 1つの解だけで、satisfactionしている人は、特に大学入試において困ったことになります. 高校に入っても伸びません. この例題を通して、しっかりと学習しましょう.

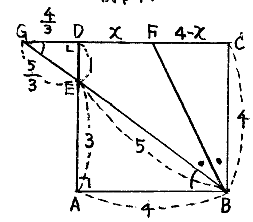
△ABEは3,4,5の直角三角形.

かけはし



(考4) BEを延長し、CDの延長との交点をGとすると、△ABE∽△DGE．DG, GEは求まります．次は、
GB：BC＝GF：FC の利用です．

(解4)



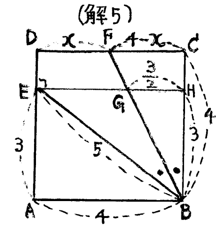

△ABEは、3, 4, 5の直角三角形

(解4) BEを延長し、CDの延長との交点をGとする．△ABE∽△DGEだから、AB：DG＝AE：DE,
$4:DG=3:1$, $3\times DG=4\times 1$, $\therefore DG=\frac{4}{3}$ ，BE：GE＝AE：DE, $5:GE=3:1$
$3\times GE=5\times 1$, $\therefore GE=\frac{5}{3}$ 各辺の長さは、図のようになる．
角の二等分線の定理より、GB：BC＝GF：FC, $(\frac{5}{3}+5):4=(\frac{4}{3}+x):(4-x)$, $4(x+\frac{4}{3})=\frac{20}{3}(4-x)$,
$x+\frac{4}{3}=\frac{5}{3}(4-x)$, $3x+4=5(4-x)=20-5x$, $8x=16$, $\therefore x=\underline{2=DF}$

---

(考5) 点Eを通り、ABに平行な直線をひく．角の二等分線の定理．相似の利用

(解5)

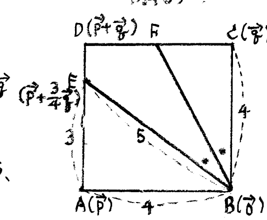



(解5) 点Eを通り、ABに平行な直線をひき、BF, BCとの交点をそれぞれ点G，点Hとする．
各辺の長さは、右図のようになる．角の二等分線の定理より、EG：GH＝EB：BH＝5：3なので
$GH=EH\times\frac{3}{5+3}=4\times\frac{3}{8}=\frac{3}{2}$，△FBC∽△GBHなので、FC：GH＝BC：BH．
$(4-x):\frac{3}{2}=4:3$, $3(4-x)=4\times\frac{3}{2}$, $4-x=4\times\frac{1}{2}=2$, $\therefore x=\underline{2=DF}$

(補) これぐらいでいいでしょう．まだ、解法は、ありますかね。次に高校生の解をかきます．基礎演習に最適です．

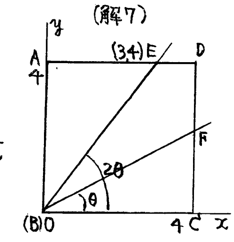
↓高校生

(解6)




(解6) 右図のように位置vectorを定める．$|\vec{p}|=|\vec{q}|=4$,
BFの方向vectorは、単位vectorを利用して．$\frac{1}{5}(\vec{p}+\frac{3}{4}\vec{q})+\frac{1}{4}\vec{q}=\frac{1}{5}\vec{p}+(\frac{3}{20}+\frac{1}{4})\vec{q}=\frac{1}{5}\vec{p}+\frac{2}{5}\vec{q}$
したがって直線BFは、$s(\frac{1}{5}\vec{p}+\frac{2}{5}\vec{q})$で表すことができる．一方、直線CDは $\vec{q}+t\vec{p}$ で表すことが
できるから、点Fは、直線BFと直線CDの交点として、$s(\frac{1}{5}\vec{p}+\frac{2}{5}\vec{q})=\vec{q}+t\vec{p}$, $\vec{p}, \vec{q}$は独立だから、
$\frac{1}{5}s=t$, $\frac{2}{5}s=1$, $\therefore s=\frac{5}{2}$, $t=\frac{1}{2}$ すなわち点Fの位置vectorは $\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{p}$
よって $\underline{DF}=|(\vec{p}+\vec{q})-(\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{p})|=|\frac{1}{2}\vec{p}|=\frac{1}{2}|\vec{p}|=\frac{1}{2}\times 4=\underline{2}$ (注、正方形の条件90°は、3, 4, 5の直角三角形で用いています．)

(解7)




(解7) 左回りに90°回転させて、右図のように座標軸を定める．直線OE(BE)の傾き $\tan 2\theta=\frac{4}{3}$,
$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{4}{3}$, $3\tan\theta=2(1-\tan^2\theta)=2-2\tan^2\theta$, $2\tan^2\theta+3\tan\theta-2=0$,
$(2\tan\theta-1)(\tan\theta+2)=0$, $\tan\theta>0$ ($\because 0<\tan\theta<\frac{\pi}{2}$)だから $\tan\theta=\frac{1}{2}$ すなわち直線OF(BF)の傾き$\frac{1}{2}$
↑ よって 直線OFは $y=\frac{1}{2}x$, $x=4$ とおいて, F(4, 2) $\therefore \underline{DF}=DC-FC=4-2=\underline{2}$

さて、本題の解を上の例題の(考)にしたがって解きましょう．[解1]の図は、例題の4＝a, 3＝bとして、かき込んで下さい．[解]の途中経過は、例題と同じなので省きました．

[解1] 三平方の定理より、$BE=\sqrt{a^2+b^2}=c$ とする。$E'F=E'B=EB=c$ , $CE'=b$ だから $CF=c-b$, $\underline{DF}=CD-CF=a-(c-b)=\underline{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}$

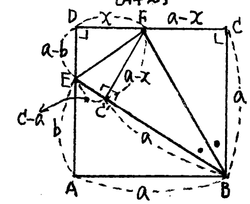
[解2] 各辺の長さは、右図のようになり、直角三角形DEFと直角三角形C'EFに三平方の定理を用いると、

$$EF^2=x^2+(a-b)^2=(a-x)^2+(c-a)^2,\ \cancel{x^2}+\cancel{a^2}-2ab+b^2=\cancel{a^2}-2ax+\cancel{x^2}+c^2-2ac+a^2$$

$$2ax=c^2-2ac+a^2+2ab-b^2=a^2+\cancel{b^2}-2ac+a^2+2ab-\cancel{b^2}=2a^2+2ab-2ac$$

両辺を $2a(>0)$ でわって $x=a+b-c=\underline{a+b-\sqrt{a^2+b^2}=DF}$

[解2]




三平方の定理より
$BE=\sqrt{a^2+b^2}=c$ とおく。

[解3] 各辺の長さは、右図のようになる。$\triangle GDF\backsim\triangle GAB$ より、$GD:GA=DF:AB$

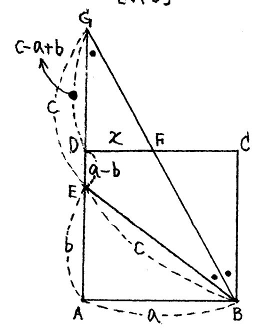
$$(c-a+b):(b+c)=x:a,\ (b+c)x=a(c-a+b),\ \underline{x}=\frac{a(c-a+b)}{b+c}=a\left(\frac{b+c-a}{b+c}\right)$$

$$=a\left(1-\frac{a}{b+c}\right)=a\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}+b}\right)=a\left(1-\frac{a(\sqrt{a^2+b^2}-b)}{(\sqrt{a^2+b^2}+b)(\sqrt{a^2+b^2}-b)}\right)=a\left(1-\frac{a(\sqrt{a^2+b^2}-b)}{a^2+b^2-b^2}\right)$$

$$=a\left(1-\frac{a(\sqrt{a^2+b^2}-b)}{a^2}\right)=a\left(1-\frac{\sqrt{a^2+b^2}-b}{a}\right)=a-(\sqrt{a^2+b^2}-b)=\underline{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}$$

※途中の計算方法に注意

[解3]




[解4] $AB:DG=AE:DE$, $a:DG=b:(a-b)$, $b\times DG=a(a-b)$, $\therefore DG=\frac{a(a-b)}{b}$

$BE:GE=AE:DE$, $c:GE=b:(a-b)$, $b\times GE=c(a-b)$, $\therefore GE=\frac{c(a-b)}{b}$

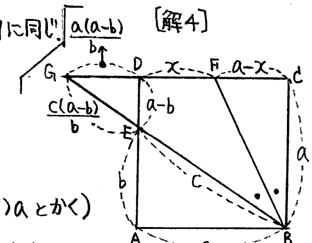
角の二等分線の定理より、$GB:BC=GF:FC$, $\left(\frac{c(a-b)}{b}+c\right):a=\left(\frac{a(a-b)}{b}+x\right):(a-x)$

$a\left(\frac{a(a-b)}{b}+x\right)=\left(\frac{c(a-b)}{b}+c\right)(a-x)=\frac{ac-bc+bc}{b}(a-x)=\frac{ac}{b}(a-x)$, $a$でわって

$\frac{a(a-b)}{b}+x=\frac{c}{b}(a-x)$, $b$をかけて $a(a-b)+bx=c(a-x)=ac-cx$

$bx+cx=ac-a(a-b)$, $(b+c)x=a(c-(a-b))=a(c-a+b)$, $x=\frac{a(c-a+b)}{b+c}$ 以下[解3]に同じ。

[解4]



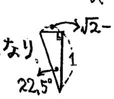

[補] [解3],[解4]などtroublesomeで、やる気もおこりませんが、計算練習にはなります。

[解1]の良さを身にしみて感じます。$DF=a+b-\sqrt{a^2+b^2}$ ですが、ここで、$b$を$a$に近ずけると

DFは $a+a-\sqrt{a^2+a^2}=2a-\sqrt{2a^2}=2a-\sqrt{2}a=(2-\sqrt{2})a$ に近ずきます。($b\to a$ のとき $DF\to(2-\sqrt{2})a$ とかく)

点Eが点Dに近ずくとき、$\angle DBC$は$45^\circ$に近ずきます。したがって、$\angle DBF=\angle FBC$は、$22.5^\circ$に近ずきます。

$FC=a-x=a-(2a-\sqrt{2}a)=\sqrt{2}a-a=(\sqrt{2}-1)a$ に近ずくから、特に$a=1$のとき$\sqrt{2}-1$に近ずくことになり、



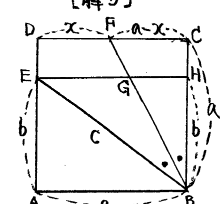

のようになっていることがわかります。勿論、角の二等分線の定理を用いて、$\sqrt{2}-1$は、求まります。

[解5] 角の二等分線の定理より $EG:GH=EB:BH=c:b$ $\therefore GH=EH\times\frac{b}{c+b}=a\times\frac{b}{b+c}=\frac{ab}{b+c}$

$\triangle FBC\backsim\triangle GBH$ なので $FC:GH=BC:BH$, $(a-x):\frac{ab}{b+c}=a:b$, $b(a-x)=\frac{a^2b}{b+c}$, $a-x=\frac{a^2}{b+c}$

$$\therefore \underline{x}=a-\frac{a^2}{b+c}=a-\frac{a^2}{b+\sqrt{a^2+b^2}}=a-\frac{a^2(\sqrt{a^2+b^2}-b)}{(\sqrt{a^2+b^2}+b)(\sqrt{a^2+b^2}-b)}=a-\frac{\cancel{a^2}(\sqrt{a^2+b^2}-b)}{\cancel{a^2}+\cancel{b^2}-\cancel{b^2}}=a-(\sqrt{a^2+b^2}-b)=\underline{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}$$

[解5]



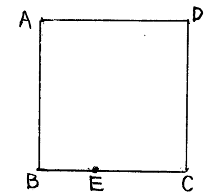

[補] 高校生の[解6],[解7]は、割愛しますが、[解1]以外は、計算に持ち込むことになり、結構ややこしいものです。しかし、[解1]以外の解も知っておく必要があります。[解1]では、できない設問も多くあります。

[問] 一辺の長さがわからない正方形ABCDの辺BC上に、BE＝7となる点Eをとったところ、AE＝25となった。 (1) 正方形の一辺の長さを求めよ。

(2) ∠DAEの二等分線と辺CDの交点をFとする。CFの長さを2通りの方法で求めよ。

(3) 四角形AECFの面積を求めよ。

(4) ∠DAFは30°より大きく、45°より小さいことを証明せよ。

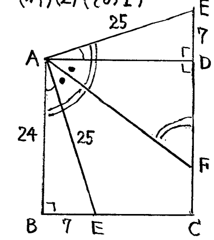



(カイ) (1) 三平方の定理より、$AB^2=AE^2-BE^2=25^2-7^2$ ※ $=(25+7)(25-7)=32\times18=2^5\times2\times3^2$

$AB^2=2^6\times3^2=(2^3\times3)^2$ ∴ $AB=2^3\times3=8\times3=\underline{24}$ (∵ $AB>0$)

※directに計算しても、大した手間ではありませんが----

(カイ)(2)(その1)




(2) (その1) △ABEを点Aを中心にして、左回りに90°回転させると、点Bは点Dに一致し、点Eは、右図の点E'に一致する。△ABE≡△ADE'だから、∠BAE＝∠DAE'---①

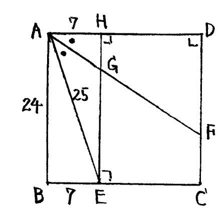
条件より、∠EAF＝∠DAF---②　　①,②より、∠BAF＝∠E'AF---③

AB∥E'C だから錯角が等しいことにより、∠BAF＝∠E'FA---④

③,④より、∠E'AF＝∠E'FA、よって △E'AFは二等辺三角形、∴FE'＝AE'＝AE＝25

DF＝FE'−DE'＝25−7＝18、∴$\underline{CF}$＝CD−DF＝24−18＝$\underline{6}$

(カイ)(2)(その2)



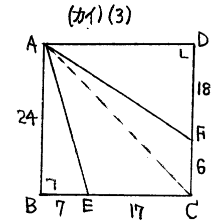

(その2) 点Eを通り、AB(DC)に平行な直線をひき、AF,ADとの交点をそれぞれ点G,点Hとする。

角の二等分線の定理より、EG：GH＝EA：AH＝25：7 だから $GH=EH\times\frac{7}{25+7}$

$GH=24\times\frac{7}{32}=\frac{3\times7}{4}=\frac{21}{4}$、△AFD∽△AGH より FD：GH＝AD：AH、$FD:\frac{21}{4}=24:7$、$7\times FD=24\times\frac{21}{4}=6\times21$

$FD=\frac{6\times21}{7}=6\times3=18$　∴$\underline{CF}$＝CD−FD＝24−18＝$\underline{6}$

(カイ)(3)



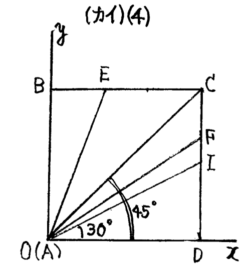

(3) $\underline{四角形AECF}=\triangle AEC+\triangle ACF=\frac{1}{2}\times CE\times AB+\frac{1}{2}\times CF\times BC=\frac{1}{2}\times17\times24+\frac{1}{2}\times6\times24$

$=12\times(17+6)=12\times23=\underline{276}$

(別解) $\underline{四角形AECF}=正方形ABCD-\triangle ABE-\triangle AFD=24^2-\frac{1}{2}\times7\times24-\frac{1}{2}\times18\times24$

$=24\times(24-\frac{7}{2}-9)=24\times(15-\frac{7}{2})=24\times\frac{23}{2}=12\times23=\underline{276}$

(カイ)(4)




(4) 右図のような図形にして、座標軸をとり、直線の正の傾きの大小を調べる。

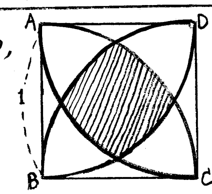
直線AIの傾き$=\frac{1}{\sqrt{3}}$、直線AFの傾き $\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$、直線ACの傾き1

$\frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{3}{4}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2<\left(\frac{3}{4}\right)^2\Leftrightarrow\frac{1}{3}<\frac{9}{16}\Leftrightarrow48\times\frac{1}{3}<48\times\frac{9}{16}\Leftrightarrow16<27$ ∴ $\frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{3}{4}$ は正しい。

$\frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{3}{4}<1$ であるから、$30°<\angle DAF<45°$

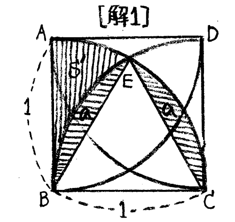
6. 右図の斜線部の面積を求めよ. 一辺の長さ1の正方形ABCD, $\frac{1}{4}$円が4つ,

答 $\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}$




[考1] 対称性があるものに、よく利用される手法です. 円に内接する図形の回転にも利用されます.

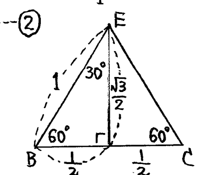
求める面積 $S$ = 正方形 $-\ 4\times(S')$ です. $S'+a$ = 扇形 $BAE$, 正三角形BCE $+\,a$ = 扇形 $BCE$




[解1] 求める面積を $S$ とする. $S$ = 正方形ABCD $-\ 4\times S' = 1-4S'$ (右図参照)

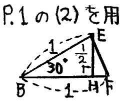
$S'+a$ = 扇形 $BAE = \pi\times1^2\times\frac{30^\circ}{360^\circ}=\frac{\pi}{12}$ ---① 正三角形BCE $+\,a$ = 扇形 $BCE$ $\frac{\sqrt{3}}{4}+a=\pi\times1^2\times\frac{60^\circ}{360^\circ}=\frac{\pi}{6}$ ---②

①−② $S'-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{12}$ $\therefore S'=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{12}$ $S=1-4S'=1-4\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{12}\right)=1-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$




正三角形BCE $=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

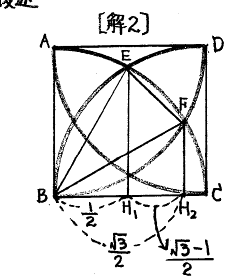
[考2] P.1の(2)を用いる. 下の△BFEを用いるのは、(その2)です.




△BFE, EF を求めよ.

$EH=\frac{1}{2}$, $BH=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $HF=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 三平方の定理より $EF=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+1-\sqrt{3}+\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}}{4}}$ = 後述

高校生は「この図を利用して、sin15°, cos15°を求めよ」 $\triangle BFE=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$




$k=\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}\ (a>b>0)=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ とおく. $k>0$ だから $\sqrt{x}>\sqrt{y}$ $\therefore x>y>0$ です. 平方すると

$k^2=(a+b)-2\sqrt{ab}=(x+y)-2\sqrt{xy}$ $\therefore x=a,\ y=b$ $\therefore k=\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}\ (a>b>0)$

- $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(2+1)-2\sqrt{2\cdot1}}=\sqrt{2}-1$ • $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$
- $\sqrt{10-2\sqrt{21}}=\sqrt{(7+3)-2\sqrt{7\cdot3}}=\sqrt{7}-\sqrt{3}$ • $\sqrt{10+2\sqrt{21}}=\sqrt{7}+\sqrt{3}$
- $\sqrt{11-\sqrt{112}}=\sqrt{11-2\sqrt{28}}=\sqrt{7+4-2\sqrt{7\cdot4}}=\sqrt{7}-\sqrt{4}=\sqrt{7}-2$ • $\sqrt{11+\sqrt{112}}=\sqrt{7}+2$
- $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ • $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$
- $\sqrt{7-3\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{14-2\cdot3\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{14-2\sqrt{9\cdot5}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$

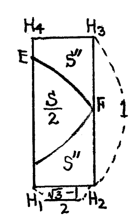
↓高 • $\frac{1}{\sqrt{10-\sqrt{96}}}=\frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{14}}}=k$ = 不可 但し, $k^2=\frac{1}{10-\sqrt{96}}=\frac{10+\sqrt{96}}{4}$ $k(>0)=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{14}}}{2}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$ とおけば

$k^2=\frac{10+2\sqrt{14}}{2}=\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{2}$ $a+b=10,\ ab=14$ 解と係数の関係より、$t^2-10t+14=0$ の実数解が $a,b$ $t=5\pm\sqrt{11}$

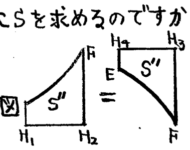
したがって $k=\frac{\sqrt{5+\sqrt{11}}+\sqrt{5-\sqrt{11}}}{2}$ となって、元の $k$ よりcomplexです. このようなことは、しませんが、次のことは大切です.

↑ $\frac{1}{\sqrt{10+\sqrt{96}}}=l$ とおけば $k^2+l^2=\frac{1}{10-\sqrt{96}}+\frac{1}{10+\sqrt{96}}=\frac{10+\sqrt{96}}{4}+\frac{10-\sqrt{96}}{4}=\frac{20}{4}=5$

さて $EF=\sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ ....ですが、実は、---どのように $S$ を求めるのですか?




[解2] (その1) P.1の(2)より. 図形 $EFH_1H_2=\frac{S}{2}+S''$ = 扇形 $BEF=\pi\cdot1^2\cdot\frac{30^\circ}{360^\circ}=\frac{\pi}{12}$ ---① ($S''$は、右図

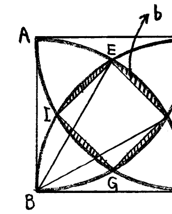


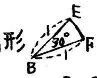

)

$\frac{S}{2}+2S''$ = 長方形 $H_1H_2H_3H_4=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\times1=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ---②

①より $S''=\frac{\pi}{12}-\frac{S}{2}$ を②に代入 $\frac{S}{2}+2\left(\frac{\pi}{12}-\frac{S}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, $-\frac{S}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, $-S+\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}-1$

よって、$S=\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}$




[解2] (その2)(考)より $b=$ 扇形 

$-\triangle BFE=\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{1}{4}$

正方形EFGI $=(EF)^2=\dfrac{8-4\sqrt{3}}{4}=2-\sqrt{3}$

よって $S=4b+$ 正方形EFGI $=4\left(\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{1}{4}\right)+(2-\sqrt{3})=\dfrac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}$

(補)(考)で2重根号をはずす練習をしましたが、この設問では、はずす必要はありません。正方形の面積$=(EF)^2$だからです。先のことを考えて解くことです。しかし「EFの長さを求めよ」ならば、2重根号は、はずさねばなりません。

$$\sin 15^\circ=\frac{HF}{EF}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}=\frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}\times 2}=\frac{2\sqrt{3}+2-3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ=\frac{EH}{EF}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}-1)}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

---

[問1] $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=a$ の小数部分を $b$ とするとき $x=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(b+\dfrac{1}{b}\right)$ の値を求めよ。

(解) $a=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=2+\sqrt{2}=2+1.414\cdots=3.1414\cdots$ よって $a$の整数部分は3 ∴ $b=a-3=2+\sqrt{2}-3=\sqrt{2}-1$

$$x=\left(2+\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2}-1+\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)=\left(2+\sqrt{2}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\left(\sqrt{2}-1+(\sqrt{2}+1)\right)=\left(3+\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times 2\sqrt{2}=6\sqrt{2}+4-2=\underline{6\sqrt{2}+2}$$

[問2] $x=\sqrt{5-\sqrt{24}}$ のとき $A=x+\dfrac{1}{x}$, $B=x-\dfrac{1}{x}$, $C=x^2+\dfrac{1}{x^2}$, $D=x^2-\dfrac{1}{x^2}$ の値を求めよ

| | | |
|---|---|---|
| 答 | $A=2\sqrt{3}$, | $B=-2\sqrt{2}$ |
| | $C=10$, | $D=-4\sqrt{6}$ |
| | $E=18\sqrt{3}$, | $F=-22\sqrt{2}$ |
| | $G=98$, | $H=-40\sqrt{6}$ |
| | $I=178\sqrt{3}$, | $J=-218\sqrt{2}$ |

(解) $C=(5-\sqrt{24})+\dfrac{1}{5-\sqrt{24}}=5-\sqrt{24}+\dfrac{5+\sqrt{24}}{(5-\sqrt{24})(5+\sqrt{24})}=5-\sqrt{24}+\dfrac{5+\sqrt{24}}{25-24}=\underline{10}$

$D=(5-\sqrt{24})-\dfrac{1}{5-\sqrt{24}}=5-\sqrt{24}-(5+\sqrt{24})=-2\sqrt{24}=\underline{-4\sqrt{6}}$

$A>0$ $A^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=C+2=10+2=12$ ∴ $A=\sqrt{12}=\underline{2\sqrt{3}}$

$D=x^2-\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=AB$ だから $-4\sqrt{6}=2\sqrt{3}\times B$ ∴ $B=-\dfrac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\underline{-2\sqrt{2}}$

(補) $x=\sqrt{5-\sqrt{24}}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ですが、C,Dがeasyなので、C,Dを先に求めて、A,Bは、C,Dを利用しました。
勿論、A,Bから求めてもよいです。2重根号をはずさずに、求まるということです。

↓高 ついでに、$E=x^3+\dfrac{1}{x^3}$, $F=x^3-\dfrac{1}{x^3}$, $G=x^4+\dfrac{1}{x^4}$, $H=x^4-\dfrac{1}{x^4}$, $I=x^5+\dfrac{1}{x^5}$, $J=x^5-\dfrac{1}{x^5}$ を求めよ

$E=x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\dfrac{1}{x^2}\right)=A(C-1)=2\sqrt{3}(10-1)=\underline{18\sqrt{3}}$, $F=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\dfrac{1}{x^2}\right)=B(C+1)=(-2\sqrt{2})(10+1)=\underline{-22\sqrt{2}}$

$G=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2=C^2-2=10^2-2=\underline{98}$, $H=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)=CD=10\times(-4\sqrt{6})=\underline{-40\sqrt{6}}$

$I=x^5+\dfrac{1}{x^5}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)-\left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{x^3}{x^2}\right)=CE-A=10\cdot 18\sqrt{3}-2\sqrt{3}=\underline{178\sqrt{3}}$

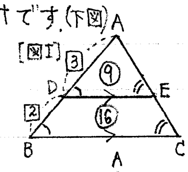
$J=x^5-\dfrac{1}{x^5}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3-\dfrac{1}{x^3}\right)+\dfrac{x^2}{x^3}-\dfrac{x^3}{x^2}=CF-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=CF-B=10\cdot(-22\sqrt{2})-(-2\sqrt{2})=\underline{-218\sqrt{2}}$

(補) $x^2=5-\sqrt{24}$ $x^2-5=-\sqrt{24}$ 2乗して $x^4-10x^2+25=24$ よって $x^4-10x^2+1=0$ ---① の解の1つが $x=\sqrt{5-\sqrt{24}}$
①の両辺を $x^4(\neq 0)$でわると $1-10\cdot\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}=0$ ∴ $\dfrac{1}{x^4}-10\cdot\dfrac{1}{x^2}+1=0$ ---② ①の両辺に $x^n$ $(n=1,2,\cdots)$をかけて
$x^{n+4}-10x^{n+2}+x^n=0$ ---①′ ②の両辺に $\dfrac{1}{x^n}$ をかけて $\dfrac{1}{x^{n+4}}-10\cdot\dfrac{1}{x^{n+2}}+\dfrac{1}{x^n}=0$ ---②′, ①′+②′ $a_n=x^n+\dfrac{1}{x^n}$ とおけば、
$a_{n+4}-10a_{n+2}+a_n=0$ ---㋐, ①′−②′ $b_n=x^n-\dfrac{1}{x^n}$ とおけば $b_{n+4}-10b_{n+2}+b_n=0$ ---㋑ $a_1=A=2\sqrt{3}$, $a_2=C=10$
$a_3=E=18\sqrt{3}$, $b_1=B=-2\sqrt{2}$, $b_2=D=-4\sqrt{6}$, $b_3=F=-22\sqrt{2}$ だから、$n=1,2,3,\cdots$ と入れることにより、順に求まります。
$a_4=G=98$, $b_4=H=-20\sqrt{2}$ も必要でした。この漸化式を求めることが重要です。(漸化式は解けますが---)

[類1] △ABCの辺AB上にAD=DE=EB,辺AC上にAF=FG=GCとなる点D,E,F,Gをとる. DCとFBの交点をH, FBとEGの交点をI, DCとEGの交点をJとする. このとき, △ABC:△HIJ=□:□(面積比) 最も簡単な整数比で表せ.

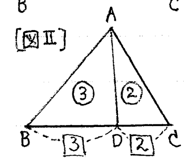
この[類1]の(解)はP.2の(12)にあります.

(考)典型的,高校入試問題として作りました. 図をかくときに,一般的な△ABC(例えば,6,7,8の三角形,正三角形などではない)をかくことにします. しかし,穴埋め問題として,解くだけならば,正三角形,または,直角二等辺三角形としても解は,得られます. 相似比による面積比と,単に辺の比による面積比を区別して考えることがpointです.(下図)



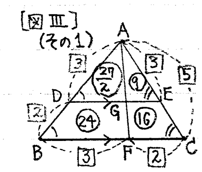

例えば,[図I]では,DE∥BCであり,△ADE∽△ABC,相似比は,3:5です.(AD:DB=$\boxed{3}$:$\boxed{2}$だから AD:AB=$\boxed{3}$:$\boxed{3}$+$\boxed{2}$=$\boxed{3}$:$\boxed{5}$) したがって,面積比△ADE:△ABC=$3^2$:$5^2$=9:25となります.

すると,△ADE=⑨のように表すと,△ABC=㉕,台形DBCE=△ABC−△ADE=㉕−⑨=⑯です.




[図II]では,面積比△ABD:△ADC=③:②です.(△ABDと△ADCは,相似ではありません.)

[図III]で,△ADG:台形DBFG:△AGE:台形GFCEの面積比を求めてみます. どの三角形を基本面積にするかで,少々,troublesomeなこともあります. しかし,必ずできます.




(その1) △AGE∽△AFC,相似比3:5だから面積比$3^2$:$5^2$=9:25, 面積△AGE=⑨のように表すと,△AFC=㉕だから台形GFCE=△AFC−△AGE=㉕−⑨=⑯

面積比△ADG:△AGE=DG:GE=BF:FC=3:2 だから 2×△ADG=3×△AGE

∴△ADG=$\frac{3}{2}$×△AGE=$\frac{3}{2}$×⑨=$\frac{27}{2}$

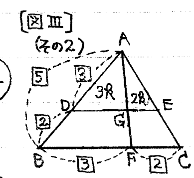
△ADG∽△ABF 相似比3:5だから,面積比$3^2$:$5^2$=9:25

△ADG:△ABF=9:25　25×△ADG=9×△ABF ∴△ABF=$\frac{25}{9}$×△ADG=$\frac{25}{9}$×$\frac{27}{2}$=$\frac{75}{2}$

台形DBFG=△ABF−△ADG=$\frac{75}{2}$−$\frac{27}{2}$=$\frac{48}{2}$=㉔

よって,△ADG:台形DBFG:△AGE:台形GFCE=$\frac{27}{2}$:㉔:⑨:⑯=27:48:18:32

(補)△ADG:△ABF=$3^2$:$5^2$=9:25　△ADG=⑨とおいて,解いてみて下さい.




(その2) △ADG:△AGE=DG:GE=BF:FC=3:2 だから△ADG=3k,△AGE=2k (k>0)とおける.

△ADG∽△ABF 相似比3:5だから面積比$3^2$:$5^2$=9:25　面積比△ADG:△ABF=3k:△ABF=9:25

9×△ABF=25×3k　∴△ABF=$\frac{25\times 3k}{9}$=$\frac{25}{3}k$　よって台形DBFG=△ABF−△ADG=$\frac{25}{3}k-3k=\frac{16}{3}k$

△AGE∽△AFCも上と同様に △AGE:△AFC=2k:△AFC=9:25　9×△AFC=25×2k ∴△AFC=$\frac{50}{9}k$

台形GFCE=△AFC−△AGE=$\frac{50}{9}k-2k=\frac{32}{9}k$

よって,△ADG:台形DBFG:△AGE:台形GFCE=$3k:\frac{16}{3}k:2k:\frac{32}{9}k$=27:48:18:32

(補)面積比として,△ADG:△AGE=3:2を等号化して△ADG=3k,△AGE=2k(k>0)と表したということです.

長々と(その1),(その2)かきましたが,実際には,ここまでかく必要は,ありません. 次に(その3)として,実戦的にかいてみます.

(その3)実戦(少し形を変えました. △ADE=9S,△ABC=25S (S>0)とおきます.)

△ADE∽△ABC 相似比3:5だから面積比$3^2$:$5^2$=9:25　△ADE=9S,△ABC=25S (S>0)とおく

△ADE=△ADG+△AGE, △ADG:△AGE=3:2だから△ADG=△ADE×$\frac{3}{5}$=9S×$\frac{3}{5}$=$\frac{27}{5}S$, △AGE=9S×$\frac{2}{5}$=$\frac{18}{5}S$

台形DBFG=△ABF−△ADG=(△ABC×$\frac{3}{5}$)−△ADG=25S×$\frac{3}{5}-\frac{27}{5}S=\frac{48}{5}S$

台形GFCE=△AFC−△AGE=(△ABC×$\frac{2}{5}$)−△AGE=25S×$\frac{2}{5}-\frac{18}{5}S=\frac{32}{5}S$

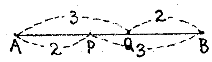
よって △ADG:台形DBFG:△AGE:台形GFCE=$\frac{27}{5}S:\frac{48}{5}S:\frac{18}{5}S:\frac{32}{5}S$=27:48:18:32

(考)は,次頁に続く.

(考)の続き

例1 線分AB上に $AP:PB=a:b$, $AQ:QB=x:y$ となる点P,Qをとる. 点P,点Q は線分ABをどのように分けるか

(1) $a=2, b=3, x=3, y=2$ のとき

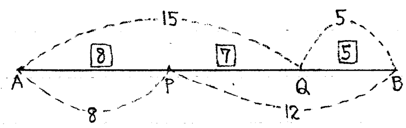


$AB=5$(cm) とすれば, $PQ=1$ であり $AP:PQ:QB=2:1:2$ の順に A,P,Q,B が並ぶ

(2) $a=2, b=3, x=3, y=1$ のとき☆ $2+3=5$, $3+1=4$, だから 5と4の最小公倍数20 より $AB=20$ (cm) とすれば.

$AP=AB\times\frac{2}{5}=20\times\frac{2}{5}=8$ (cm), $PB=20-8=12$ (cm) ($PB=AB\times\frac{3}{5}=20\times\frac{3}{5}=12$ (cm))

$AQ=AB\times\frac{3}{4}=20\times\frac{3}{4}=15$ (cm), $QB=20-15=5$ (cm) ($QB=AB\times\frac{1}{4}=20\times\frac{1}{4}=5$ (cm))



左より $AP:PQ:QB=8:7:5$ の順に A,P,Q,B が並ぶ

計算による(カイ)をします.

(その1) $AB=l\,(>0)$ とおく. $AP:PB=2:3$ だから $AP=l\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}l$, $PB=l\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}l$

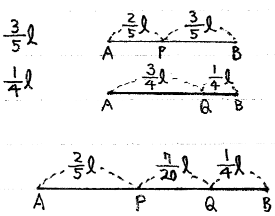
$AQ:QB=3:1$ だから $AQ=l\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}l$, $QB=l\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}l$

$AP-AQ=\frac{2}{5}l-\frac{3}{4}l=-\frac{7}{20}l<0$ $\therefore AP<AQ$

$AQ-AP=\frac{7}{20}l=PQ$

よって, $AP:PQ:QB=\frac{2}{5}l:\frac{7}{20}l:\frac{1}{4}l$

$=20\times\frac{2}{5}:20\times\frac{7}{20}:20\times\frac{1}{4}=8:7:5$ の順に A,P,Q,B が並ぶ.



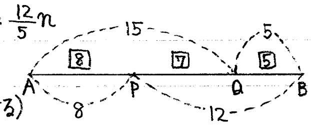
(その2) $AP:PB=2:3$ より $AP=2m$, $PB=3m$, $AQ:QB=3:1$ より $AQ=3n$, $QB=n$, $(m>0, n>0)$ とおける

$AB=5m=4n$ $\therefore m=\frac{4}{5}n$ $AP=2\times\frac{4}{5}n=\frac{8}{5}n$, $PB=3\times\frac{4}{5}n=\frac{12}{5}n$

$n=5$ を入れると $AQ=15$, $QB=5$, $AP=8$, $PB=12$ ($AB=4\times5=20$)

(補) $m$ を消して.全てを $n$ で表しましたが. $n$ を消して ($n=\frac{5}{4}m$ とする)

全てを $m$ にしてもよいです.

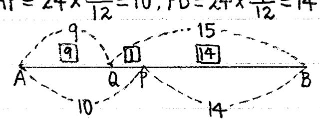


(3) $a=5, b=7, x=3, y=5$ のとき

☆ $a+b=12$, $x+y=8$, 12と8の最小公倍数は24 $AB=24$ とする. $AP=24\times\frac{5}{12}=10$, $PB=24\times\frac{7}{12}=14$

$AQ=24\times\frac{3}{8}=9$, $QB=24\times\frac{5}{8}=15$

したがって $AQ:QP:PB=9:1:14$ の順に A,Q,P,B が並ぶ



(その1) $AB=l\,(>0)$ とおく. $AP=\frac{5}{12}l$, $PB=\frac{7}{12}l$, $AQ=\frac{3}{8}l$, $QB=\frac{5}{8}l$ $AP-AQ=\frac{5}{12}l-\frac{3}{8}l=\frac{1}{24}l>0$

$\therefore AP>AQ$, $QP=AP-AQ=\frac{1}{24}l$ $\therefore AQ:QP:PB=\frac{3}{8}l:\frac{1}{24}l:\frac{7}{12}l=9:1:14$ の順に A,Q,P,B が並ぶ

(その2) $AP=5m$, $PB=7m$, $AQ=3n$, $QB=5n$ $(m>0, n>0)$ とおける. $AB=5m+7m=3n+5n$ $12m=8n$

$n=\frac{12}{8}m=\frac{3}{2}m$ したがって $AP=5m$, $PB=7m$, $AQ=3n=3\times\frac{3}{2}m=\frac{9}{2}m$, $QB=5n=5\times\frac{3}{2}m=\frac{15}{2}m$

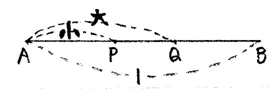
$m=2$ を入れて $AP=10$, $PB=14$, $AQ=9$, $QB=15$ 以下同様

(補) 小学6年生☆の算数的.公倍数の方法がよろしいかと思いますが-----

例2 次頁 P.2の(10)

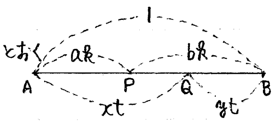
例2 線分ABを AP:PB = $a:b$ $(a>0, b>0)$ に内分する点をP, AQ:QB = $x:y$ $(x>0, y>0)$ に内分する点をQとする.
左から順に、点A,点P,点Q,点B が並ぶとき、$a, b, x, y$ にはどのような関係があるか.

(カイ) AB=1 としても一般性は失われない. $AP = 1\times\frac{a}{a+b} = \frac{a}{a+b}$ . $AQ = 1\times\frac{x}{x+y} = \frac{x}{x+y}$




AP<AQ であればよいから、$\frac{a}{a+b} < \frac{x}{x+y}$ 両辺に $(a+b)(x+y)$ $(>0)$をかけて
$a(x+y) < x(a+b)$ $\cancel{ax} + ay < \cancel{ax} + bx$ $ay < bx$ $\therefore \underline{\frac{a}{b} < \frac{x}{y}}$ $(\because b>0, y>0)$

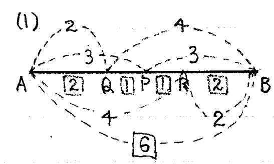
(別カイ) AB=1 としても一般性は失われない. $AP = ak$, $PB = bk$, $AQ = xt$, $QB = yt$, $k>0, t>0$ とおく.




右図のようになればよいから. $(0<)\ ak < xt$ and $(0<)\ yt < bk$
辺々かけると $(0<)\ ay\cancel{k}\cancel{t} < bx\cancel{k}\cancel{t}$ $(0<)\ ay < bx$ $\therefore (0<)\ \frac{a}{b} < \frac{x}{y}$

例3 線分AB上に AP:PB = $a:b$ , AQ:QB = $c:d$ , AR:RB = $e:f$ ($a, b, c, d, e, f$ は全て正)をみたす異なる3点
P,Q,R がある. 次のとき. P,Q,R は、線分AB をどのように分けて、どの順に並んでいるか.

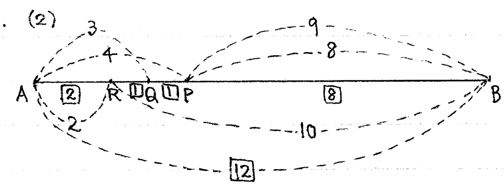
(1) $(a, b) = (1, 1)$, $(c, d) = (1, 2)$, $(e, f) = (2, 1)$ のとき




(カイ) 1+1=2. 1+2=2+1=3 2と3の最小公倍数6
AB=6 とおけば AP=PB=3, $AQ = 6\times\frac{1}{3} = 2$, $QB = 6\times\frac{2}{3} = 4$, $AR = 6\times\frac{2}{3} = 4$, $RB = 6\times\frac{1}{3} = 2$
図より、AQ:QP:PR:RB = 2:1:1:2 の順に並んでいる.

(2) $(a, b) = (1, 2)$, $(c, d) = (1, 3)$, $(e, f) = (1, 5)$ のとき

(カイ) 1+2=3, 1+3=4, 1+5=6 3と4と6の最小公倍数12
AB=12 とおけば $AP = 12\times\frac{1}{3} = 4$, $PB = 12\times\frac{2}{3} = 8$, $AQ = 12\times\frac{1}{4} = 3$, $QB = 12\times\frac{3}{4} = 9$, $AR = 12\times\frac{1}{6} = 2$, $RB = 12\times\frac{5}{6} = 10$,
図より AR:RQ:QP:PB = 2:1:1:8 の順に並んでいる.

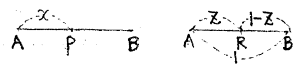


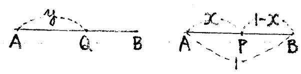

(補) 左から順に A,P,Q,R,B と並ぶとき. (A,P,Q,B と並ぶ) and (A,Q,R,B と並ぶ) だから 例2 を利用して,
$(0<)\ \frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f}$ となっています.

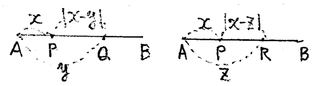
[余談]「煩わしい」を英語では.'It's a bother.' とか.単語では.'troublesome' 'annoying' というみたいです. 漢字が面倒なので.私は.よくこれを使っています.'確率'を英語では.'probability' といいます. この漢字こそ.大変です. pro. のように省略して用いています.

(例4)(これは、高校1年生のための問題です。) 線分AB上に、異なる3点、P, Q, R がある。AP：RB＝2：1，AQ：PB＝1：3，PQ：PR＝2：3 であるという。3点P, Q, R は、線分AB上にどのように並び、線分ABをどのように分けているか。

(カイ) $AB=1$，$AP=x$，$AQ=y$，$AR=z$，$0<x<1$，$0<y<1$，$0<z<1$，とおく。$x, y, z$ の大小は不明。

AP：RB＝2：1 より  $x : 1-z = 2:1$　$x=2(1-z)$ ---①

AQ：PB＝1：3 より  $y : 1-x = 1:3$　$1-x=3y$ ---②

PQ：PR＝2：3 より  $|x-y| : |x-z| = 2:3$　($x, y, z$ の大小は定かでないので絶対値をつける)

$2|x-z| = 3|x-y|$ --- ③

①, ②, ③ の連立方程式を解く。①より $\frac{x}{2}=1-z$　$z=1-\frac{x}{2}$ --- ①′

②より $y=\frac{1-x}{3}$ --- ②′

①′, ②′を③に代入　$2\left|x-\left(1-\frac{x}{2}\right)\right| = 3\left|x-\left(\frac{1-x}{3}\right)\right|$　$2\left|\frac{2x-2+x}{2}\right| = 3\left|\frac{3x-1+x}{3}\right|$　$|3x-2| = |4x-1|$

(i) $3x-2=4x-1$ のとき $-1=x$ となって $0<x<1$ に不適

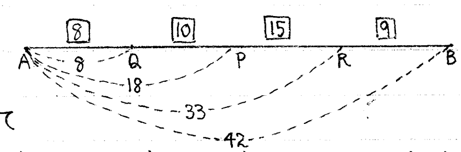
(ii) $3x-2=-(4x-1)$ のとき $3x-2=-4x+1$　$7x=3$　$x=\frac{3}{7}$　$0<x<1$ に適する。

$x=\frac{3}{7}$ を①′に代入 $z=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}=1-\frac{3}{14}=\frac{11}{14}$，$x=\frac{3}{7}$ を②′に代入 $y=\frac{1}{3}\left(1-\frac{3}{7}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}=\frac{4}{21}$

$x=\frac{3}{7}=\frac{18}{42}$，$z=\frac{11}{14}=\frac{33}{42}$，$y=\frac{4}{21}=\frac{8}{42}$　$0<y<x<z<1$ であるから A, Q, P, R, B の順に並んでいる。

42倍すると $AQ \equiv 42y=8$，$AP \equiv 42x=18$，$AR \equiv 42z=33$，$AB \equiv 1\times42=42$

右図から AQ：QP：PR：RB＝8：10：15：9

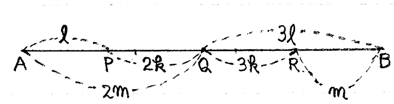



(補) 連立方程式は、代入法が鉄則です。上の(カイ)は、①から $z$ を $x$ で表し、②から $y$ を $x$ で表し、③に代入して、$x$ だけにして解いたものです。①を②に代入して、$z$ と $y$ の式にして、$y$ を $z$ で表し、③に代入、と同時に①を③に代入すると絶対値のついた $z$ だけの式を解くことになります。$|A|=|B| \Leftrightarrow A=\pm B$ ($A=B$ or $A=-B$) ($B=\pm A$ もOK)

$A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ とおけば、$P(x\vec{b})$, $Q(y\vec{b})$, $R(z\vec{b})$ ($0<x, y, z<1$)　PQ：PR＝2：3 は $|y\vec{b}-x\vec{b}| : |z\vec{b}-x\vec{b}| = 2:3$ です。

(例5) 線分AB上に、異なる3点、P, Q, R が A, P, Q, R, B の順に並んでいる。PQ：QR＝2：3，AP：QB＝1：3，AQ：RB＝2：1 であるという。このとき、AP：PQ：QR：RB＝□：□：□：□　最もsimpleな整数の比で答えよ。

(カイ) 条件の比から、右図のようにおける。$k>0$，$l>0$，$m>0$，



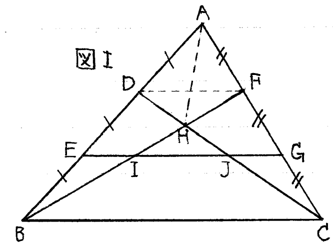

$l+2k=2m$ --- ①　$3k+m=3l$ ---- ②

①, ②を $l$ と $m$ の連立方程式と見て解くことにする。($k$ は定数と見る)　間隔はまだ定かではない

①より $l=2m-2k$ --- ①′　①′を②に代入 $3k+m=3(2m-2k)=6m-6k$　$9k=5m$　$m=\frac{9}{5}k$ これを

①′に代入 $l=2\times\frac{9}{5}k-2k=\frac{18}{5}k-\frac{10}{5}k=\frac{8}{5}k$　AP：PQ：QR：RB＝$\frac{8}{5}k : 2k : 3k : \frac{9}{5}k$ ＝8：10：15：9

(補) 長さの比を求めるのだから、$k=1$ とおいてしまって、$l$ と $m$ の式を解けばよいことです。




(解) ようやく[類1](P.2の(8))の(解)です.(考)をしっかりと理解,暗記しましたか?

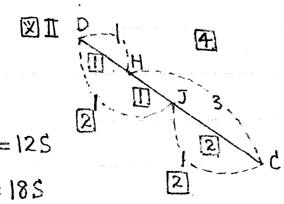
点Dと点Fを結ぶ.条件より DF∥EG∥BC (図I)

△ADF∽△ABC　AD:AB=DF:BC=1:3 ---①

△DFH∽△CBH　DF:BC=DH:HC=1:3 (∵①より) ---②

中点連結定理より DJ=JC すなわち DJ:JC=1:1 (∵EJ∥BC, DE=EB) ---③

②,③より, DH:HJ:JC=1:1:2 (図II)




△HIJ=S(面積)とすると. △HIJ∽△HBC 相似比 HJ:HC=1:3 により

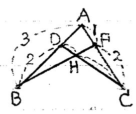
面積比 $1^2:3^2=1:9$ であるから, △HBC=△HIJ×9=9S

△DBC:△HBC=DC:HC=4:3　△DBC:9S=4:3　3×△DBC=9S×4　∴△DBC=12S

△ABC:△DBC=AB:DB=3:2　△ABC:12S=3:2　2×△ABC=12S×3　∴△ABC=18S

よって, △ABC:△HIJ=18S:S=18:1

(補)

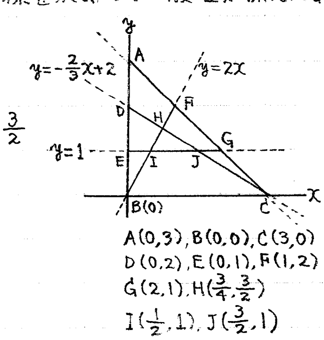



にメネラウスの定理を用いると, 3×DH×2=2×HC×1　3×DH=1×HC　∴DH:HC=1:3

中点連結定理より, DJ=JC すなわち DJ:JC=1:1 (∵EJ∥BC, DE=EB) として, どうしても求める必要がある DH:HJ:JC(=FH:HI:IB)=1:1:2 が求まります. 他にも面積比の求め方は,あります. 例えば,次のような解は,どうでしょうか. △HIJ≡△HFD=S とする. DH:HC=FH:HB=1:3 なので △HCF=△HBD=3×△DHF=3S, DH:HC=1:3 なので, △HBC=3×△HBD=3×3S=9S, AD:DB=1:2 なので △ADH=△HBD×$\frac{1}{2}$=3S×$\frac{1}{2}$=$\frac{3}{2}$S, AF:FC=1:2 なので, △AFH=△HCF×$\frac{1}{2}$=3S×$\frac{1}{2}$=$\frac{3}{2}$S. これで △ABC=△ADH+△AFH+△HBD+△HCF+△HBC=$\frac{3}{2}$S+$\frac{3}{2}$S+3S+3S+9S=18S

更に次のようにも求まります.『点Bを原点O, BCをx軸, 点B(O)を通りBCに垂直な直線をy軸にして, xy平面で考える. 任意の△ABCの頂点Aをx軸に平行にy軸上の点A'まで移動させると, △ABCと△A'BCは等積変形であり, △ABC内部の各図形も等積変形である. 次に, y軸方向に点A'をn倍させると, △A'BC(=△ABC)は高さがn倍となるので, 面積もn倍となる. △ABC内部の各図形の面積もn倍となる. しかしながら, △ABC内部の各図形の面積の比に変わりはない. (nでわったら同じ). x軸方向にn倍しても同様のことである』 ∴次のように座標を決めても一般性が保たれる.

A(0,3), B(0,0), C(3,0), D(0,2), E(0,1), F(1,2), G(2,1)




Hの座標を求める. 直線BF(OF): $y=2x$ ---(ア)　直線CD: $y=-\frac{2}{3}x+2$ ---(イ)

(ア),(イ)を連立して, $2x=-\frac{2}{3}x+2$　$6x=-2x+6$　$8x=6$　$x=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$　$y=2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$

よって. H$\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$

Iの座標は(ア)で $y=1$ とおいて $x=\frac{1}{2}$　∴I$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Jの座標は,(イ)で $y=1$ とおいて $1=-\frac{2}{3}x+2$　$\frac{2}{3}x=1$　$x=\frac{3}{2}$　∴J$\left(\frac{3}{2}, 1\right)$

△ABC=$\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$, △HIJ=$\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{3}{2}-1\right)=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

よって, △ABC:△HIJ=$\frac{9}{2}:\frac{1}{4}$=18:1

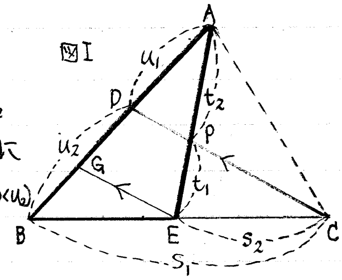
直線で囲まれる図形の面積は,全て,1次関数で処理できることになります. 1次関数を習う,1つの目的には,図形への応用として,このような利用法があります. 高校では,「図形と方程式」のジャンルで履修することになりますが,中学2年のうちに,上述の『』の内容を理解した上で,用いて欲しいものです.

メネラウスの定理(その1)

[類2] (1) 右図I. $\triangle ABE$の半直線BE上に. $BC:CE=s_1:s_2\ (0<s_2<s_1)$となる点C.

(点Cは.線分BEを$s_1:s_2\ (0<s_2<s_1)$に外分するという.もしも $0<s_1<s_2$ ならば,点Cは.半直線EBの点Bの左側にあることになる.)をとり.辺AB上に $AD:DB=u_1:u_2\ (0<u_1,0<u_2)$ となる点D(点Cは辺ABを$u_1:u_2\ (0<u_1,0<u_2)$に内分するという.)をとる.線分CDと辺AEの交点をPとする.

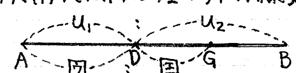
このとき $EP:PA=t_1:t_2\ (0<t_1,0<t_2)$ であるとする.




メネラウスの定理 $\dfrac{s_1}{s_2}\cdot\dfrac{t_1}{t_2}\cdot\dfrac{u_1}{u_2}=1$ ----(T) が成り立つことを証明したい.

CDに平行な点Eを通る直線と辺ABとの交点をGとする.まず,DB:DGを$t_1,t_2,u_1,u_2$で表すことにして、次に、DG:DBを$s_1,s_2$で表し、これを等号で結ぶことが目標である.(ア):(イ)には.アルフェベットの線分を記入.

PD∥EGだから $AD:DG=\boxed{ア}:\boxed{イ}=\boxed{ウ}:\boxed{エ}$ ---① 　右のようになる.



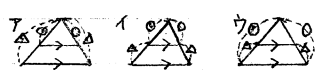

$AD:DB=u_1:u_2$だから、AD,DBの実際の長さとして、$AD=u_1k$(cm), $DB=u_2k$(cm) $(k>0)$ とおくことができる.(単位cmをつけるとわかりやすいでしょう.) ①から $AD=\boxed{オ}$(cm), $DG=\boxed{カ}$(cm) とおくことができる. $AD=u_1k=\boxed{オ}$ ---②

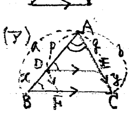
②より $k=\boxed{キ}$ 　よって $DB=u_2k=u_2\times\boxed{キ}$ 　したがって、$DB:DG=u_2\times\boxed{キ}:\boxed{カ}=\boxed{ク}:\boxed{ケ}$

一方 CD∥EGより、$DB:DG=\boxed{コ}:\boxed{サ}$ であるので $\boxed{ク}:\boxed{ケ}=\boxed{コ}:\boxed{サ}$ 　$\boxed{ク}\times\boxed{サ}=\boxed{ケ}\times\boxed{コ}$ 両辺を$\boxed{ク}\times\boxed{サ}$でわると、(T)が得られる.

(2) $\triangle ABC$の辺AB,BC,CAをそれぞれ1:3に内分する点をそれぞれ点D,点E,点Fとする.AEとCD,BFとAE,CDとBFの交点をそれぞれ点P,点Q,点Rとする.(ア)メネラウスの定理を用いて.AP:PEとAQ:QEを求め,AP:PQ:QEを求めよ.

(イ) $\triangle PQR:\triangle ABC$(面積比)を求めよ.

(考) (1)  全て ◎:△=○:△ です. ア,イ,ウ を証明せよ.

(カイ) (ア) 


$\triangle ADE$と$\triangle ABC$において DE∥BCだから $\angle ADE=\angle ABC$(同位角相等), $\angle A$共通,

2角がそれぞれ等しいから、$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$

$\therefore AD:AB=AE:AC$

(イ) 上図において $DB=x$, $EC=y$とおく. $AD=p$, $AE=q$, $AB=a$, $AC=b$ とおけば、$a=p+x$, $b=q+y$

これを(ア)の式に代入 $p:p+x=q:q+y$ 　$p(q+y)=q(p+x)$ 　$pq+py=pq+qx$ 　$py=qx$ 　$\therefore p:x=q:y$

(別カイ) ACに平行な点Dを通る直線をひき辺BCとの交点をFとすれば. $\triangle ADE \backsim \triangle DBF$, DF=ECだから----

(ウ) (イ)と同様 $p=a-x$, $q=b-y$ を(ア)の式に代入 $a-x:a=b-y:b$ 　$b(a-x)=a(b-y)$ 　$ay=bx$ 　$\therefore a:x=b:y$

(別カイ) (イ)と同様 $\triangle ABC \backsim \triangle DBF$.だから AB:DB・AC:DF 　DF=EC(∵平行四辺形DFCE) ∴AB:DB=AC:EC

(2) (ア) (1)と同じ図でEP:PAが求まる.矢の先端 A(対辺BC,∠BRC),B(対辺CA,∠CPA),C(対辺AB,∠AQB)に着目.

3つの頂点A,B,Cから,それぞれ2通り,計2×3=6通りのメネラウスの定理が使えます.

(イ) 対称性から, AP:PQ:QE=BQ:QR:RF=CR:RP:PD となります. PとB,QとC,RとAを結び,面積比を辺の比と捉えます.相似はどこにも現れません.一番小さい三角形の面積を①などとおく?

$\triangle PAD:\triangle PBD=AD:DB$, $\triangle PBA(=\triangle PAD+\triangle PBD):\triangle PBQ=AP:PQ$, $\triangle PBQ:\triangle PQR=BQ:QR$

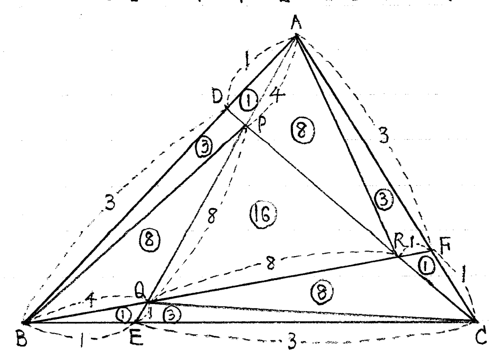
$\triangle ABC=\triangle ABQ+\triangle BCQ+\triangle CAP+\triangle PQR$, 対称性から, $\triangle ABQ=\triangle BCQ=\triangle CAP$ となっている筈.

$\triangle ABP:\triangle ACP=\triangle ABQ:\triangle ACQ=\triangle ABE:\triangle ACE=\triangle PBQ:\triangle PCQ=\triangle QBE:\triangle QCE=BE:EC=1:3$ など---

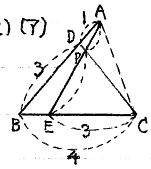
(解)(1) $\overset{ア}{A}\overset{イ}{P}:PE=\overset{ウ}{t_2}:\overset{エ}{t_1}$　$AD=\overset{オ}{t_2}l,\ DG=\overset{カ}{t_1}l\ (l>0)$　$AD=u_1k=\overset{オ}{t_2}l$　$k=\dfrac{\overset{キ}{t_2}}{u_1}l$　$DB=u_2k=\dfrac{t_2u_2}{u_1}l$

$DB:DG=\dfrac{t_2u_2}{u_1}l:\overset{カ}{t_1}l=\dfrac{t_2u_2}{u_1}:t_1=t_2\overset{ク}{u_2}:t_1\overset{ケ}{u_1}$　$DB:DG=\overset{コ}{S_1}:\overset{サ}{S_2}$　$t_2\overset{ク}{u_2}:t_1\overset{ケ}{u_1}=\overset{コ}{S_1}:\overset{サ}{S_2}$　$t_2u_2S_2=t_1u_1S_1$

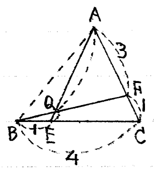
$\therefore 1=\dfrac{S_1}{S_2}\cdot\dfrac{t_1}{t_2}\cdot\dfrac{u_1}{u_2}$



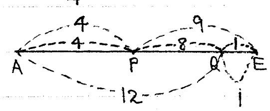

(2)(ア)



$\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{EP}{PA}\cdot\dfrac{1}{3}=1$　$9\times PA=4\times EP$　$AP:PE=4:9$



$\dfrac{4}{1}\cdot\dfrac{EQ}{QA}\cdot\dfrac{3}{1}=1$　$12\times EQ=1\times QA$　$AQ:QE=12:1$



左図より　$AP:PQ:QE=4:8:1$

(イ) 対称性から $AP:PQ:QE=BQ:QR:RF=CR:RP:PD=4:8:1$

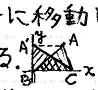
面積比と辺の比の関係より、△PADの面積を①で表せば、各三角形の面積は、上図のようになる。

(△APDから、順に、左回りにかき込んだ。)

△ABC＝△ABQ＋△BCR＋△CAP＋△PQR＝(①＋③＋⑧)×3＋⑯＝52

求める、△PQR：△ABC＝16：52＝4：13

(補)座標を設定し、1次関数だけを利用して、(2)の面積比を求めます。

(カイ)点Bを原点O、BCをx軸、点Bに垂直な直線をy軸とする。点Aをx軸に平行に移動し、y軸上の点をA'とすると、等積変形により、△ABC＝△A'BCであり、△ABC内の各図形も等積変形となる。 更に、点A'をy軸方向にn倍すると、面積もn倍となり、三角形内の各図形も面積はn倍となる。したがって求める面積比は、同じとなる。更に点Cをx軸方向にm倍しても、同様なことである。よって、A(0,4)、B(0,0)、C(4,0)、D(0,3)、E(1,0)、F(3,1)としても一般性は失われない。右下図より、点Pの座標を求める。AE：$y=-4x+4$、CD：$y=-\frac{3}{4}x+3$

$-4x+4=-\frac{3}{4}x+3$　$-16x+16=-3x+12$　$4=13x$　$x=\frac{4}{13}$　$y=-4\times\frac{4}{13}+4=4(1-\frac{4}{13})$

$=4\times\frac{9}{13}=\frac{36}{13}$　$\therefore P(\frac{4}{13},\frac{36}{13})$　点Qの座標を求める。AE：$y=-4x+4$、BF：$y=\frac{1}{3}x$

$-4x+4=\frac{1}{3}x$　$-12x+12=x$　$12=13x$　$x=\frac{12}{13}$　$y=\frac{1}{3}\times\frac{12}{13}=\frac{4}{13}$　$\therefore Q(\frac{12}{13},\frac{4}{13})$

点Rの座標を求める。CD：$y=-\frac{3}{4}x+3$，BF：$y=\frac{1}{3}x$　$-\frac{3}{4}x+3=\frac{1}{3}x$　$-9x+36=4x$

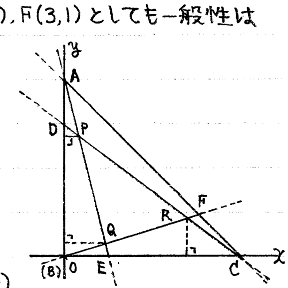
$36=13x$　$x=\frac{36}{13}$　$y=\frac{1}{3}\times\frac{36}{13}=\frac{12}{13}$　$\therefore R(\frac{36}{13},\frac{12}{13})$　△PQR＝△ABC－(△ABQ＋△BCR＋△CAP)

△ABC$=\frac{1}{2}\times4\times4=8$，△ABQ$=\frac{1}{2}\times4\times\frac{12}{13}=\frac{24}{13}$，△BCR$=\frac{1}{2}\times4\times\frac{12}{13}=\frac{24}{13}$

△CAP＝△ADC－△ADP$=\frac{1}{2}\times1\times4-\frac{1}{2}\times1\times\frac{4}{13}=2-\frac{2}{13}=\frac{24}{13}$

よって、△PQR$=8-(\frac{24}{13}+\frac{24}{13}+\frac{24}{13})=8-\frac{3\times24}{13}=8\times(1-\frac{9}{13})=8\times\frac{4}{13}=\frac{32}{13}$

∴求める △PQR：△ABC$=\frac{32}{13}:8=32:8\times13=4:13$

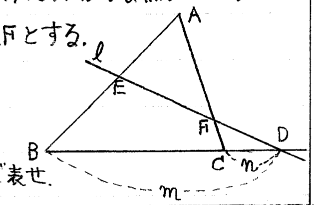


A(0,4)、B(0,0)、C(4,0)
D(0,3)、E(1,0)、F(3,1)
AE：$y=-4x+4$
BF：$y=\frac{1}{3}x$
CD：$y=-\frac{3}{4}x+3$
$P(\frac{4}{13},\frac{36}{13})$，$Q(\frac{12}{13},\frac{4}{13})$，$R(\frac{36}{13},\frac{12}{13})$

かけはし

## メネラウスの定理(その2)

[類3] $\triangle ABC$ の半直線 $BC$ の点 $C$ の外側に、$BD:DC=m:n\ (0<n<m)$ ($BC$ を $m:n\ (0<n<m)$ に外分する点 $D$ という) となる点 $D$ をとる。$D$ を通り、辺 $AB$、辺 $AC$ と交わる直線 $l$ をひき、交点をそれぞれ点 $E$、点 $F$ とする。このとき、$AE:EB=a:b$、$CF:FA=s:t\ (a>0, b>0, s>0, t>0)$ であるとする。点 $A$、点 $B$、点 $C$ から、直線 $l$ にそれぞれ垂線 $AH_1$, $BH_2$, $CH_3$ をおろすことにより、メネラウスの定理 $\frac{m}{n}\cdot\frac{s}{t}\cdot\frac{a}{b}=1$ が成り立つことを証明し、$t:s$ を $a,b,m,n$ の入った比で表せ。



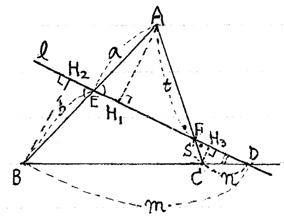

(解) $\triangle AEH_1 \backsim \triangle BEH_2$ ($\because$ 2角相等) により、$\frac{AE}{EB}=\frac{AH_1}{BH_2}$　$\therefore \frac{a}{b}=\frac{AH_1}{BH_2}$ ---①

$\triangle CFH_3 \backsim \triangle AFH_1$ ($\because$ 2角相等) により、$\frac{CF}{FA}=\frac{CH_3}{AH_1}$　$\therefore \frac{s}{t}=\frac{CH_3}{AH_1}$ ---②

$\triangle BDH_2 \backsim \triangle CDH_3$ ($\because$ 2角相等) により、$\frac{BD}{DC}=\frac{BH_2}{CH_3}$　$\therefore \frac{m}{n}=\frac{BH_2}{CH_3}$ ---③

①,②,③を辺々かけると、$\frac{a}{b}\cdot\frac{s}{t}\cdot\frac{m}{n}=\frac{\cancel{AH_1}}{\cancel{BH_2}}\cdot\frac{\cancel{CH_3}}{\cancel{AH_1}}\cdot\frac{\cancel{BH_2}}{\cancel{CH_3}}=1$

したがって $ams=bnt$　$\therefore t:s=bn:am$

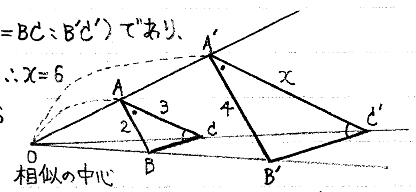



(補) ・一般に、$a:b=c:d\ (a>0, b>0, c>0, d>0)$ のとき $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ であり、$ad=bc$ として $b:a=d:c\ \left(\frac{b}{a}=\frac{d}{c}\right)$、$a:c=b:d\ \left(\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\right)$、$c:a=d:b\ \left(\frac{c}{a}=\frac{d}{b}\right)$、でもあります。----㊀

・右図で $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ という場合、相似比は $AB:A'B'=AC:A'C'(=BC:B'C')$ であり、$AB=2$, $AC=3$, $A'B'=4$, $A'C'=x$ のときには、$2:4=3:x$ よって $2x=4\times3$ $\therefore x=6$

あるいは、$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ だから $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}\left(=\frac{BC}{B'C'}\right)$　$\frac{2}{4}=\frac{3}{x}$　$\therefore x=6$

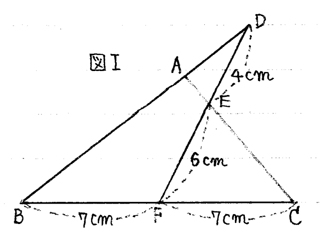
とかくのが本筋であり、$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ だから $AB:AC=A'B':A'C'$ のように考えて(これは、間違いです。) $2:3=4:x$　$2x=3\times4$　$\therefore x=6$ とかく人がいます。



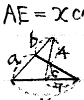

上の㊀の事実により、結果は、同じ $x=6$ になりますが、根本的には、mistake と思われます。(このようなことを習うと、"相似比は?"と問われたとき、2:3 と答える人がいるのもうなずけます。) 相似($\backsim$)とかいたら、相似比を前面に出してかくべきです。(P.7の(4),(5)参照)

(設問1) 右図Ⅰのとき $AE$, $CE$ の長さを求めよ。

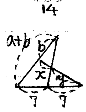
図Ⅰ




(カイ) $AE=x$ cm, $CE=y$ cm, $AB=a$ cm, $AD=b$ cm とする。メネラウスの定理を2つ用いる。



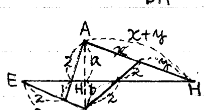

$\frac{14\,cm}{7\,cm}\cdot\frac{6\,cm}{4\,cm}\cdot\frac{b\,cm}{a\,cm}=1$　$2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{b}{a}=1$　$\therefore a=3b$ ---①




$\frac{(a+b)\,cm}{b\,cm}\cdot\frac{x\,cm}{y\,cm}\cdot\frac{7\,cm}{7\,cm}=1$　$\frac{a+b}{b}\cdot\frac{x}{y}=1$　①を入れて $\frac{4b}{b}\cdot\frac{x}{y}=1$　$x:y=1:4$　$AE=k$ cm, $CE=4k$ cm $k>0$

(設問2) 右図Ⅱのとき $\frac{AD}{DH}$ の値を求めよ。

(カイ)



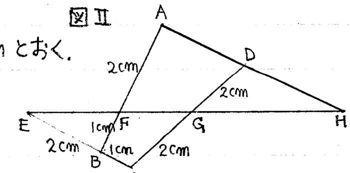

左のように、$AH=a$ cm, $CH=b$ cm, $AD=x$ cm, $DH=y$ cm とおく。

$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{b}=1$　$3a=4b$　$\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$

$\frac{x+y}{y}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{b}{a}=1$　$\left(\frac{x}{y}+1\right)\cdot\frac{b}{a}=1$　$\frac{x}{y}+1=\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$　$\frac{x}{y}=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$

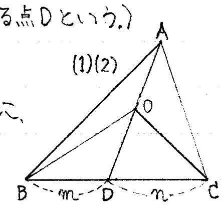
よって $\frac{AD}{DH}=\frac{1}{3}$

図Ⅱ



## チェバの定理

[類4] (1) △ABCの辺BC上に、BD:DC=$m:n$ ($m>0, n>0$) となる点D（線分BCを$m:n$に内分する点Dという。）をとる。△ABD:△ACD=$m:n$ となることを、2つの方法、(その1)、(その2)で示せ。

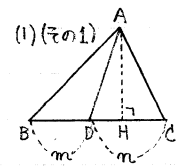
(1)(2)



(2) △ABCの辺BCを$m:n$ ($m>0, n>0$)に内分する点をDとし、端点A,Dを除く線分AD上に、点Oをとる。△AOB:△AOC=$m:n$（面積比）となることを2つの方法、(その1)、(その2)で示せ

(3) △ABCの辺ABを$a:b$ ($a>0, b>0$)に内分する点をE、辺BCを$m:n$ ($m>0, n>0$)に内分する点をDとし、ADとCEの交点をOとする。直線BOと辺ACの交点をFとする。AF:FC=$t:s$ ($t>0, s>0$)のとき、チェバの定理 $\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{s}{t}=1$ が成り立つことを、(2)を利用して示せ。

(解)(1)(その1) 点Aから辺BCに垂線AHをおろす。BD=$mk$, DC=$nk$, ($k>0$) とおける。

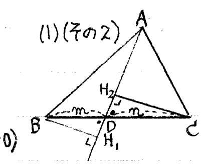
$$\triangle ABD:\triangle ACD=\frac{1}{2}mk\times AH:\frac{1}{2}nk\times AH=m:n$$

(1)(その1)



(その2) 点B,点Cから、直線ADに、それぞれ、垂線$BH_1$, 垂線$CH_2$をおろす。

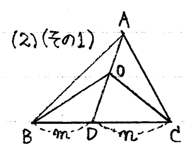
$\triangle BH_1D \backsim \triangle CH_2D$ (2角相等) により、$BH_1:CH_2=BD:CD=m:n$

$$\triangle ABD:\triangle ACD=\frac{1}{2}AD\times BH_1:\frac{1}{2}AD\times CH_2=BH_1:CH_2=m:n$$

(1)(その2)



(2)(その1) (1)の(その1)(or(その2))より、△ABD=$mk$, △ACD=$nk$ ($k>0$), △OBD=$ml$, △OCD=$nl$ ($l>0$) とおける。△AOB:△AOC=△ABD−△OBD:△ACD−△OCD=$mk-ml:nk-nl$

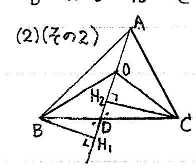
$=m(k-l):n(k-l)=m:n$ (∵ $0<l<k$ だから $k-l>0$ であり $k-l\neq 0$)

(2)(その1)



(その2) 点B,点Cから、直線ADに、それぞれ、垂線$BH_1$, 垂線$CH_2$をおろす。

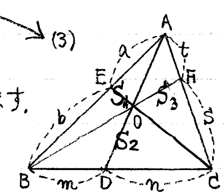
$\triangle BH_1D \backsim \triangle CH_2D$ (2角相等) により、$BH_1:CH_2=BD:CD=m:n$

$$\triangle AOB:\triangle AOC=\frac{1}{2}AO\times BH_1:\frac{1}{2}AO\times CH_2=BH_1:CH_2=m:n$$

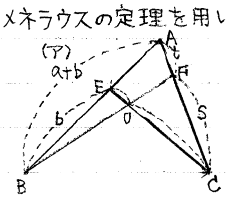
(2)(その2)


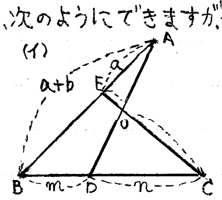

(3) △AOB=$S_1$, △BOC=$S_2$, △COA=$S_3$ とする。(2)より、$\frac{S_3}{S_2}=\frac{a}{b}$, $\frac{S_1}{S_3}=\frac{m}{n}$, $\frac{S_2}{S_1}=\frac{s}{t}$

辺々かけると $\frac{S_3}{S_2}\cdot\frac{S_1}{S_3}\cdot\frac{S_2}{S_1}=\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{s}{t}$ ∴ $\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{s}{t}=1$

(3)



(補) メネラウスの定理を用いても、次のようにできますが…EO:OC (or FO:OBなど)を介して、定理を2つ用います。

(ア)



(イ)



(ア)より $\frac{a+b}{b}\cdot\frac{EO}{OC}\cdot\frac{s}{t}=1$ ----①

(イ)より $\frac{a+b}{a}\cdot\frac{EO}{OC}\cdot\frac{n}{m}=1$ ----②

①,②を辺々わると(①÷②) ※1 $\frac{EO}{OC}$ は消えて、$\dfrac{\frac{a+b}{b}\cdot\frac{s}{t}}{\frac{a+b}{a}\cdot\frac{n}{m}}=\frac{1}{1}$ ※2 $\frac{a}{b}\cdot\frac{ms}{nt}=1$ ∴ $\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{s}{t}=1$

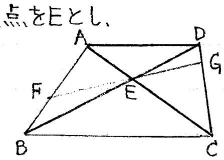
※1 繁分数式の計算です。わかりにくいならば、①を $(a+b)\times EO\times s=b\times OC\times t$ ---①′, ②を $(a+b)\times EO\times n=a\times OC\times m$ ---②′ のように変形して、①′と②′を辺々わると(①′÷②′) $\frac{s}{n}=\frac{bt}{am}$ となり $ams=bnt$ ∴ $\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{s}{t}=1$

※2 $=\dfrac{\frac{(a+b)s}{bt}}{\frac{(a+b)n}{am}}=\dfrac{\frac{(a+b)s}{bt}\times bt\times am}{\frac{(a+b)n}{am}\times bt\times am}=\dfrac{\cancel{(a+b)}sam}{\cancel{(a+b)}nbt}=\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{s}{t}=1$ のようにかけば、わかるでしょう。

類5] $AD \parallel BC$, $AD=3\,cm$, $BC=5\,cm$ の台形ABCDがある.対角線ACと対角線BDの交点をEとし、辺AB上に$AF:FB=3:2$となる点Fをとる.直線FEと辺CDとの交点をGとする.

(1) $DG:GC=\boxed{ア}:\boxed{イ}$ (2) $\triangle BEF:\triangle DEG=\boxed{ウ}:\boxed{エ}$ (面積比)

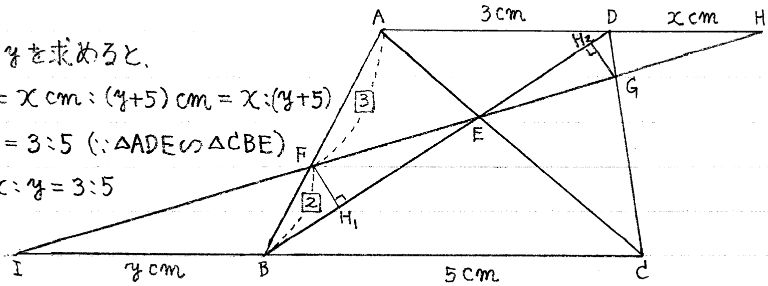
(3) $FE:EG=\boxed{オ}:\boxed{カ}$ 最も簡単な整数比で表せ




(考) (1) DG:GC を含む相似な図形を作ることを考えます.いろいろと考えられますが、FGを延長するのが一般的でしょう.

(2) $\triangle ADE \backsim \triangle CBE$, $\triangle BEF=\triangle ABE\times\dfrac{FB}{AF+FB}$ (3) (2)を利用する.しかし(別解)もあります.

(解)右図のように、点H,点Iを定める.




(1) $DH=x\,cm$, $BI=y\,cm$ とする.x,yを求めると、

$\triangle DGH \backsim \triangle CGI$ だから $DG:GC=x\,cm:(y+5)\,cm=x:(y+5)$

• $\triangle DEH \backsim \triangle BEI$ 相似比 $DE:BE=3:5$ ($\because \triangle ADE \backsim \triangle CBE$)

だから $DH:BI=DE:BE=3:5$ $x:y=3:5$

$\therefore 3y=5x$ ---①

• $\triangle AHF \backsim \triangle BIF$

$AH:BI=AF:BF$ $(x+3):y=3:2$ $\therefore 3y=2(x+3)$ ---② ①,②を連立して解けば、$5x=2(x+3)$

$5x=2x+6$ $3x=6$ $x=2$, $y=\frac{5}{3}x=\frac{10}{3}$ よって $\underline{DG:GC}=x:(y+5)=2:(\frac{10}{3}+5)=2:\frac{25}{3}=\underline{\overset{ア}{6}:\overset{イ}{25}}$

(2) $\triangle ADE \backsim \triangle CBE$ 相似比3:5により面積比$3^2:5^2=9:25$ $\triangle ADE=⑨$, $\triangle CBE=㉕$ のように表す.

$DE:BE=3:5$ により $\triangle ADE:\triangle ABE=3:5$ $⑨:\triangle ABE=3:5$ $\therefore \triangle ABE=⑮$

$\triangle ABE=\triangle AEF+\triangle BEF$ であり,$\triangle AEF:\triangle BEF=3:2$ だから $\triangle BEF=\triangle ABE\times\frac{2}{3+2}=⑮\times\frac{2}{5}=⑥$

$\triangle DCE=\triangle ABE=⑮$ $\triangle DCE=\triangle DEG+\triangle CEG$ であり $DG:GC=6:25$ であった((1)より)から

$\triangle DEG=\triangle DCE\times\frac{6}{6+25}=⑮\times\frac{6}{31}=\frac{6\times15}{31}$ $\therefore \underline{\triangle BEF:\triangle DEG}=⑥:\frac{6\times15}{31}=1:\frac{15}{31}=\underline{\overset{ウ}{31}:\overset{エ}{15}}$

(3) F,Gから辺BDにそれぞれ垂線$FH_1$, $GH_2$,をおろす.$FE=a$, $EG=b$ とおけば、$\triangle FEH_1 \backsim \triangle GEH_2$ なので

$FH_1:GH_2=FE:EG=a:b$ $\therefore FH_1=ak$, $GH_2=bk$ $(k>0)$ とおける.$BE:DE=5:3$ だから $BE=5l$, $DE=3l$ $(l>0)$ とおける.

$\triangle BEF:\triangle DEG=(\frac{1}{2}\times BE\times FH_1):(\frac{1}{2}\times DE\times GH_2)=(\frac{1}{2}\times5l\times ak):(\frac{1}{2}\times3l\times bk)=5a:3b=31:15$ ($\because$ (2)より)

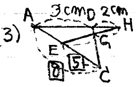
$5a\times15=3b\times31$ $5a\times5=b\times31$ $25a=31b$ $\therefore a:b=\underline{31:25}=\underline{FE:EG}$

(補) (1)は,$x\,cm=2\,cm$ が求まると、メネラウスの定理により,$AH\times DG\times CE=HD\times GC\times EA$ ですから,$5\times DG\times5=2\times GC\times3$

$25\times DG=6\times GC$ $\therefore DG:GC=6:25$ 実際には,$AH=5\,cm$, $HD=2\,cm$, $CE=5t\,cm$, $EA=3t\,cm$ を入れなければなりません.

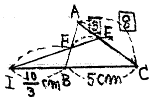
メネラウスの定理を用いると、次の頁にある(別解)のように、(3) FE:EGも求まることになります.メネラウスの定理,チェバの定理,中線定理(パップスの定理),角の2等分線の定理,中点連結定理,三平方の定理など,直線(線分)に関する定理として重要です.更に,円と絡めて,重要な幾何となりますが,実戦に即して練習しないと,ただ知っているだけでは,意味がありません,暗記しなければならない有名例題も多々あります.要努力!,頑張りなさぁ〜い.

(別解)(3)から求めて、これを利用して(2)を求める。

(3) 

にメネラウスの定理を用いて、$8\times EG\times 2=5\times GH\times 3$　$16\times EG=15\times GH$　$EG:GH=15:16$

$EG=15k, GH=16k\ (k>0)$とおく。



にメネラウスの定理を用いて　$8\times EF\times \frac{10}{3}^{2}=3\times FI\times 5$　$16\times EF=9\times FI$　$EF:FI=9:16$

$EF=9l, FI=16l\ (l>0)$とおく。

$\triangle DHE \backsim \triangle BIE$より　$HE:IE=x:y$　$(EG+GH):(IF+FE)=3:5$　$(15k+16k):(16l+9l)=3:5$　$31k:25l=3:5$

$31k\times 5=25l\times 3$　$31k=15l$　$\therefore k=\frac{15}{31}l$　よって $\underline{FE(EF):EG}=9l:15k=9l:15\times\frac{15}{31}l=1:\frac{5\times 5}{31}=\underline{\overset{オ}{31}:\overset{カ}{25}}$

(2) F, Gから辺BDにそれぞれ垂線$FH_1, GH_2$をおろす。$\triangle FEH_1 \backsim \triangle GEH_2$なので $FH_1:GH_2=FE:EG=31:25$ ((3)より)

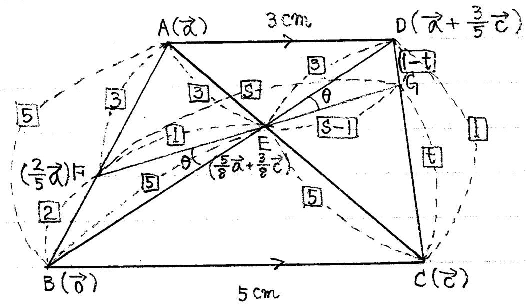
よって $FH_1=31m, GH_2=25m\ (m>0)$とおける。$BE:DE=5:3$だから $BE=5n, DE=3n\ (n>0)$とおける。

$\therefore \underline{\triangle BEF:\triangle DEG}=\frac{1}{2}\times BE\times FH_1:\left(\frac{1}{2}\times DE\times GH_2\right)=\left(\frac{1}{2}\times 5n\times 31m\right):\left(\frac{1}{2}\times 3n\times 25m\right)=31:(3\times 5)=\underline{31:15}$

---

(別考)高校生になると$\overset{ベクトル}{\text{vector}}$を習います。補助線などは、ひきません。vectorの基本問題として、いい練習になることでしょう。vectorを習ったら、この問題を思い出して、是非ともvectorで解いてみて下さい。

(高校生になると別解)




右図のように位置vectorを定める。$B(\vec{0}), A(\vec{a}), C(\vec{c})$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\times\frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\vec{a}+\vec{c}\times\frac{3}{5}=\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{c}$

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BD}\times\frac{|\overrightarrow{BE}|}{|\overrightarrow{BD}|}=\left(\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{c}\right)\times\frac{5}{8}=\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{c}$

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}\times\frac{|\overrightarrow{BF}|}{|\overrightarrow{BA}|}=\vec{a}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}\vec{a}$

$\overrightarrow{BG}$の位置vectorを求める。(結果は、$\overrightarrow{BG}=\frac{25}{31}\vec{a}+\frac{21}{31}\vec{c}$)

半直線FE上にある点Gとして

$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{BF}+s\overrightarrow{FE}=\frac{2}{5}\vec{a}+s\left\{\left(\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{c}\right)-\frac{2}{5}\vec{a}\right\}=\frac{2}{5}\vec{a}+s\left(\frac{9}{40}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{c}\right)=\left(\frac{2}{5}+\frac{9s}{40}\right)\vec{a}+\frac{3s}{8}\vec{c}$, $s>1$ ---①

辺CD上にある点Gとして、

$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{BC}+t\overrightarrow{CD}=\vec{c}+t\left\{\left(\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{c}\right)-\vec{c}\right\}=\vec{c}+t\left(\vec{a}-\frac{2}{5}\vec{c}\right)=t\vec{a}+\left(1-\frac{2t}{5}\right)\vec{c}$, $0<t<1$ ---②

①,②を等号で結んで、$\left(\frac{2}{5}+\frac{9s}{40}\right)\vec{a}+\frac{3s}{8}\vec{c}=t\vec{a}+\left(1-\frac{2t}{5}\right)\vec{c}$, $s>1$, $0<t<1$

$\left(\frac{2}{5}+\frac{9s}{40}-t\right)\vec{a}+\left(\frac{3s}{8}-1+\frac{2t}{5}\right)\vec{c}=\vec{0}$, $s>1$, $0<t<1$,　$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{c}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\nparallel\vec{c}$ ($\vec{a}$と$\vec{c}$は独立)だから、

$\frac{2}{5}+\frac{9s}{40}-t=0$ ---③ and $\frac{3s}{8}-1+\frac{2t}{5}=0$ ---④ ※補 and $s>1$ and $0<t<1$

③,④より、$\frac{3s}{8}-1+\frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}+\frac{9s}{40}\right)=0$　$\left(\frac{3}{8}+\frac{9}{100}\right)s=1-\frac{4}{25}=\frac{21}{25}$　$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{25}\right)s=\frac{21}{25}$　$\frac{1}{4}\times\frac{31}{50}\times s=\frac{7}{25}$　$s=\frac{56}{31}$　$s>1$をみたす

$t=\frac{2}{5}+\frac{9s}{40}=\frac{2}{5}+\frac{9}{40}\times\frac{56}{31}=\frac{2}{5}+\frac{9\times 7}{5\times 31}=\frac{1}{5}\times\left(2+\frac{63}{31}\right)=\frac{1}{5}\times\frac{62+63}{31}=\frac{125}{5\times 31}=\frac{25}{31}$　$0<t<1$をみたす。

よって、$\underline{DG:GC}=(1-t):t=\left(1-\frac{25}{31}\right):\frac{25}{31}=(31-25):25=\underline{\overset{ア}{6}:\overset{イ}{25}}$, $\underline{FE:EG}=1:(s-1)=1:\left(\frac{56}{31}-1\right)=31:(56-31)=\underline{\overset{オ}{31}:\overset{カ}{25}}$

$BE=5m, DE=3m, FE=31n, EG=25n\ (m>0, n>0)$とおける。$\underline{\triangle BEF:\triangle DEG}=\frac{1}{2}\cdot 5m\cdot 31n\sin\theta:\frac{1}{2}\cdot 3m\cdot 25n\sin\theta=\underline{\overset{ウ}{31}:\overset{エ}{15}}$

(補) $p\vec{x}+q\vec{y}=\vec{0}$ and $\vec{x}$と$\vec{y}$が独立($\vec{x}\neq\vec{0}, \vec{y}\neq\vec{0}, \vec{x}\nparallel\vec{y}$)ならば、$p=q=0$

(証明) $\vec{x}\neq\vec{0}$ and $\vec{y}\neq\vec{0}$ and $\vec{x}\nparallel\vec{y}$ ($\vec{x}$と$\vec{y}$が独立)のとき $p\neq 0$とするとpでわって、$\vec{x}+\frac{q}{p}\vec{y}=0$　$\vec{x}=-\frac{q}{p}\vec{y}$

$\vec{x}=(\text{実数})\times\vec{y}$であるから $\vec{x}\parallel\vec{y}$ or $\vec{x}=\vec{0}$ ($q=0$のとき)となって、不合理である。$\therefore p=0$でなければならない。

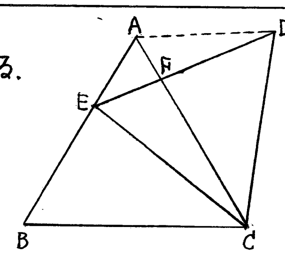
このとき $q\vec{y}=\vec{0}$, $\vec{y}\neq\vec{0}$だから $q=0$　(背理法による有名な方法です。)

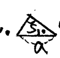
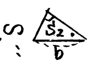
[類6] 右図、正三角形ABC, 正三角形CDE, AE：EB＝2：3 とする. □には、全て自然数が入る.

(1) 四角形ABCDは台形であることを証明せよ.

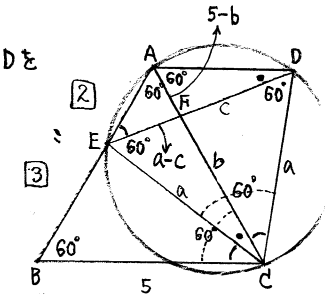
(2) 正三角形ABCの面積が125のとき、(ア)△BCEの面積＝□ (イ)△DCFの面積＝□

(ウ) BCの実際の長さ＝$\frac{□\sqrt{□}}{\sqrt{\sqrt{□}}}$ (エ) ADの実際の長さ＝$\frac{□\sqrt{□}}{\sqrt{\sqrt{□}}}$




(考)(1)円周角 (2)全ての角に、等しい印をつけると、相似な三角形が見えてきます.普通、3つの三角形の相似を利用. 辺の長さは、AE=2, EB=3, とおいて.文字をなるべく少くして,相似比を求めます.いつも教えているように、表を作るとわかりやすくなります.  $S_1:S_2=a:b$ を忘れてはなりません.  の  相似比 $a:b$ ならば、$S_1:S_2=a^2:b^2$.

(解)(1) $\angle EAC=\angle EDC=60^\circ$ だから弧$\overset{\frown}{EC}$の上にたつ円周角が等しいと見ることにより、4つの点A, E, C, Dを通る円がかける. 弧$\overset{\frown}{CD}$の上にたつ円周角$\angle CED=\angle CAD=60^\circ$となる. $\angle CAD=\angle ACB=60^\circ$ なので錯角が等しいことにより, AD//BC ∴四角形ABCDは台形である.




(別解) △BCEと△ACDにおいて、正三角形の条件により, BC=AC, CE=CD,

$\angle BCE=60^\circ-\angle ACE=\angle ACD$ だから 2辺夾角相等により、△BCE≡△ACD

よって、$\angle EBC=\angle DAC=60^\circ$, $\angle ACB=60^\circ$(∵正三角形ABC)だから、$\angle DAC=\angle ACB=60^\circ$

錯角が等しいことにより、AD//BC ∴四角形ABCDは台形である.

(2)(ア) AE：EB＝2：3 だから、$\triangle BCE=\triangle ABC\times\frac{3}{2+3}=125\times\frac{3}{5}=75$

(イ) 2角が等しいことにより、△BCE∽△DCF∽△AEF, 今, AE=2, EB=3, (AB=BC=CA=5) とする. CE=CD=$a$, CF=$b$,

AF=AC−CF=$5-b$, DF=$c$, EF=$a-c$ とおき、右に相似の表を作る.

$5:2=3:(5-b)$ より $5(5-b)=2\times3$ $25-5b=6$ $19=5b$ ∴$b=\frac{19}{5}$

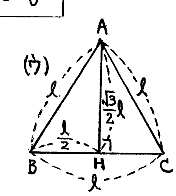
$5:a=a:b$ より $a^2=5b=19$ $(a=\sqrt{19})$

△BCEと△DCFの相似比は、$5:a$ だから面積比は $5^2:a^2=25:19$

(ア)より △BCE=75 だから △BCE：△DCF=75：△DCF=25：19 ∴△DCF=57

| △BCE | △DCF | △AEF |
|---|---|---|
| 5 | $a$ | 2 |
| $a$ | $b$ | $a-c$ |
| 3 | $c$ | $5-b$ |

(ウ) BC=$l$ とおけば、$\frac{1}{2}\times l\times\frac{\sqrt{3}}{2}l=125$ $\sqrt{3}l^2=2^2\times5^3$ $l^2=\frac{2^2\times5^3}{\sqrt{3}}$ ∴$l=\frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$




(エ) (1)の(別解)より、△BCE≡△ACD だから、$AD=BE=AB\times\frac{3}{5}=l\times\frac{3}{5}=\frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{3}}}\times\frac{3}{5}=\frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$

(補) (2)の(エ)を考えると(1)は.(別解)の方がよさそうです.ついでに、$c$=DFを求めると、$5:a=3:c$ だから $5c=3a$

$c=\frac{3}{5}a=\frac{3\sqrt{19}}{5}$ です.高校では、$a^2=3^2+5^2-2\times3\times5\times\cos60^\circ=34-2\times3\times5\times\frac{1}{2}=19$ のように求めることができますが、

他の線分の長さになると、やはり合同,相似,などの知識が必要になります. トレミーの定理(自分で調べる)を用いると、

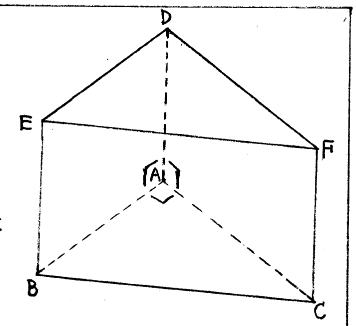
$2\times a+a\times AD=a\times5$ $\cancel{a}(2+AD)=5\cancel{a}$ $2+AD=5$ $AD=3$ となって BEに等しいことがわかります. 方べきの定理によると、

$b(5-b)=c(a-c)$ が成り立ちますが、弦は含まない定理なので、troublesome になることも、よくあります.

立体を切る.

13の[2] 立体(三角柱)を切る.

底面が直角三角形ABCである右のような三角柱ABC-DEF (AB=DE=3, BC=EF=6, AD=BE=CF=3, ∠BAC=∠CAD=∠BAD=90°)を考える.



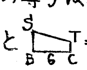

(1) 直角三角形ABCの面積を求めよ.

(2) 辺AC上にAG:GC=1:2となる点Gをとる. 3点D, E, Gを通る平面で三角柱を切るとき, 切り口の面積を求めよ.

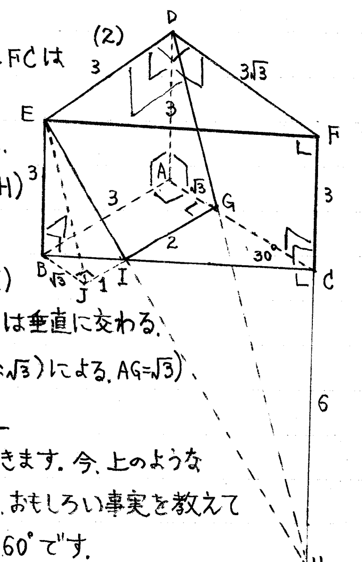
(3). (2)のとき, 分けられた立体のうちC側にある立体の体積を求めよ.

(4) 点Dから点Aまで, 三角柱の側面を通って, 最短で糸をはるとき, 辺BE, 辺CFとの交点をそれぞれ, 点S, 点Tとする. 四角形SBCTの面積を求めよ.

[考] (1) 三平方の定理などと考えなくても, 1:2:$\sqrt{3}$ の三角定規ですが--- △ABC$=\frac{9\sqrt{3}}{2}$ などの等号は, 面積などを表すとする.

(2) 切り口は台形です. (3) 2つの解ができますか? (4) BS, CTをそれぞれ求めると  $=\frac{1}{2}(BS+CT)\times 6$

[解] (1) AB:BC=3:6=1:2, ∠BAC=90°なので, ∠ABC=60°, ∠ACB=30° よってAC=$3\sqrt{3}$ ∴△ABC$=\frac{1}{2}\times 3\times 3\sqrt{3}=\underline{\frac{9\sqrt{3}}{2}}$




(2) AC=$3\sqrt{3}$だからAG=$\sqrt{3}$ (∵AG:GC=1:2), 平面ACFD上にある2本の直線DGとFCは点Hで交わり, △AGD∽△CGH (相似比1:2)よりAD:CH=3:CH=1:2 CH=6

直線FH(FC)は, 平面BCFE上にあるから, 同じ平面BCFE上にある, 線分BCと, 線分EHは, 右図, 点Iで交わる. BI:IC=BE:CH=3:6=1:2 (∵△BIE∽△CIH)

AG:GC=BI:IC=1:2だから, 直角三角形ABC内のAB//GI, AB:GI=3:2

AB=3であるから $\underline{GI=2}$, AB//GI//DEだから, 四角形DEIGは, 台形. (DE//GI)

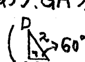
線分DEは, 平面ACFDに垂直だから, 平面ACFD上にある線分DGと線分DEは垂直に交わる.

すなわち台形DEIGの高さは, DG=$2\sqrt{3}$ (∵直角三角形AGDの辺の比1:2:($\sqrt{3}$)による. AG=$\sqrt{3}$).

したがって, 求める面積, 台形DEIG$=\frac{1}{2}(DE+GI)\times DG=\frac{1}{2}(3+2)\times 2\sqrt{3}=\underline{5\sqrt{3}}$

(補) 長々とかきましたが, 高校では空間座標(空間vector(ベクトル))として, すぐに証明ができます. 今, 上のような解をかく必要はありませんが, 内容を理解しておくことが大切です. もう1つ, おもしろい事実を教えておきます. 平面ABC(△ABC)と平面DEIG(台形DEIG)のなす角は, ∠AGD=60°です.

台形DEIGに直線ADのDの方向から, 太陽光をあてて, 直角三角形ABC上に影を落とします. (正射影という)

影となる台形ABIGの面積($=\frac{5\sqrt{3}}{2}$)を考えます. AB(DE)方向へは, 同じ長さであり, GA方向, すなわち台形の高さの方向へは, GA:GD=1:2となっています. ∠AGD=60°より, 高さの比のみが1:2 (  ) となっているという事.

したがって 台形DEIG:台形ABIG=GD:GA=2:1, 台形ABIGの面積がわかると, 台形DEIGの面積が求まります.

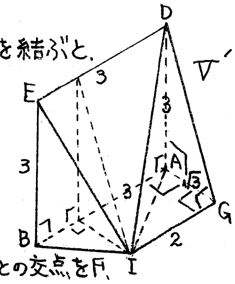
これは, 一般にも言える事実です. 切り口の面積を求めるには, 便利なことも多いですねぇ~.

(3) 次頁

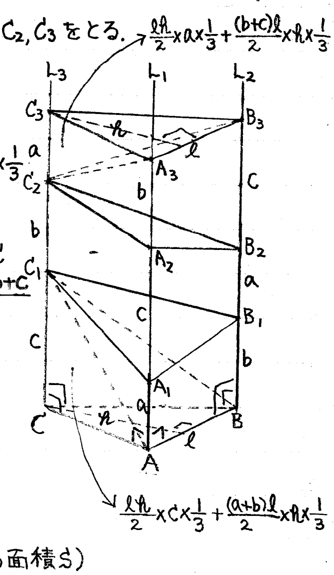
| 答 | (1) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ (2) $5\sqrt{3}$ |
|---|---|
| | (3) $\frac{19\sqrt{3}}{2}$ (4) $6\sqrt{3}$ |

(3) (解1) 前頁(2)の図より、求める立体 DEF-GIC の体積を $V$ とする。三角錐 H-GIC と三角錐 H-DEF の体積比は、
相似比 HC : HF = 6 : 9 = 2 : 3 (△HCG∽△HFD) であるから $2^3 : 3^3 = 8 : 27$
したがって $V = \frac{27-8}{27} \times$ 三角錐 H-DEF $= \frac{19}{27} \times \left(\frac{3\times3\sqrt{3}}{2} \times 9 \times \frac{1}{3}\right) = \underline{\frac{19\sqrt{3}}{2}}$
(補) 三角錐 H-DEF から、三角錐 H-GIC を引いても、大した手間ではありません。
$V = \frac{3\times3\sqrt{3}}{2} \times 9 \times \frac{1}{3} - \frac{2\times2\sqrt{3}}{2} \times 6 \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3} \times (3\times3\times9 - 2\times2\times6) = \frac{\sqrt{3}}{2\times3} \times 3 \times (3\times3\times3 - 2\times2\times2) = \frac{19\sqrt{3}}{2}$

(解2) 前頁(2)の図参照　GI の延長線上に点Bから垂線BJをおろす。$BJ = AG = \sqrt{3}$, $IJ = GJ - GI = AB - GI = 3 - 2 = 1$,
求める体積 $V$ = 三角柱 ABC-DEF $\underset{\text{マイナス}}{-}$ 切断三角柱 AGD-BIE
切断三角柱 AGD-BIE = 三角柱 AGD-BJE $\underset{\text{マイナス}}{-}$ 三角錐 E-BJI $= \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 3 - \frac{\sqrt{3}\times1}{2} \times 3 \times \frac{1}{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$
したがって $V = \frac{3\times3\sqrt{3}}{2} \times 3 - 4\sqrt{3} = \frac{27\sqrt{3}}{2} - \frac{8\sqrt{3}}{2} = \frac{19\sqrt{3}}{2}$ (別解) 下図 $V'$ を四角錐と三角柱の2つに分けて考えると
$V = \frac{27\sqrt{3}}{2} - V' = \frac{27\sqrt{3}}{2} - \left(1\times3\times\sqrt{3}\times\frac{1}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\times2\right) = \frac{27\sqrt{3}}{2} - 4\sqrt{3} = \frac{19\sqrt{3}}{2}$
(補) 切断三角柱 AGD-BIE = $V'$ を別の方法で求めます。右のように D と I、A と I を結ぶと、
$V'$ = 四角錐 I-ABED + 三角錐 I-AGD $= 3\times3\times\sqrt{3}\times\frac{1}{3} + \frac{3\times\sqrt{3}}{2}\times2\times\frac{1}{3} = 4\sqrt{3}$
(下の切断三角柱の公式？を用いると、$V' = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{3+3+2}{3} = 4\sqrt{3}$ です。)
更に、切断三角柱について、少し考えてみましょう。(その1)は、本題からです。

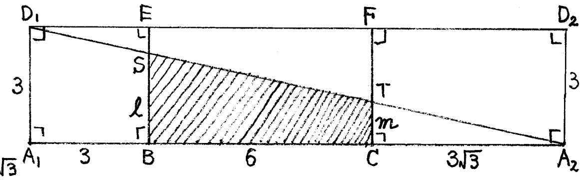



(その1) 平面BIE (直角三角形BIE)、平面AGD (直角三角形AGD) を拡げて、
交線を $\ell$ とする。平面BIE上にBIに平行な点Eを通る直線を引き $\ell$ との交点をF、
BIの延長と $\ell$ との交点をCとすれば、DF、ACは、平面AGD上にあり、平面ABC (直角三角形ABC)
に、平面BIE、平面AGD いずれも垂直であることから、前頁(2)の図が得られ、(解1)の三角錐の
体積を利用して、(解1)の $V$ が得られ、三角柱 $-V=V'$ として、$V'$ を求めることができる。
(その2) 空間にある△ABCに垂直な、点A、点B、点Cを通る直線をそれぞれ、$L_1, L_2, L_3$ とする。(下図)、$L_1, L_2, L_3$ の
点A、点B、点Cの上方に、それぞれ長さが $a, b, c$ である点 $A_1, B_1, C_1$ をとり、更に、$A_1A_2 = c$, $A_2A_3 = b$,
$B_1B_2 = a$, $B_2B_3 = c$, $C_1C_2 = b$, $C_2C_3 = a$, となるように、点 $A_2, A_3, B_2, B_3, C_2, C_3$ をとる。
△ABCの面積をS、底辺の長さを $\ell$、高さを $h$ とする。$S = \frac{\ell h}{2}$
切断三角柱 ABC-$A_1B_1C_1$ の体積を $V$ とすれば、
$V$ = 三角錐 $C_1$-CAB + 四角錐 $C_1$-$A_1ABB_1$ $= \frac{\ell h}{2} \times c \times \frac{1}{3} + \frac{(a+b)\ell}{2} \times h \times \frac{1}{3}$
$= \frac{\ell h c}{6} + \frac{\ell h(a+b)}{6} = \frac{\ell h}{2} \times \frac{a+b+c}{3} = S \times \frac{a+b+c}{3}$ ---①
最上段の切断三角柱 $C_3A_3B_3$-$C_2A_2B_2$ の体積は、$\triangle A_3B_3C_3 \equiv \triangle ABC$
と、$a, b, c$ の長さを見て、最下段の切断三角柱と同じ体積 $V = S \times \frac{a+b+c}{3}$
$A_1B_1C_1$-$A_2B_2C_2$ の体積 $V'$ = 三角柱 ABC-$A_3B_3C_3$ $\underset{\text{マイナス}}{-}$ $2V$
$= S \times (a+b+c) - 2 \times S \times \frac{a+b+c}{3} = \frac{S\times(a+b+c)}{3} = V$
すなわち、3つの切断三角柱の体積は等しいことがわかった。
①から、切断三角柱の高さは、3つの高さ $a, b, c$ の平均 $\frac{a+b+c}{3}$
であり、中央段の切断三角柱も、同じように、平均の高さを三角柱
の高さとして捉えて、体積を求めることができる。(底面積は、△ABCの面積S)
切断三角柱は、直方体を切りとるときにも、よく現れます。高校入試にも注意です。



面積を2等分する.

(4) 側面の展開図を右のように開けば, $D_1A_2$ が最短の糸のはり方である. $SB=l$, $TC=m$ とおく.




• $\triangle D_1A_1A_2 \backsim \triangle SBA_2$ より $D_1A_1 : SB = A_1A_2 : BA_2$

$3 : l = 9+3\sqrt3 : 6+3\sqrt3 = 3(3+\sqrt3) : 3(2+\sqrt3) = 3+\sqrt3 : 2+\sqrt3$

$(3+\sqrt3)l = 3(2+\sqrt3)$ $\quad l = \dfrac{3(2+\sqrt3)}{3+\sqrt3} = \dfrac{3(2+\sqrt3)}{\sqrt3(\sqrt3+1)} = \dfrac{\sqrt3(2+\sqrt3)}{\sqrt3+1}$

• $\triangle D_1A_1A_2 \backsim \triangle TCA_2$ より $D_1A_1 : TC = A_1A_2 : CA_2$ $\quad 3 : m = 9+3\sqrt3 : 3\sqrt3 = 3(3+\sqrt3) : 3\sqrt3 = 3+\sqrt3 : \sqrt3$

$(3+\sqrt3)m = 3\sqrt3$ $\quad m = \dfrac{3\sqrt3}{3+\sqrt3} = \dfrac{3\sqrt3}{\sqrt3(\sqrt3+1)} = \dfrac{3}{\sqrt3+1}$

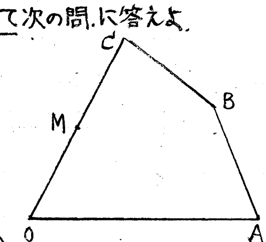
斜線部の求める面積 = 台形SBCT $= \dfrac{6(l+m)}{2} = 3(l+m) = 3\left\{\dfrac{\sqrt3(2+\sqrt3)}{\sqrt3+1} + \dfrac{3}{\sqrt3+1}\right\} = 3\left(\dfrac{2\sqrt3+3+3}{\sqrt3+1}\right)$

$= 3\left(\dfrac{2\sqrt3+6}{\sqrt3+1}\right) = 6\times\dfrac{\sqrt3+3}{\sqrt3+1} = 6\times\dfrac{\sqrt3(1+\sqrt3)}{1+\sqrt3} = \underline{6\sqrt3}$

(補) $l = \dfrac{\sqrt3(2+\sqrt3)}{\sqrt3+1}$ を求めて, $\triangle SBA_2 \backsim \triangle TCA_2$ から $l : m = 6+3\sqrt3 : 3\sqrt3 = 2+\sqrt3 : \sqrt3$ $\quad (2+\sqrt3)m = \sqrt3 l$

$m = \dfrac{\sqrt3 l}{2+\sqrt3} = \dfrac{\sqrt3}{2+\sqrt3} \times \dfrac{\sqrt3(2+\sqrt3)}{\sqrt3+1} = \dfrac{3}{\sqrt3+1}$ など, 他にも求め方はあります.

13. の③ • 右図で点Mを通り, 四角形OABCの面積を2等分する直線 $l$ を作図せよ. これを利用して次の問に答えよ.
• 特に, Oは原点, A(5,0), B(4,3), C(2,4), M(1,2) とするとき, (右図は, この座標には おおよそ合っている.) (1) 辺AB上に, $l$ との交点Nがあると予想できる. 点Nの座標を求めよ. (2) 直線 $l$ の式を求めよ. (3) 四角形OABCの面積を求めよ.

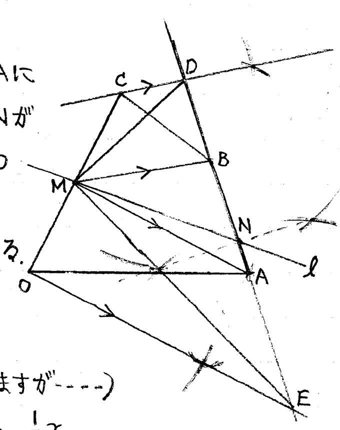


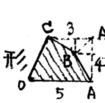

[考] 2点 P(a, b), Q(c, d) (a≠c) を通る直線PQの式は, 傾きが $\dfrac{b-d}{a-c}\left(=\dfrac{d-b}{c-a}\right)$, P(a, b) を通るから, PQ: $y = \dfrac{b-d}{a-c}(x-a)+b$ とできます. 勿論, Q(c, d) を用いて, PQ: $y = \dfrac{b-d}{a-c}(x-c)+d$ でもOKです. $a=c$ のときは 直線 $x = a(=c)$ となります. 傾き $m$, P(a, b) を通る直線は $y = m(x-a)+b$ ということ.

[解] <u>右作図</u>. 点Cを通り, MBに平行な直線を引き, 直線ABとの交点をDとする. 点Oを通り, MAに平行な直線を引き, 直線ABとの交点をEとする. 線分DEの中点をNとすれば, 直線MNが求める直線 $l$ である. (説明) $\triangle CMB = \triangle DMB$, $\triangle MOA = \triangle MEA$ ∴四角形OABC $= \triangle MED$

NはDEの中点だから, $\triangle MND = \triangle MNE$ $\quad \triangle MNB + \triangle DMB = \triangle MNA + \triangle MEA$

$\triangle MNB + \triangle CMB = \triangle MNA + \triangle MOA$, 四角形MNBC = 四角形MOAN 確かに2等分している.




(3) から, 先に求める. 四角形 

= 台形OAA′C − △AA′B − △CA′B $= \dfrac{(3+5)\times4}{2} - \dfrac{4\times1}{2} - \dfrac{3\times1}{2} = \dfrac{25}{2}$

(台形OABCを三角形2つと台形1つに分割してもできますが - - - -)

(1) CD: $y = \dfrac{3-2}{4-1}(x-2)+4 = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{10}{3}$, AB: $y = \dfrac{0-3}{5-4}(x-5)+0 = -3x+15$, OE: $y = \dfrac{0-2}{5-1}x = -\dfrac{1}{2}x$

CD, AB 連立して $x+10 = -9x+45$ $\quad 10x = 35$ $\quad x = \dfrac{7}{2}$, $y = -\dfrac{21}{2}+15 = \dfrac{9}{2}$ $\quad D\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{9}{2}\right)$

OE, AB 連立して $-6x+30 = -x$ $\quad x = 6$ $\quad y = -\dfrac{1}{2}\times6 = -3$ $\quad E(6, -3)$

DEの中点 $N\left(\dfrac{\frac{7}{2}+6}{2}, \dfrac{\frac{9}{2}+(-3)}{2}\right) = \left(\dfrac{19}{4}, \dfrac{3}{4}\right)$

(2) $y = \dfrac{\frac{3}{4}-2}{\frac{19}{4}-1}(x-1)+2 = \dfrac{3-8}{19-4}(x-1)+2 = -\dfrac{1}{3}(x-1)+2 = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{7}{3}$

(別解) P.18の(2)下に(1)の作図を利用しない解があります.

| 答 | |
|---|---|
| | (1) $N\left(\dfrac{19}{4}, \dfrac{3}{4}\right)$ |
| | (2) $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{7}{3}$ |
| | (3) $\dfrac{25}{2}$ |

面積を2等分する。

13の[4]

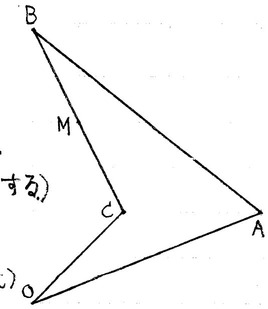
(1) 右図、くさび形OABCの線分BCの中点をMとする。

点Mを通り、くさび形OABCの面積を2等分する直線$\ell$と線分OAとの交点をNとする。直線$\ell$と点Nを作図せよ。また、その理由を説明せよ。

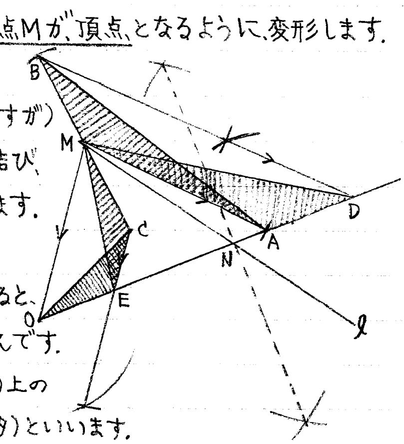
(2) 原点O, A(5,2), B(0,6), C(2,2)とする。(右図は、おおよそこの座標に一致する)

(ア) (1)の作図を利用して、点Nの座標と直線$\ell$の式を求めよ。

(イ) 線分OA上の点は$(5t, 2t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, で表わすことができることを示せ。N$(5t, 2t)$とおいて、具体的に、くさび形OABCの面積を求め、(ア)と異なる方法で点Nの座標と直線$\ell$の式を求めよ。(P.15の(3)参照)

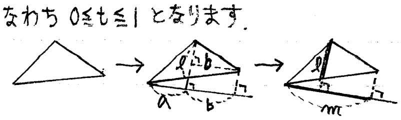



[考] 四角形(この場合は凹(おう)四角形という)を三角形に等積変形します。まず、点Mが、頂点、となるように、変形します。
線分OA上にある点Nですから、線分OAを動かすことはありません。
直線OA上に、1点 or 2点を新たに作図し、(この場合は、2点、D, Eとなりますが)
線分DEの中点をNとすることになります。Mを頂点にするには、MとAを結び、
△MABを等積変形します。直線OA上に、ある点Dの作図ということになります。
これで、くさび形ODMCを頂点Mを通って2等分することになりました。
凹の部分である△OCMを考えねばなりません。凸△OCMの場合を考えると、
OとMを結び、点Cを通って、平行線をひき、等積変形をします。これに習えです。




(2)の(イ)について、直線OAは、$y = \frac{2}{5}x$ ---①, $x = s$とおけば、$y = \frac{2}{5}s$であり、①上の点は$(s, \frac{2}{5}s)$とおけます。このsのことを媒介変数(パラメータ)といいます。
sに、$-1, 0, \frac{1}{2}, 3, 5, \cdots$と入れることにより、①上の点を全て表すことができます。
分数になるのは、嫌ですから、$x = 5t$とおけば、$y = 2t$となり、①上の点は$(5t, 2t)$と表すことができます。
方向と長さ(大きさ)を兼ねそなえた、vector(ベクトル)の考え方をすれば、$\overrightarrow{OA} = (5,2)$とおけば、①の直線は、
$(x, y) = t \times \overrightarrow{OA} = t(5,2)$で表すことができて、点とすれば、tを中に入れて、$(5t, 2t)$と表せるということです。この設問の場合、線分OA上にある点なので、xの範囲は、$0 \leqq x \leqq 5$であり、$x = 5t$を入れて、
$0 \leqq 5t \leqq 5$ すなわち $0 \leqq t \leqq 1$となります。

例えば、右のような面積の場合




$\frac{1}{2}\ell a + \frac{1}{2}\ell b = \frac{1}{2}\ell(a+b) = \frac{1}{2}\ell m$

[解] (1) [考]に作図してある。作図と理由を示す。MAに平行に、点Bを通る直線をひき、直線OAとの交点をDとする。
△MAB = △MADとなり、くさび形OABC = くさび形ODMCとなる。くさび形ODMCを頂点Mを通る直線で2等分すればよい。
MOに平行に点Cを通る直線をひき、線分OAとの交点をEとする。△ECO = △ECMとなる。
これで、くさび形ODMC = △MED (= くさび形OABC)となるので、△MEDを頂点Mを通る直線$\ell$で2等分すればよい。
線分DEの中点をNとし、直線MNを直線$\ell$とすることになる。(次頁に続く)

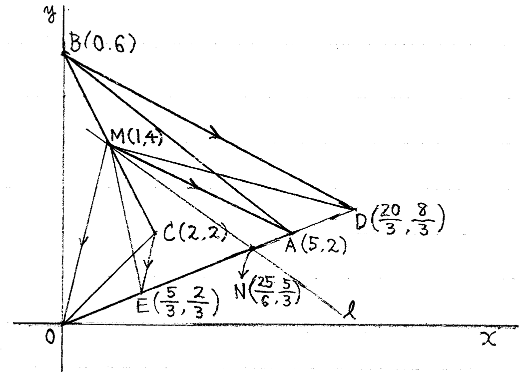
---

次頁P.3の(7)の(2)の(イ)の続き

よって、$9 - 9t = \frac{3}{2}$ $9(1-t) = \frac{3}{2}$ $18(1-t) = 3$ $6(1-t) = 1$ $6 - 6t = 1$ $5 = 6t$ $t = \frac{5}{6}$ ($0 \leqq t \leqq 1$に適する)

$\therefore$ N$(5t, 2t) \equiv$ N$(\frac{25}{6}, \frac{5}{3})$ 直線$\ell$の式は(ア)に同じ。

(補) (2)の(イ) △MNAの面積をtで表すとき、(その1)はtroublesomeです。しかし、△MABのときは、(その1)で求めます。




(2)(ア) Dの座標を求める. BDの傾き＝MAの傾き＝$\frac{4-2}{1-5}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$

よって, 直線BD：$y=-\frac{1}{2}x+6$ ---①

直線OA：$y=\frac{2}{5}x$ ---②

①,②を連立して, $\frac{2}{5}x=-\frac{1}{2}x+6$　$4x=-5x+60$

$9x=60$　$x=\frac{60}{9}=\frac{20}{3}$　$y=\frac{2}{5}\times\frac{20}{3}=\frac{8}{3}$　∴ D$\left(\frac{20}{3}, \frac{8}{3}\right)$

Eの座標を求める. CEの傾き＝MOの傾き＝4

よって直線CE：$y=4(x-2)+2=4x-6$ ----③

直線OA：$y=\frac{2}{5}x$ ---②

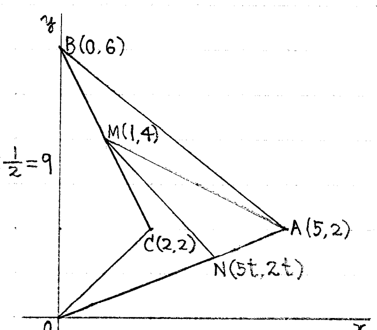
③,②を連立して　$4x-6=\frac{2}{5}x$　$20x-30=2x$　$18x=30$　$x=\frac{30}{18}=\frac{5}{3}$　$y=\frac{2}{5}\times\frac{5}{3}=\frac{2}{3}$　∴ E$\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

DEの中点Nを求める. $x=\frac{\frac{20}{3}+\frac{5}{3}}{2}=\frac{25}{6}$, $y=\frac{\frac{8}{3}+\frac{2}{3}}{2}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$　∴ $\underline{N\left(\frac{25}{6}, \frac{5}{3}\right)}$

直線ℓ(直線MN)の式を求める. 傾き $\frac{\frac{5}{3}-4}{\frac{25}{6}-1}=\frac{(\frac{5}{3}-4)\times 6}{(\frac{25}{6}-1)\times 6}=\frac{10-24}{25-6}=\frac{-14}{19}=-\frac{14}{19}$

直線ℓ：$y=-\frac{14}{19}(x-1)+4=-\frac{14}{19}x+\frac{14}{19}+\frac{76}{19}=\underline{-\frac{14}{19}x+\frac{90}{19}}$

(イ) 線分OAは, $y=\frac{2}{5}x$, $0\leqq x\leqq 5$, である. $y=\frac{2}{5}x$ に $x=5t$, $y=2t$ を代入すると成立するので, $(5t, 2t)$ は直線 $y=\frac{2}{5}x$ 上の点であり, $0\leqq x\leqq 5$ の $x$ に $x=5t$ を入れて, $0\leqq 5t\leqq 5$　∴ $0\leqq t\leqq 1$ とすることにより, 線分OA上の点の座標として, $(5t, 2t)$, $0\leqq t\leqq 1$ が得られる. (N$(5t, 2t)$, $0\leqq t\leqq 1$ とおく.)



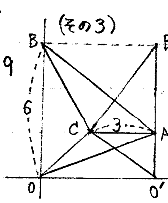

くさび形OABCの面積を求める. (次の(その1), (その2), (その3))

(その1) くさび形OABC＝△OAB－△OCB＝$6\times 5\times\frac{1}{2}-6\times 2\times\frac{1}{2}=15-6=9$

(その2) くさび形OABC＝△CAB＋△CAO＝$(5-2)\times(6-2)\times\frac{1}{2}+(5-2)\times(2-0)\times\frac{1}{2}=9$

(その3) くさび形OABC＝△CAB＋△CAO＝△CAB′＋△CAO′

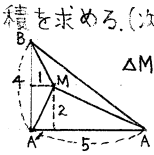
＝△CB′O′＝B′O′×CA×$\frac{1}{2}$＝OB×CA×$\frac{1}{2}$＝$6\times 3\times\frac{1}{2}=9$




四角形MNAB＝くさび形OABC×$\frac{1}{2}$＝$9\times\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

△MABの面積を求める. (次の(その1), (その2).)

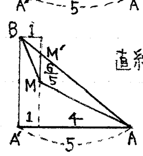
(その1)




△MAB＝△A′AB－△A′AM－△A′MB

＝$5\times 4\times\frac{1}{2}-5\times 2\times\frac{1}{2}-4\times 1\times\frac{1}{2}=10-5-2=3$

(その2)




直線ABの式：$y=\frac{2-6}{5-0}x+6=-\frac{4}{5}x+6$　$x=1$ のとき $y=-\frac{4}{5}+6=\frac{26}{5}$　∴ M′$\left(1, \frac{26}{5}\right)$

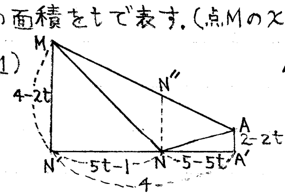
$M'M=\frac{26}{5}-4=\frac{6}{5}$　△MAB＝△MM′B＋△MAM′＝$M'M\times 1\times\frac{1}{2}+MM'\times 4\times\frac{1}{2}=MM'\times A'A\times\frac{1}{2}$

△MAB＝$\frac{6}{5}\times 5\times\frac{1}{2}=3$

△MNA＝四角形MNAB－△MAB＝$\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$　次に△MNAを$t$で表し, $\frac{3}{2}$と等号で結び, $t$の値を求める.

△MNAの面積を$t$で表す. (点Mの$x$座標1より点Nの$x$座標$5t$の方が大きいことは, 明らか. すなわち $1<5t$)

(その1)




△MNA＝台形MN′A′A－△MN′N－△NA′A

$=\frac{\{(4-2t)+(2-2t)\}\times 4}{2}-\frac{(4-2t)(5t-1)}{2}-\frac{(5-5t)(2-2t)}{2}$

$=2(6-4t)-\frac{2(2-t)(5t-1)}{2}-\frac{10(1-t)(1-t)}{2}$

$=12-8t-(10t-2-5t^2+t)-5(1-2t+t^2)=9-9t$

(その2) 上の(その1)の図　直線AMの式：$y=\frac{2-4}{5-1}(x-1)+4=-\frac{1}{2}(x-1)+4=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+4=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$

$x=5t$ のとき $y=-\frac{1}{2}\times 5t+\frac{9}{2}=\frac{9-5t}{2}$　∴ N″$\left(5t, \frac{9-5t}{2}\right)$　∴ △MNA＝$4\times\left(\frac{9-5t}{2}-2t\right)\times\frac{1}{2}=9-9t$

前頁 P.3の(6)の下に続く.

## 回転体の体積

[類3] 点A(4,0)，点B(0,4)，点C(a,6)とする．(計算に自信がある人は a=3，他の人は，a=2 でどうぞ！)

(1) 直線ABと直線OCの交点Dの座標を求めよ．

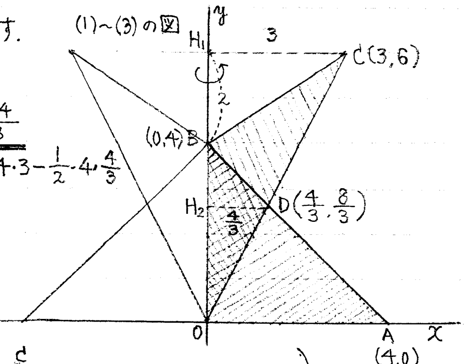
(2) 凹五角形の図形OADCBの面積Sを求めよ．

(3) 凹五角形の図形OADCBをy軸のまわりに回転してできる回転体の体積$V_y$を求めよ．

(4) 凹五角形の図形OADCBをx軸のまわりに回転してできる回転体の体積$V_x$を求めよ．

(解) この(解)は $\boxed{a=3}$ のときです．a=2のときの(解)は，最下段(補)にあります．

(1)～(3)の図




(1) OC：$y=2x$　と　AB：$y=-x+4$ を連立して解けば，$D\left(\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right)$

(2) $S=\triangle OAD+\triangle OCB=\frac{1}{2}\cdot4\cdot\frac{8}{3}+\frac{1}{2}\cdot4\cdot3=2\cdot\left(\frac{8}{3}+3\right)=2\cdot\frac{17}{3}=\frac{34}{3}$

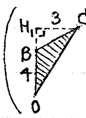
別解)(3)につなぐために，$S=\triangle OAB+\triangle OCB-\triangle ODB=\frac{1}{2}\cdot4\cdot4+\frac{1}{2}\cdot4\cdot3-\frac{1}{2}\cdot4\cdot\frac{4}{3}$

$=\frac{1}{2}\cdot4\cdot\left(4+3-\frac{4}{3}\right)=2\cdot\left(7-\frac{4}{3}\right)=2\cdot\frac{17}{3}=\frac{34}{3}$

(3) $V_y=\triangle OAB$回転体$+\triangle OCB$回転体$-\triangle ODB$回転体

$=\frac{1}{3}\pi\cdot4^2\cdot4+\left(\frac{1}{3}\pi\cdot3^2\cdot6-\frac{1}{3}\pi\cdot3^2\cdot2\right)-\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot4$

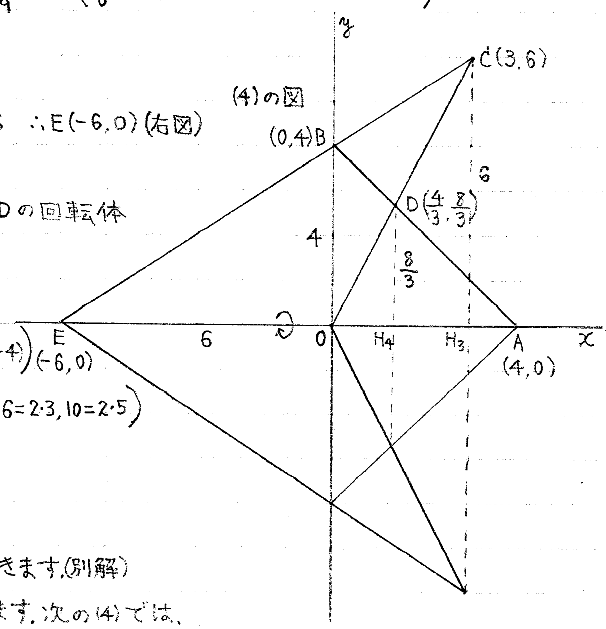
$=\frac{1}{3}\pi\cdot4^2\cdot4+\frac{1}{3}\pi\cdot3^2\cdot(6-2)-\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot4$

$=\frac{1}{3}\pi\cdot4\cdot\left(4^2+3^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2\right)=\frac{4\pi}{3}\left(4^2+\left(3+\frac{4}{3}\right)\left(3-\frac{4}{3}\right)\right)$　(  の回転体$=\frac{1}{3}\pi\cdot3^2\cdot4$ でOK.)

$=\frac{4\pi}{3}\left(4^2+\frac{13}{3}\cdot\frac{5}{3}\right)=\frac{4\pi}{3}\left(16+\frac{65}{9}\right)=\frac{4\pi}{3}\times\frac{144+65}{9}$

$=\frac{4\pi}{3}\times\frac{209}{9}=\frac{836\pi}{27}$

(4)の図




(4) BC：$y=\frac{2}{3}x+4$　$y=0$ を代入して $-4=\frac{2}{3}x$　$x=-6$　∴E(−6,0)(右図)

$V_x=\triangle OCB$の回転体$+\triangle OAD$の回転体

$=(\triangle OCE$の回転体$-\triangle OBE$の回転体$)+\triangle OAD$の回転体

$=\left(\frac{1}{3}\pi\cdot6^2\cdot6-\frac{1}{3}\pi\cdot4^2\cdot6\right)+\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^2\cdot4$

$=\frac{\pi}{3}\cdot6\cdot(6^2-4^2)+\frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^2\cdot4$

$=\frac{\pi}{3}\cdot6\cdot10\cdot2+\frac{\pi}{3}\cdot\frac{8^2}{3^2}\cdot4$　$(\because 6^2-4^2=(6+4)(6-4))$

$=\frac{\pi}{3}\cdot8\cdot\left(3\cdot5\cdot1+\frac{8}{3^2}\cdot4\right)=\frac{8\pi}{3}\cdot\left(15+\frac{32}{9}\right)$　$(\because 6=2\cdot3,\ 10=2\cdot5)$

$=\frac{8\pi}{3}\cdot\frac{135+32}{9}=\frac{8\pi}{3}\cdot\frac{167}{9}=\frac{1336\pi}{27}$

(補) (3)は，double countの△ODBを引いた．(2)も同様にできます(別解)

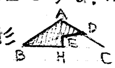
(3)の△OCBの回転体$=\frac{1}{3}\pi CH_1^2\times OB$ ということになります．次の(4)では，

(4)の△OCEの回転体$=\frac{1}{3}\pi\cdot CH_3^2\times OE$ です．

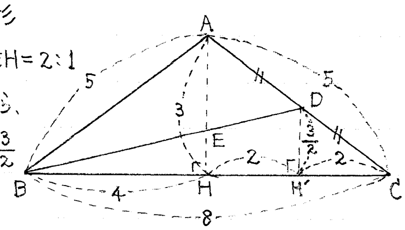
(3)の △ODBの回転体$=\frac{1}{3}\pi\cdot DH_2^2\times OB$ です．次の(4)では，(4)の△OADの回転体$=\frac{1}{3}\pi\cdot DH_4^2\times OA$ です．

計算の途中で $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ を用いました．ついでに $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ です．$a^2+b^2\neq(a+b)^2$

$\boxed{a=2}$ のときの(解) (1) D(1,3)　(2) S=10　(3) $V_y=\frac{76\pi}{3}$　(4) $V_x=\frac{116\pi}{3}$

［類4］二等辺三角形ABC(AB=AC=5, BC=8)の頂点Aから辺BCに垂線AHをおろす. 辺ACの中点をDとし, BDとAHの交点をEとする. 次の問に答えよ. (1) AEの長さを求めよ. (2) BDの長さを求めよ.
(3) 図形  の面積Sを求めよ. (4), (3)の図形を辺BCのまわりに回転してできる回転体の体積Vを求めよ.

(解1) AB(=AC)=5, BH(=CH)=4 だから, △ABHは, AH=3 である直角三角形




(1)(点Eは, △ABCの中線AHとBDの交点だから, △ABCの重心であり, AE:EH=2:1 であることにより, AE=2 ではあるが, (2)のBDの長さを考えて.) 点Dから, BCに垂線DH'をおろす. 中点連結定理により(AD=DC), $DH'=\frac{AH}{2}=\frac{3}{2}$

$HH'=\frac{CH}{2}=\frac{4}{2}=2$ △BEH∽△BDH' だから, EH:DH'=BH:BH'

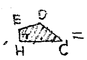
$EH:\frac{3}{2}=4:6=2:3$ $3\times EH=\frac{3}{2}\times 2=3$ ∴EH=2 $\underline{AE}=AH-EH=3-1=\underline{2}$

(補)重心が中線を2:1に内分することの証明はできますか? 面積を用いる証明は有名です. 最下段(補)もあり.

(2) 直角三角形BDH'に三平方の定理を用いて, $BD^2=DH'^2+BH'^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+6^2=\frac{3^2}{2^2}+(2\times3)^2=\frac{3^2}{2^2}+2^2\times3^2=3^2\times\left(\frac{1}{2^2}+2^2\right)$

$=3^2\times\left(\frac{1}{4}+4\right)=3^2\times\frac{17}{4}=\left(\frac{3}{2}\right)^2\times17$ ∴$\underline{BD}=\frac{3}{2}\sqrt{17}=\underline{\frac{3\sqrt{17}}{2}}$

(補)パップスの定理より, $AB^2+BC^2=2(BD^2+CD^2)$ $5^2+8^2=2\left(BD^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)$ $2BD^2=25+64-\frac{25}{2}=\frac{153}{2}=\frac{3^2\times17}{2}$ ∴$BD=\frac{3\sqrt{17}}{2}$

(3) $\triangle ABD=S_1$, $\triangle BEH=S_2$,  $=S_3$ とおくと, $S=S_1+S_2=(S_1+S_2+S_3)-(S_2+S_3)+S_2=\triangle ABC-\triangle DBC+\triangle BEH$

$\underline{S}=8\times3\times\frac{1}{2}-8\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}+4\times1\times\frac{1}{2}=12-6+2=\underline{8}$

(補) $S=\triangle ABD+\triangle BEH=AE\times BH'\times\frac{1}{2}+EH\times BH\times\frac{1}{2}=2\times6\times\frac{1}{2}+1\times4\times\frac{1}{2}=8$ ですが, (4)を考えてかきました. $S=\triangle ADE+\triangle ABH$ でも勿論OKです.

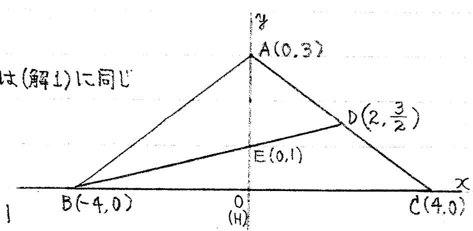
| 答 | |
|---|---|
| | (1) 2 |
| | (2) $\frac{3\sqrt{17}}{2}$ |
| | (3) 8 |
| | (4) $\frac{58\pi}{3}$ |

(4) V = △ABCの回転体の体積$V_1$ − △DBCの回転体の体積$V_2$ + △BEHの回転体の体積$V_3$

$V_1=\pi\times AH^2\times BC\times\frac{1}{3}=\frac{\pi}{3}\times3^2\times8$, $V_2=\pi\times DH'^2\times BC\times\frac{1}{3}=\frac{\pi}{3}\times\left(\frac{3}{2}\right)^2\times8$, $V_3=\pi\times EH^2\times BH\times\frac{1}{3}=\frac{\pi}{3}\times1^2\times4$

$\underline{V}=\frac{\pi}{3}\left(3^2\times8-\left(\frac{3}{2}\right)^2\times8+4\right)=\frac{\pi}{3}(72-18+4)=\frac{\pi}{3}\times58=\underline{\frac{58\pi}{3}}$

(解2) 原点をH, BCをx軸, AHをy軸とする直交座標を考える. AH=AO=3は(解1)に同じ




(1), (2) $BD^2=(2-(-4))^2+\left(\frac{3}{2}-0\right)^2=6^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2$ 以下(解1)に同じ.

直線BDの傾きは, $\frac{\frac{3}{2}-0}{2-(-4)}=\frac{\frac{3}{2}}{6}=\frac{\frac{3}{2}\times2}{6\times2}=\frac{3}{6\times2}=\frac{1}{4}$

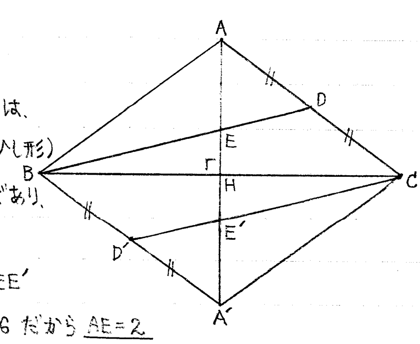
直線BDは, B(-4,0)を通るから, ※BD: $y=\frac{1}{4}(x-(-4))+0=\frac{1}{4}x+1$

$x=0$ とおいて $y=1$ ∴E(0,1) よって $\underline{AE}=3-1=\underline{2}$

ACの中点$D\left(\frac{0+4}{2}, \frac{3+0}{2}\right)\equiv D\left(2,\frac{3}{2}\right)$

※は, $D\left(2,\frac{3}{2}\right)$を通るから, $y=\frac{1}{4}(x-2)+\frac{3}{2}=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{1}{4}x+1$ のようにもできます.

(3), (4)は, (解1)に同じ




(補) AHを延長し, AH=HA'となる点A'をとる. 四角形ABA'Cの対角線AA', BCは, 互いに他を二等分するから, 四角形ABA'Cは平行四辺形(この場合はひし形)

A'Bの中点をD', CD'とAA'の交点をE'とする. AC=A'B だから, CD=D'Bであり, CD∥D'B とから, 四角形CDBD'は平行四辺形. ∴DB∥CD'

△AE'Cを見て, DE∥CE' と AD=DC だから, 中点連結定理により, AE=EE'

△A'EBを見て, 同様に, A'E'=E'E ∴AE=EE'=E'A' AA'=2AH=2×3=6 だから $\underline{AE=2}$

※この(補)は, 一般の三角形でもOKで, 重心が中線を2:1に内分するする証明にも, つながります.

## 重心

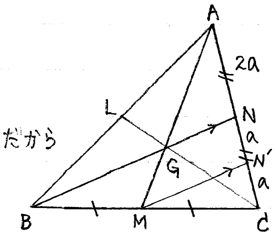
[類4] △ABCの辺BCの中点をM, 辺ACの中点をNとする.

(1) AMとBNの交点をGとするとき, AG：GM＝2：1 となることを証明せよ.

(2) 直線CGと辺ABの交点をLとする. AL＝LBであることを証明せよ.

(3) △GAL, △GBL, △GBM, △GCM, △GCN, △GANの面積は全て等しいことを証明せよ.

(考) 三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ線分を中線といいます.
中線の交点Gを重心といいます.

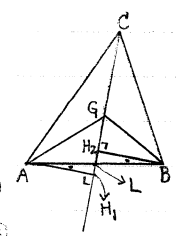



(解) (1) (その1) 点Mを通りBN(GN)に平行な直線とACとの交点をN′とする. 条件よりBM＝CMだから
中点連結定理より, NN′＝N′C(＝aとおく), GN∥MN′だから, △AGN∽△AMN′
相似比は AG：AM＝AN：AN′＝2a：3a＝2：3 (∵条件より AN＝NC＝2a)
よって AG：GM＝2：1

(その2) P.3の(9)(補)と同様です. (補)は, ∠AHB＝90°ですが, 90°でなくても同じです.

(2), (3) BM＝CM だから, △GBM＝△GCM(＝Sとおく), (1)より AG：GM＝2：1 だから, △GMC×2＝△GCA＝△GCN＋△GAN
2S＝△GCN＋△GAN＝2×△GCN (∵CN＝AN) ∴△GCN＝△GAN＝S
△GCA＝△GCB＝2S だから AL＝LB※ AG：GM＝2：1だから △GBM×2＝△GAB＝△GAL＋△GBL
2S＝△GAL＋△GBL＝2×△GAL (∵AL＝LB) ∴△GAL＝△GBL＝S

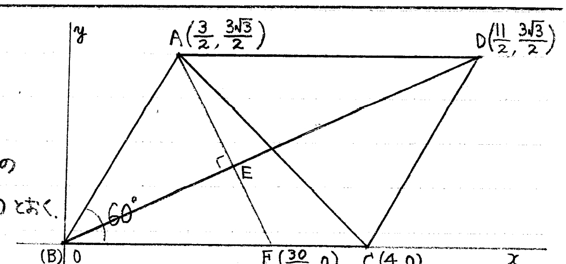
※右図 △GCA＝△GCB(＝2S)のとき AL＝LB を示す.




直線CLに点A, 点Bからそれぞれ垂線$AH_1$, $BH_2$をおろす.
$\triangle AH_1L$と$\triangle BH_2L$において,
$AH_1=BH_2$の証明 △GCA＝△GCB $\frac{1}{2}\times GC\times AH_1=\frac{1}{2}\times GC\times BH_2$ ∴$AH_1=BH_2$ ---①
$AH_1\parallel BH_2$だから錯角が等しいので, $\angle LAH_1=\angle LBH_2$ ---②, $\angle AH_1L=\angle BH_2L=90°$ ---③
①,②,③より, 一辺と両端の角がそれぞれ等しいので, $\triangle AH_1L\equiv\triangle BH_2L$ ∴AL＝BL＝LB

---

P.7の(10)の(別解)です. (1)～(4)は, 座標をとっても(解)と同じです.




右の様に座標を定める. ODの傾きは, $\dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{11}{2}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{11}$, OD⊥AFだから
AFの傾きは$-\dfrac{11}{3\sqrt{3}}$, AFはA$\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$を通るから, 直線AFの式は,
$y=-\dfrac{11}{3\sqrt{3}}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ----① 今, Fの座標を求め, △BFEと△DAEの
相似比を求めるのが目的だから, このstageで計算を止めて, y＝0とおく.
$\dfrac{11}{3\sqrt{3}}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ $22\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=27$ $x=\dfrac{27}{22}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{60}{22}=\dfrac{30}{11}$ ∴F$\left(\frac{30}{11},0\right)$
よって $\underline{OF=BF=\frac{30}{11}}$, $AF^2=\left(\frac{3}{2}-\frac{30}{11}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(\frac{33}{22}-\frac{60}{22}\right)^2+\frac{27}{4}=\left(-\frac{27}{22}\right)^2+\frac{27}{4}=\frac{27^2}{22^2}+\frac{27}{4}=27\times\left(\frac{27}{22^2}+\frac{1}{4}\right)$
$AF^2=27\times\left(\frac{27}{4\cdot 11^2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{27}{4}\times\left(\frac{27}{11^2}+1\right)=\frac{27}{4}\times\frac{148}{11^2}=\frac{3^2\times 111}{11^2}$ $AF=\frac{3\sqrt{111}}{11}$ △BFE∽△DAE 相似比 FE：AE＝BF：DA＝$\frac{30}{11}$：4＝15：22
したがって $\underline{AE}=\frac{22}{15+22}\times AF=\frac{22}{37}\times\frac{3\sqrt{111}}{11}=\underline{\frac{6\sqrt{111}}{37}}$ $\underline{BE}=\frac{15}{15+22}\times BD=\frac{15}{37}\times\sqrt{37}=\underline{\frac{15\sqrt{37}}{37}}$
$\underline{EF}=\frac{15}{15+22}\times AF=\frac{15}{37}\times\frac{3\sqrt{111}}{11}=\underline{\frac{45\sqrt{111}}{407}}$

(補) AFを求める計算がtroublesomeでしたが, これぐらいの計算力はあって欲しいものです. しかし, Eの座標を求めてとなると, 大変なことですね. Eの座標を求めてみます. ①と$y=\frac{3\sqrt{3}}{11}x$を連立して $\frac{3\sqrt{3}}{11}x=-\frac{11}{3\sqrt{3}}\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{3\sqrt{3}}{2}$
$\frac{27}{11}x=-11\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{27}{2}=-11x+\frac{33}{2}+\frac{27}{2}=-11x+30$ $27x=-121x+330$ $148x=330$ $x=\frac{330}{148}=\frac{165}{74}$ -----

[類5] 直角三角形ABC（$\angle A=90^\circ$, $AB=1$, $AC=2$）と直角三角形A'BC（$\angle A'=90^\circ$, $A'B=2$, $A'C=1$）を辺BCが一致するように重ね合わせる。ACとA'Bの交点をDとする。図形BCA'DAB（凹五角形）をBCを軸として回転してできる回転体の体積Vを求めたい。(1) 長さ2を右の長さとする。$\xleftrightarrow{\ \ 2\ \ }$ 題意の凹五角形を作図せよ。(2) 体積Vを求めよ。

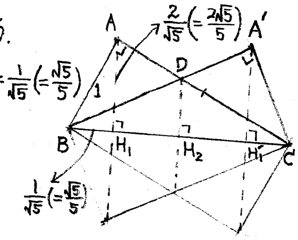
小は、$\angle A=90^\circ$, $AB=3$, $AC=4$, $\angle A'=90^\circ$, $A'B=4$, $A'C=3$ として解いて下さい。

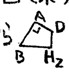
[考] (1) BCを軸として回転するのだから、(2)のことも考えて、見やすくしましょう。[これでもカイ]で計算力upの練習をします。

(2) 円錐台の体積は、「円錐$\underset{マイナス}{-}$円錐」で求めるか、「円錐の体積比を利用するか」です。計算は、複雑にならないように考えましょう。

気付いておられる人もいるでしょうが、下段にある[Best解]をせずに、まず[これでもカイ]を必ずやって下さい。

[これでもカイ] (1) 右図（余分な線を消しましたが、コンパス、定規で作図しました。）




(2) 対称性から  をBH$_2$の回りに回転させた回転体の体積を求め2倍する。



（$\triangle ABC \backsim \triangle H_1BA$）

三平方の定理より、$BC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt5$，相似を利用すると、$BH_1=AB\times\frac{1}{\sqrt5}=1\times\frac{1}{\sqrt5}=\frac{1}{\sqrt5}\left(=\frac{\sqrt5}{5}\right)$

$AH_1=BH_1\times\frac{2}{1}=\frac{2}{\sqrt5}\left(=\frac{2\sqrt5}{5}\right)$，$CH_2=\frac{BC}{2}=\frac{\sqrt5}{2}$，$CH_1=AH_1\times2=\frac{4}{\sqrt5}\left(=\frac{4\sqrt5}{5}\right)$

・$\triangle ABH_1$の回転体（円錐）$V_1=\pi\times\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)^2\times\frac{\sqrt5}{5}\times\frac13=\pi\times\frac45\times\frac{\sqrt5}{5}\times\frac13=\frac{4\sqrt5\pi}{3\times5^2}$

・台形$AH_1H_2D$の回転体（円錐台）$V_2$について。

$\triangle AH_1C \backsim \triangle DH_2C$（相似比 $CH_1:CH_2=\frac{4\sqrt5}{5}:\frac{\sqrt5}{2}=\frac45:\frac12=\frac85:1=8:5$）より、体積比 $8^3:5^3$

$\triangle AH_1C$の回転体（円錐）：$\pi\times\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)^2\times\frac{4\sqrt5}{5}\times\frac13=\frac{4^2\sqrt5\pi}{3\times5^2}$

よって $V_2=\frac{4^2\sqrt5\pi}{3\times5^2}\times\frac{8^3-5^3}{8^3}$※$=\frac{4^2\sqrt5\pi\times387}{3\times5^2\times(2\times4)^3}=\frac{4^2\sqrt5\times3\times129}{3\times5^2\times2^3\times4^3}\pi=\frac{129\sqrt5}{5^2\times2^3\times4}\pi$ ----①

したがって $V_1+V_2=\frac{4\sqrt5}{3\times5^2}\pi+\frac{129\sqrt5}{5^2\times2^3\times4}\pi=\frac{\sqrt5}{5^2}\pi\times\left(\frac43+\frac{129}{2^3\times4}\right)=\frac{\sqrt5}{5^2}\pi\times\left(\frac43+\frac{129}{32}\right)=\frac{\sqrt5}{5^2}\pi\times\frac{4\times32+3\times129}{3\times32}=\frac{\sqrt5}{5^2}\pi\times\frac{515}{3\times32}$

$=\frac{\sqrt5}{5^2}\times\frac{5\times103}{3\times32}\times\pi=\frac{103\sqrt5}{3\times32\times5}\pi$

よって求める体積は、$2(V_1+V_2)=\frac{2\times103\sqrt5}{3\times32\times5}\pi=\frac{103\sqrt5}{3\times16\times5}\pi=\underline{\frac{103\sqrt5}{240}\pi}$

| 答 | (1) 上図 (2) $\frac{103\sqrt5}{240}\pi$ |
|---|---|

※(補1) $8^3-5^3=512-125=387$ ですが、高校になると $8^3-5^3=(8-5)(8^2+8\times5+5^2)=3\times(64+40+25)=3\times129$ のように、計算できて、3の因数が見えてます。君の計算力はどうでしたか？ ここで、[Best解]をやってみることにしましょうか！

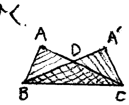
(補2) $V_2$を円錐$\underset{マイナス}{-}$円錐で計算してみます。$DH_2=CH_2\times\frac12=\frac{\sqrt5}{2}\times\frac12=\frac{\sqrt5}{4}$

$V_2=\pi\times\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)^2\times\frac{4\sqrt5}{5}\times\frac13-\pi\times\left(\frac{\sqrt5}{4}\right)^2\times\frac{\sqrt5}{2}\times\frac13=\frac{4^2\sqrt5}{3\times5^2}\pi-\frac{5\sqrt5}{4^2\times2\times3}\pi=\frac{\sqrt5}{3}\pi\times\left(\frac{4^2}{5^2}-\frac{5}{4^2\times2}\right)=\frac{\sqrt5}{3}\pi\times\frac{4^4\times2-5^3}{5^2\times4^2\times2}$

$=\frac{\sqrt5}{3}\pi\times\frac{512-125}{5^2\times4^2\times2}=\frac{387\sqrt5}{3\times5^2\times4^2\times2}\pi=\frac{3\times129\sqrt5}{3\times5^2\times4^2\times2}=\frac{129\sqrt5}{5^2\times4^2\times2}\left(=\frac{129\sqrt5}{5^2\times4\times2\times4}=\frac{129\sqrt5}{5^2\times2^3\times4}\right.$ となり①と同じ$\left.\right)$

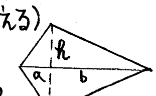
となって、この方法が良いかも、--- $8^3-5^3$は出てこないが、$4^4$が出てきました。分母は、積のままで計算すると、分子との約分ができる場合に便利です。計算も因数分解の形を用いましょう。

[Best解] $\triangle ABC$と$\triangle A'BC$を単独に回転させ2つの体積の和から、doubleで計算した$\triangle DBC$の回転体の体積をひく。




求める体積 $=\left\{\pi\times\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)^2\times\sqrt5\times\frac13\right\}\times2-\pi\times\left(\frac{\sqrt5}{4}\right)^2\times\sqrt5\times\frac13=\frac{8\sqrt5\pi}{5\times3}-\frac{5\sqrt5\pi}{4^2\times3}=\frac{\sqrt5\pi}{3}\times\left(\frac85-\frac{5}{4^2}\right)$

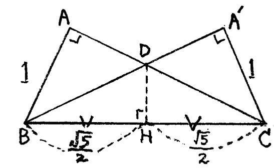
$=\frac{\sqrt5\pi}{3}\times\frac{8\times4^2-5^2}{5\times4^2}=\frac{\sqrt5\pi\times103}{3\times5\times4^2}=\underline{\frac{103\sqrt5}{240}\pi}$（この方法は是非とも覚える）



の体積 $=\pi\times h^2\times(a+b)\times\frac13$

[これでもカイ]と[Best解]の差大変なことです。しかし、[これでもカイ]の計算は今、中3のstageで、身につけておくことです。先日、小6生に $2^2, 2^3, 2^4, \cdots, 2^{25}$ まで、順にかけて、（途中で $4\times8$ などとしてはいけない）答を出せと、やってもらいました。途中、間違ったら答が出ません。ウサギとカメです。計算力は「確実に」が先であることを教訓とします。

[類5'] 本題の凹五角形BCA'DABの面積を求めよ.




(解) DからBCに垂線DHをおろす. 対称性から, $BH=CH$

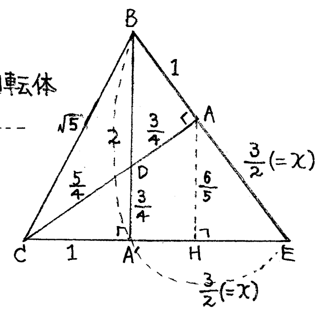
三平方の定理より, $BC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, $CH=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\triangle ABC \sim \triangle HDC$ から, $DH=CH\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{4}$

したがって 凹五角形 $=\triangle ABC+\triangle A'BC-\triangle BCD=2\triangle ABC-\frac{1}{2}\times BC\times DH$

$=2\times(1\times2\times\frac{1}{2})-\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{4}=2-\frac{5}{8}=\underline{\frac{11}{8}}$

[類5''] 本題で, CA'を軸として, 凹五角形BCA'DABを回転したときの体積$V_{CA'}$を求めよ.




(考) 直線BAと直線CA'の交点をEとして, △BCEの回転体−図形ADA'E(四角形ADA'E)の回転体としますか? いろいろありそうですが----本題の[Best解], [類1]などを参考にして,---- CE(=BE), AHなどを求めるには,----

(解) 図のように, 点E, 点H, をとり, $V_{CA'}=$ △BCEの回転体($V_1$) − △ACEの回転体($V_2$) + △DCA'の回転体($V_3$) として求める. 対称性から, △BCEは二等辺三角形. $A'E=AE=x$ とすると, 直角三角形BA'Eに三平方の定理を用いて, $(x+1)^2=x^2+2^2$　$2x=3$　$x=\frac{3}{2}$

$\triangle BA'E \sim \triangle AHE$ より, $AH=AE\times\frac{BA'}{BE}=\frac{3}{2}\times\frac{2}{1+\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\times\frac{2\times2}{(1+\frac{3}{2})\times2}=\frac{3}{2}\times\frac{2\times2}{2+3}=\frac{6}{5}$

$\triangle ACE \sim \triangle A'CD$ より, $DA'=CA'\times\frac{EA}{CA}=1\times\frac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}$, $V_1=\pi\times BA'^2\times CE\times\frac{1}{3}=\pi\times2^2\times\frac{5}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{10\pi}{3}$

$V_2=\pi\times AH^2\times CE\times\frac{1}{3}=\pi\times(\frac{6}{5})^2\times\frac{5}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{6\pi}{5}$, $V_3=\pi\times DA'^2\times CA'\times\frac{1}{3}=\pi\times(\frac{3}{4})^2\times1\times\frac{1}{3}=\frac{3\pi}{16}$

よって, 求める体積 $V_{CA'}=V_1-V_2+V_3=\frac{10\pi}{3}-\frac{6\pi}{5}+\frac{3\pi}{16}=\frac{50\pi-18\pi}{15}+\frac{3\pi}{16}=\frac{32\pi}{15}+\frac{3\pi}{16}=\frac{32\times16-3\times15}{15\times16}\pi=\underline{\frac{557}{240}\pi}$

((考)のようにすると少々 It's a bother.)

(補) $BD=BA'-DA'=2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$ です. $DA=DA'=\frac{3}{4}$ ですから, △DABは $DA:AB:BD=\frac{3}{4}:1:\frac{5}{4}=3:4:5$ の直角三角形. △DABと相似(or合同)である, △DA'C, △AHC, △EAC, △EHA, △EA'Bも全て 3:4:5 です. 面白いですねぇ~.

辺の長さを求める方法として, 三平方の定理, 相似, を用いました. 三平法の定理は二乗の計算です. 数字が大きくなると, troublesome になることも珍しくありません. 簡単に求まることを確かめながら用いることとします.

ACを軸として回転させると, △CA'Dが外に少しとび出して, 面倒そうですねぇ~. Try してみる?

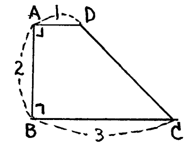
「このように, 1つの問題を解くにしても, いろいろと自分なりに考えてみることが, 君の数学力を高めます. しかしながら, 現実的には, 高校に入ると, そうはいきません. 小学から中学2, 3年迄に, そのような勉強法を取り入れていたかです. 高校へ入っても, 応用が効くような問題の解き方をしたかです. 良問は, 深く考え, 暗記するものは, 暗記しなければなりません. 数学は, 暗記ではないと思い込んで, 高校へ進学し, 入学後もそれを続ける人がいます. よほどの人(中には, 天才的な数学の考え方をもっている人もいますが, そのような方は, 是非とも, 数学発展に尽くしてもらいたいものです.)でない限り, 必ず, 高校数学の壁につきあたり, 成績が落ちてきます. 長年(40年ぐらい?), 教えていると, 中学までは, めだってできる方ではなかったが, 高校へ入って急に伸びてくる人もいます. 中学迄の勉強の仕方が良かった人です. 逆に, 高校へ入って, はじめのうち(大体11月~12月までか?)は, どうにか, 成績も良かったが, 1月, 2月頃に実施される, 難関大(含む医学科)模擬試験で, 思うような成績がとれなくなっている自分に気付くのです. 設問のレベルが上がってくるからです. そのようにならないような勉強をしてください.」

円錐台(台形の回転体)

[類6] (1)  底面の半径 $r$, 母線の長さ $\ell$ である直円錐の側面積 $S=\pi r\ell$ であることを示せ

(2) 右図、台形ABCDをABを軸として回転させてできる回転体(円錐台)の体積 $V$ を求めよ.

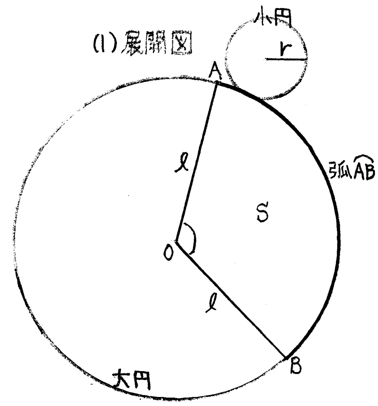
(3) (2)の円錐台の表面積を求めよ.




(解) (1) 右図、大円Oの弧$\widehat{AB}$の長さ = 小円の周の長さ = $2\pi r$

$\angle AOB = 360° \times \dfrac{\text{大円の弧}\widehat{AB}\text{の長さ}}{\text{大円の周の長さ}} = 360° \times \dfrac{2\pi r}{2\pi\ell} = 360° \times \dfrac{r}{\ell}$

$S$ = 扇形OAB = 大円の面積 $\times \dfrac{\angle AOB}{360°} = \pi\ell^2 \times \dfrac{360° \times \frac{r}{\ell}}{360°} = \pi\ell^2 \times \dfrac{r}{\ell} = \pi r\ell$




(2) 右下図 △OAD ∽ △OBC (相似比 1:3)

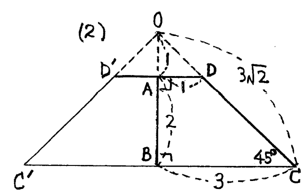
OA : OB = AD : BC = 1 : 3　3×OA = OB = OA+AB = OA+2　2×OA = 2 ∴OA = 1

大円錐 OCBC′ $= \pi \times 3^2 \times 3 \times \frac{1}{3} = 9\pi$

小円錐 ODAD′ : 大円錐 OCBC′ $= 1^3 : 3^3 = 1 : 27$

よって、求める体積 $V$ = 大円錐 OCBC′ $\times \dfrac{26}{27} = 9\pi \times \dfrac{26}{27} = \underline{\dfrac{26}{3}\pi}$

(補) 大円錐 − 小円錐 でも求まりますが……




(3) 大円錐の母線OC $= 3\sqrt{2}$, (1)より 大円錐の側面積 $= \pi \times 3 \times 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}\pi$

小円錐の側面積 : 大円錐の側面積 $= 1^2 : 3^2 = 1 : 9$

よって円錐台の側面積 $= 9\sqrt{2}\pi \times \dfrac{8}{9} = 8\sqrt{2}\pi$

よって、求める円錐台の表面積 $= 8\sqrt{2}\pi + \pi \times 1^2 + \pi \times 3^2 = 10\pi + 8\sqrt{2}\pi = \underline{(10+8\sqrt{2})\pi}$

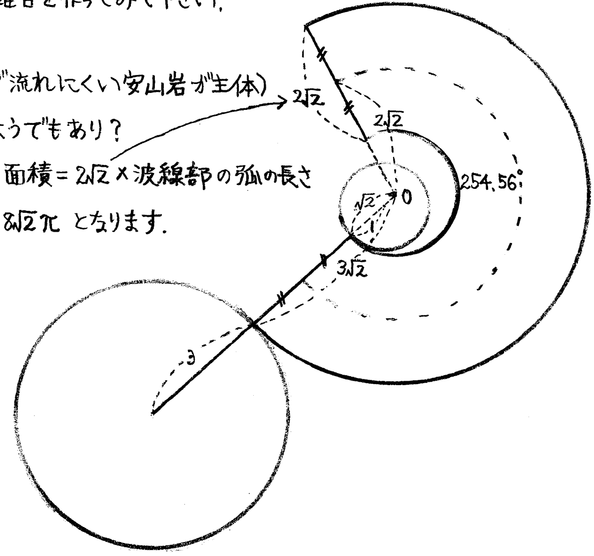
(補) 実際に、この円錐台の展開図をかいて、切りとって、円錐台を作ってみて下さい.

私がかいたら右のようになりました.

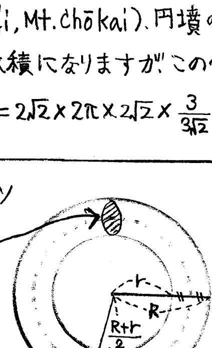
円錐台を作ったら、コニーデ式火山(成層火山)(溶岩が流れにくい安山岩が主体)のようでもあり、(like Mt. Fuji, Mt. Chōkai)、円墳のようでもあり?

- 本格的には、高校の理系微積になりますが、この側面積 $= 2\sqrt{2} \times$ 波線部の弧の長さ

$= 2\sqrt{2} \times \left(2\pi \times 2\sqrt{2} \times \dfrac{\angle AOB}{360°}\right) = 2\sqrt{2} \times 2\pi \times 2\sqrt{2} \times \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}\pi$ となります.




(問) 右のような、タイヤのチューブ、ドーナツみたいな円環(トーラス torus)の体積を求めよ.




(カイ) 円の面積 × 波線部の円周の長さ

$= \pi \times \left(\dfrac{R-r}{2}\right)^2 \times \left(2\pi \times \dfrac{R+r}{2}\right)$

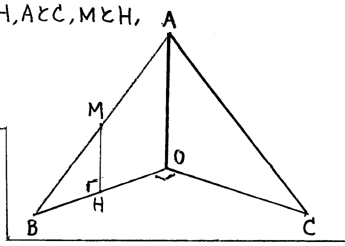
$= \dfrac{\pi^2 (R-r)^2 (R+r)}{4}$

- 円環を切って、円柱として考えることができる. 高校理系微積です.

## 三角形を折り曲げた三角錐

［類1］AB＝AC＝10，BC＝16，である二等辺三角ABCのAB，BCの中点をそれぞれM，Oとする．△ABCをAOを軸として図のように直角に折り曲げる．Mから線分OBに垂線MHをおろす．AとM，AとH，AとC，MとH，HとC，CとM，を結んで得られる立体A-MHCをVとする．

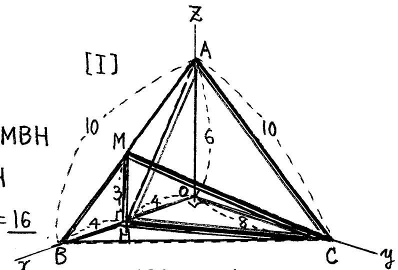
(1) 立体Vの名称をのべよ．　(2) 立体Vの体積 $v$ を求めよ．




(考) (1) 立体A-MHCは頂点A，△MHC，ということ　(2) 底面をどこに見るか，(補)参照

高さは，どこになるのか．

[I]




(解) (1) 三角錐

(2) (カイ1) 三角錐C－OAB＝三角錐C－OAH＋三角錐C－AMH（＝V）＋三角錐C－MBH

は底面が△OAB，高さがOCであるが，三角錐A-MHC＝三角錐C-AMH

$= v = \triangle AMH \times OC \times \frac{1}{3} = (MH \times OH \times \frac{1}{2}) \times OC \times \frac{1}{3} = (3 \times 4 \times \frac{1}{2}) \times 8 \times \frac{1}{3} = \underline{16}$

(勿論，三角錐C-OABから二つの三角錐を引いても求まります．)

△ABO≡△ACO

△ABOはAB＝10，BO＝8，∠AOB＝90°より，3：4：5の直角三角形となることから，OA＝6

HはBOの中点 ∴BH＝OH＝4

$MH = \frac{1}{2} \times OA = 3$

(カイ2) △OBCを底面，OAを高さとする三角錐A-OBCを考えて，

三角錐A-OBC＝三角錐M-HBC＋$v$＋三角錐A-OHC

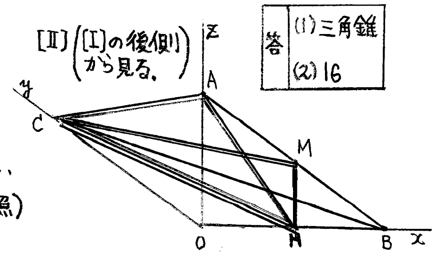
$\triangle OBC \times OA \times \frac{1}{3} = \triangle HBC \times MH \times \frac{1}{3} + v + \triangle OHC \times OA \times \frac{1}{3}$

$8 \times 8 \times \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{1}{3} = 4 \times 8 \times \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{1}{3} + v + 4 \times 8 \times \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{1}{3}$

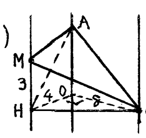
$64 = 16 + v + 32 \quad \therefore v = 64 - 48 = \underline{16}$

| 答 | (1) 三角錐 |
|---|---|
| | (2) 16 |

[II]（[I]の後側から見る．）




(補)




立体A-MHC（三角錐）は，△OHCを底面とする三角柱を平面AHCと平面AMCで切りとった切断三角柱(?)と捉えると，

$v = \frac{3+0+0}{3} \times \triangle OHC = 1 \times \frac{4 \times 8}{2} = \underline{16}$ です．（P.3の(ケ)(その2)参照）

図[II]は，図[I]の後側から見たような図です．Cを頂点とする三角錐が見えてきませんか．更に，図[III]は，図[I]を180°回転させた図です．

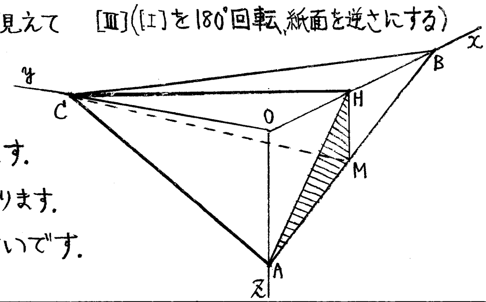
試験本番では，問題用紙を逆さにして見ればよい．

問題用紙の角（かど）のところを折り曲げて，ひそかに利用することもあります．

さまざまな角度から見る見取図をかけば，立体が見えてくることもあります．

図[III]は，CA，CH，AH，AM，MHが見える位置にあるので，わかりやすいです．

[III]（[I]を180°回転，紙面を逆さにする）




---

P.34の(4)の続き［類10］$\frac{2^{2n-1} \times 3^{2n} \times 5^{2n+1}}{k}$ $(n=1,2,\cdots)$ が自然数の平方となる自然数 $k$ の個数を $n$ で表せ

(解) 結果が $2^{偶} \times 3^{偶} \times 5^{偶}$ となればよい．

分母 $k$ は，右の $n$コ，$(n+1)$コ，$(n+1)$コのそれぞれから，1コを選んで，かけたものを $k$ とすれば，よい．

| | | |
|---|---|---|
| $2^1 = 2^{2\cdot1-1}$ | $3^0 = 3^{2\cdot0}$ | $5^1 = 5^{2\cdot0+1}$ |
| $2^3 = 2^{2\cdot2-1}$ | $3^2 = 3^{2\cdot1}$ | $5^3 = 5^{2\cdot1+1}$ |
| $2^5 = 2^{2\cdot3-1}$ | $3^4 = 3^{2\cdot2}$ | $5^5 = 5^{2\cdot2+1}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $2^{2n-1} = 2^{2\cdot n-1}$ | $3^{2n} = 3^{2\cdot n}$ | $5^{2n+1} = 5^{2\cdot n+1}$ |
| $n$コ | $n+1$コ | $n+1$コ |

したがって $\underline{n(n+1)^2\text{個}}$

例えば $\frac{2^3 \times 3^4 \times 5^5}{k}$ のとき $k = 2^1 \times 3^2 \times 5^1$ とすれば $2^2 \times 3^2 \times 5^4 = (2 \times 3 \times 5^2)^2 = 150^2$ となる

[類14] $\angle A=90^\circ$ である直角二等辺三角形ABCの$\angle A$の3等分線をひき、辺BCとの交点を点Bから近い順に点D、点Eとする。このとき、$\triangle ABD:\triangle ADE:\triangle AEC=1:\square:1$（面積比）となる。[$\sqrt{3}-1$]

(考) 小、中学生のときの勉強の方法がまずかった人は、高校に入っても苦労します。この設問は、中3でも解けます。Best解は？1つの(解)で満足せずに、さまざまな解法にtryして下さい。私の(解)は、後になる程、simple(?)になります。

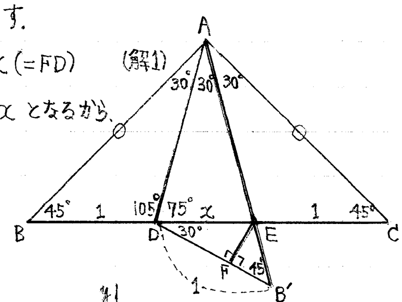
(解1) ADを軸にして$\triangle ABD$を折り曲げ、$\triangle AB'D$とする。EからDB'に垂線EFをおろす。

定三角定規の辺の比（$1:\sqrt{3}:2$、$1:1:\sqrt{2}$）により、$DE=x$ のとき $DF=\frac{\sqrt{3}}{2}x$ $(=FD)$

$EF=B'F=\frac{1}{2}x$ よって $BD=B'D=1$、$B'D=B'F+FD=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}x$ となるから、

$1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}x$ $\therefore x=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2-1^2}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1}=\sqrt{3}-1$

よって、$\triangle ABD:\triangle ADE:\triangle AEC=1:\boxed{\sqrt{3}-1}:1$ となる。



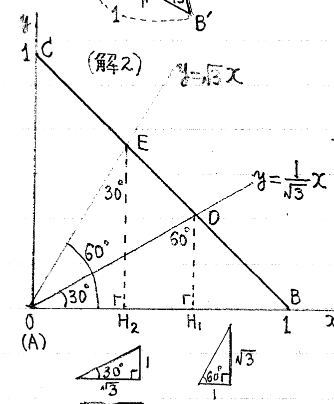

(解2) 点Aを原点Oとする座標軸を右のように定める。直線ODの傾きは $\frac{1}{\sqrt{3}}$ であるから、直線ODの式は、$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ ---① 直線OE(AE)の傾きは、$\sqrt{3}$ であるから直線OE(AE)の式は、$y=\sqrt{3}x$ ---② $OB=OC(=AC)=1$ とおけば、$B(1,0)$、$C(0,1)$ であるから、直線BCの式は、$y=-x+1$ ---③

①と③を連立して、点Dの$x$座標を求める。$\frac{1}{\sqrt{3}}x=-x+1$ $x=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$

$(\sqrt{3}+1)x=\sqrt{3}$ $x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ $\therefore OH_1=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ ※

②と③を連立して、点Eの$x$座標を求める。$\sqrt{3}x=-x+1$ $(\sqrt{3}+1)x=1$

$x=\frac{1}{\sqrt{3}+1}$ $\therefore OH_2=\frac{1}{\sqrt{3}+1}$




$CE:ED=OH_2:H_2H_1=\frac{1}{\sqrt{3}+1}:\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}=1:\sqrt{3}-1$ よって、$\triangle ABD:\triangle ADE:\triangle AEC=1:\boxed{\sqrt{3}-1}:1$

(補) ※ むやみに有理化するものではありません。最終ステージで、必要とあらば、有理化します。(解1)は、点Dから辺ABに垂線をおろすなどとしてもできます。面積に、持ち込むのもいいですね。P.5の(10)にあります。

次の(解3)(解4)及び、P.5の(12)の(解16)(解17)は、高1用です。

(解3) $AB=AC=l'$、$AD=AE=l$ とおく。$1:x=\triangle ABD:\triangle ADE=\triangle ABD:\triangle ABE-\triangle ABD=\frac{1}{2}ll'\sin 30^\circ:\frac{1}{2}ll'\sin 60^\circ-\frac{1}{2}ll'\sin 30^\circ$

$=\sin 30^\circ:\sin 60^\circ-\sin 30^\circ=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=1:\boxed{\sqrt{3}-1}$

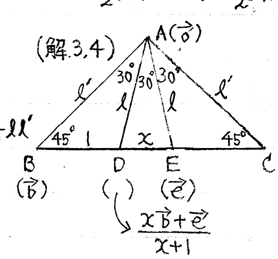
(解4) $AB=AC=l'$、$AD=AE=l$、$A(\vec{0})$、$B(\vec{b})$、$E(\vec{e})$、とおく。$D\left(\frac{x\vec{b}+\vec{e}}{x+1}\right)$ となる。$|\vec{b}|=l'$、$|\vec{e}|=l$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\vec{b}\cdot\left(\frac{x\vec{b}+\vec{e}}{x+1}\right)=\frac{x}{x+1}|\vec{b}|^2+\frac{1}{x+1}\vec{b}\cdot\vec{e}=\frac{x}{x+1}l'^2+\frac{1}{x+1}ll'\cdot\cos 60^\circ=\frac{x}{x+1}l'^2+\frac{1}{2(x+1)}ll'$

一方 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}ll'$ したがって $\frac{x}{x+1}l'^2+\frac{1}{2(x+1)}ll'=\frac{\sqrt{3}}{2}ll'$

角の2等分線の定理より、$l':l=1:x$ $\therefore l=xl'$ だから $\frac{x}{x+1}l'^2+\frac{1}{2(x+1)}xl'^2=\frac{\sqrt{3}}{2}xl'^2$

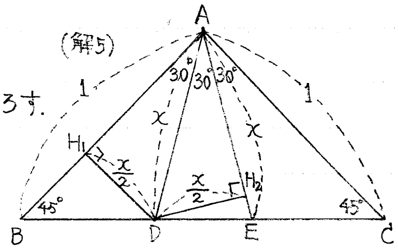
$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{3}{2(x+1)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sqrt{3}(x+1)=3$ $x+1=\sqrt{3}$ $x=\boxed{\sqrt{3}-1}$




(補) (解3)、(解4)については、他にもあるでしょう。高校の定期テストには、良いかもしれませんね。

以下の(解)について、$AB=AC=1$、$AD=AE=x$、とおいて、$x$の値を求めると、角の2等分線の定理により、

$AB:AE=BD:DE=\triangle ABD:\triangle ADE=1:\boxed{x}$ となります。$BD=1$、$DE=x$ とおく場合との違いに注意して下さい。




(解5) $AB=AC=1$, $AD=AE=x$ とおけば、角の2等分線の定理より、

$AB:AE=BD:DE=1:x$　Dから、AB, AE にそれぞれ垂線 $DH_1$, $DH_2$ をおろす。

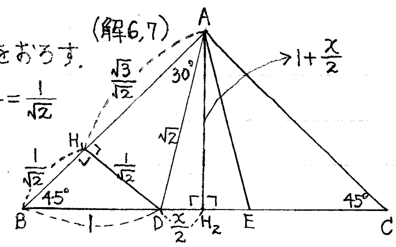
定三角定規の辺の比 $(1:\sqrt{3}:2)$ により、$DH_1=DH_2=\frac{x}{2}$

$\triangle ABD=\triangle AEC=1\times\frac{x}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{x}{4}$, $\triangle ADE=x\times\frac{x}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{x^2}{4}$

$\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ADE+\triangle AEC=\frac{x}{4}+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}$

一方、$\triangle ABC=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ であるから、$\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$　$x^2+2x-2=0$　$x=-1\pm\sqrt{3}$　$x>0$ だから $x=\sqrt{3}-1$

よって $\triangle ABD:\triangle ADE:\triangle AEC=1:\boxed{\sqrt{3}-1}:1$




(解6) $BD=1$, $DE=x$ とする。点D、点Aから辺AB, BCにそれぞれ垂線 $DH_1$, $AH_2$ をおろす。

定三角定規の辺の比 $(1:\sqrt{3}:2,\ 1:1:\sqrt{2})$ により、$DH_1=BD\times\frac{1}{\sqrt{2}}=1\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$AD=DH_1\times2=\frac{1}{\sqrt{2}}\times2=\sqrt{2}$, $AH_2=BH_2=1+\frac{x}{2}$

直角三角形 $ADH_2$ に三平方の定理を用いて、$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(1+\frac{x}{2}\right)^2=(\sqrt{2})^2$

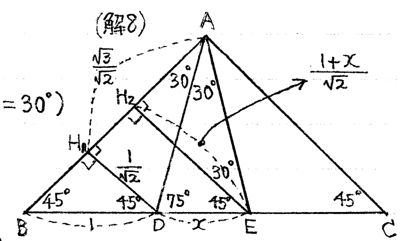
$\frac{x^2}{4}+\left(1+x+\frac{x^2}{4}\right)=2$　$\frac{x^2}{2}+x-1=0$　$x^2+2x-2=0$　$x=-1\pm\sqrt{3}$

$x>0$ だから $x=-1+\sqrt{3}$　∴ $1:\boxed{\sqrt{3}-1}:1$

(解7) (解6)の図を利用　$BD=1$, $DE=x$ とする。$BH_1=BD\times\frac{1}{\sqrt{2}}=1\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(=DH_1)$, $AH_1=DH_1\times\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$,

$AB=BH_2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(1+\frac{x}{2}\right)$　$AB=BH_1+AH_1$ だから $\sqrt{2}\left(1+\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ 両辺に $\sqrt{2}$ をかけて $2\left(1+\frac{x}{2}\right)=1+\sqrt{3}$

$2+x=1+\sqrt{3}$　∴ $x=\sqrt{3}-1$　∴ $1:\boxed{\sqrt{3}-1}:1$




(解8) 点D、点Eから、辺ABにそれぞれ垂線 $DH_1$, $EH_2$ をおろす。

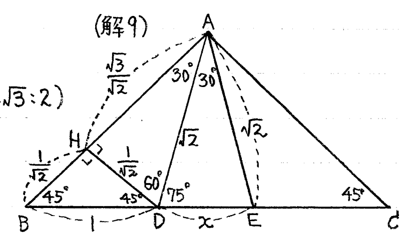
直角三角形 $AH_1D\equiv$ 直角三角形 $EH_2A$ (∵斜辺 $AD=$ 斜辺 $EA$, $\angle H_1AD=\angle H_2EA=30^\circ$)

$BD=1$, $DE=x$ とする。定三角定規の辺の比 $(1:1:\sqrt{2},\ 1:\sqrt{3}:2)$ により、

$DH_1=BD\times\frac{1}{\sqrt{2}}=1\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $AH_1=DH_1\times\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$,

$EH_2=BE\times\frac{1}{\sqrt{2}}=(1+x)\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1+x}{\sqrt{2}}$, $\triangle AH_1D\equiv\triangle EH_2A$ より $AH_1=EH_2$ だから、

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{1+x}{\sqrt{2}}$　$\sqrt{3}=1+x$　∴ $x=\sqrt{3}-1$　∴ $1:\boxed{\sqrt{3}-1}:1$




(解9) 点Dから辺ABに垂線DHをおろす。$BD=1$, $DE=x$ とする。

$\triangle ABD:\triangle ADE:\triangle AEC=1:x:1$ となる。定三角定規の辺の比 $(1:1:\sqrt{2},\ 1:\sqrt{3}:2)$

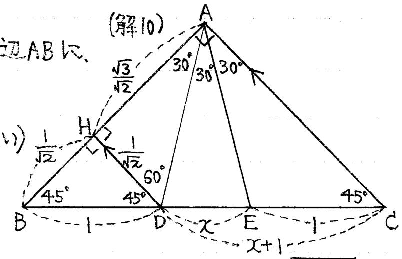
により、$BH=DH=BD\times\frac{1}{\sqrt{2}}=1\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $AH=DH\times\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$AD=AE=DH\times2=\frac{1}{\sqrt{2}}\times2=\sqrt{2}$

角の2等分線の定理により、$\triangle ABD:\triangle ADE=1:x=AB:AE=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}:\sqrt{2}$

$1:x=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}:\sqrt{2}$　$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\times x=\sqrt{2}$　$(\sqrt{3}+1)x=2$　$x=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{2}=\sqrt{3}-1$

よって $\triangle ABD:\triangle ADE:\triangle AED=1:\boxed{\sqrt{3}-1}:1$



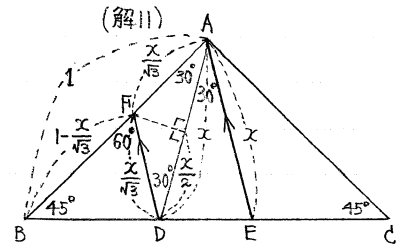
(解10) 点Dを通り、ACに平行な直線をひき、辺ABとの交点をHとする。(点Dから辺ABに、垂線DHをおろすでも同じことです。) $BD=1,\ DE=x,\ EC=1$ とおく。

$\angle BAC=90^\circ$ だから、$\angle BHD=90^\circ=\angle AHD$ ($\angle ACB=45^\circ$ だから $\angle HDB=45^\circ$ でもよい)

定三角定規の辺の比($1:1:\sqrt{2},\ 1:\sqrt{3}:2$)により、$BH=DH=BD\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$HA=DH\times\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$　HD//AC だから $BH:HA=BD:DC$

$\frac{1}{\sqrt{2}}:\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=1:x+1$　$1:\sqrt{3}=1:x+1$　$x+1=\sqrt{3}$　$\therefore x=\sqrt{3}-1$　$\therefore \triangle ABD:\triangle ADE:\triangle ADC=1:x:1=1:\boxed{\sqrt{3}-1}:1$



(解11) 点Dを通り、AEに平行な直線をひき、辺ABとの交点をFとする。

$AB=AC=1,\ AD=AE=x$ とする。AE//FD だから、錯角が等しいことにより

$\angle FDA=\angle DAE=30^\circ$, $\angle FAD=30^\circ$ だから △FDAは二等辺三角形 $\therefore FA=FD$

定三角定規の辺の比($1:\sqrt{3}:2$)により、$FD=FA=\frac{x}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{x}{\sqrt{3}}$

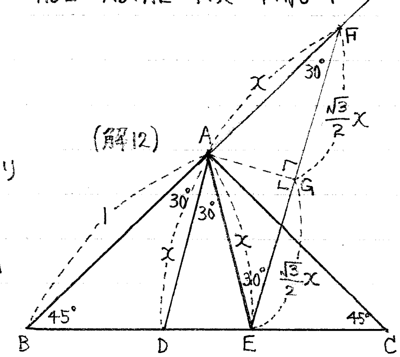
$\triangle FBD \backsim \triangle ABE$ だから $FB:AB=FD:AE$

$1-\frac{x}{\sqrt{3}}:1=\frac{x}{\sqrt{3}}:x=\frac{1}{\sqrt{3}}:1$　$\therefore (1-\frac{x}{\sqrt{3}})\times 1=1\times\frac{1}{\sqrt{3}}$

$1-\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 両辺に$\sqrt{3}$をかけて $\sqrt{3}-x=1$　$\therefore x=\sqrt{3}-1$

角の2等分線の定理より、$AB:AE=BD:DE=\triangle ABD:\triangle ADE$　$\triangle ABD:\triangle ADE=AB:AE=1:x=1:\sqrt{3}-1$

よって $\triangle ABD:\triangle ADE:\triangle AEC=1:\boxed{\sqrt{3}-1}:1$



(解12) 点Eを通り、ADに平行な直線をひき、BAの延長線との交点をFとする。

$AB=AC=1,\ AD=AE=x$ とする。AD//FE だから 同位角が等しいことにより

$\angle BAD=\angle AFE=30^\circ$　錯角が等しいことにより $\angle DAE=\angle AEF=30^\circ$

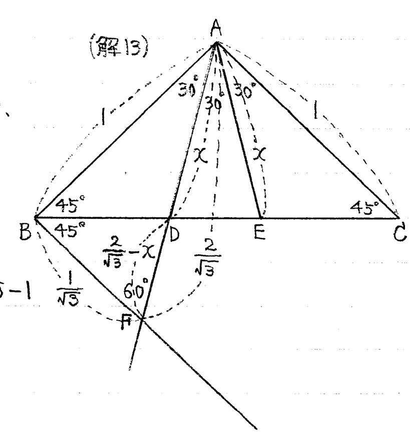
よって△AEFは、二等辺三角形。$AD=AE=AF=x$ となる。EFの中点をG とすれば、$AG\perp EF$。定三角定規の辺の比($1:\sqrt{3}:2$)より、

$FG=GE=\frac{\sqrt{3}}{2}x$　$\therefore EF=\sqrt{3}x$　$\triangle ABD \backsim \triangle FBE$ より $AB:FB=AD:FE$

$1:x+1=x:\sqrt{3}x=1:\sqrt{3}$　$x+1=\sqrt{3}$　$x=\sqrt{3}-1$

角の2等分線の定理より $AB:AE=BD:DE=\triangle ABD:\triangle ADE$　$\therefore 1:x=\triangle ABD:\triangle ADE$

$\triangle ABD:\triangle ADE:\triangle AEC=1:\boxed{\sqrt{3}-1}:1$



(解13) 点Bを通り、ACに平行な直線をひき、ADの延長線との交点をFとする。

$AB=AC=1,\ AD=AE=x$ とする。AC//BF だから、錯角が等しいことにより、

$\angle FBD=\angle ACD=45^\circ$ (これにより、$\angle ABF=90^\circ$), $\angle BFD=\angle CAD=60^\circ$

直角三角形ABFに辺の比$1:\sqrt{3}:2$を用いると $BF=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $AF=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\triangle BFD \backsim \triangle CAD$ だから $BF:CA=DF:DA$　$\frac{1}{\sqrt{3}}:1=\frac{2}{\sqrt{3}}-x:x$

$\frac{1}{\sqrt{3}}x=\frac{2}{\sqrt{3}}-x$　$x=2-\sqrt{3}x$　$(\sqrt{3}+1)x=2$　$x=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\sqrt{3}-1$

角の2等分線の定理より、$AB:AE=BD:DE=\triangle ABD:\triangle ADE$

$\therefore 1:x=\triangle ABD:\triangle ADE$　$\triangle ABD:\triangle ADE:\triangle AEC=1:\boxed{\sqrt{3}-1}:1$

(解14) 点Eから辺ABに垂線EHをおろす. $BD=EC=1$, $DE=x$ とする.

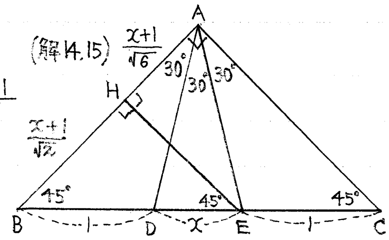
定三角定規の辺の比($1:1:\sqrt{2}$, $1:\sqrt{3}:2$)により. $BH=EH=BE\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{x+1}{\sqrt{2}}$

$HA=\frac{1}{\sqrt{3}}\times EH=\frac{x+1}{\sqrt{6}}$ 　△ABCを見て $AB=AC=BC\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2+x}{\sqrt{2}}$

$AB=BH+HA$ より $\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\frac{x+1}{\sqrt{6}}=\frac{2+x}{\sqrt{2}}$ 　両辺に$\sqrt{6}$をかけて.

$\sqrt{3}(x+1)+(x+1)=\sqrt{3}(2+x)$ 　$\sqrt{3}x+\sqrt{3}+x+1=2\sqrt{3}+\sqrt{3}x$ 　$x=\sqrt{3}-1$

よって. $\triangle ABD:\triangle ADE:\triangle AEC=BD:DE:EC=1:x:1=1:\boxed{\sqrt{3}-1}:1$




(解15) 点Eを通り辺ACに平行な直線をひき辺ABとの交点をHとする. $BD=EC=1$, $DE=x$ とする.(結局上(解14)の図と同じ)

途中まで(解14)と同じ. $HE/\!/AC$ だから $BH:HA=BE:EC$ 　$\frac{x+1}{\sqrt{2}}:\frac{x+1}{\sqrt{6}}=x+1:1$

$x+1:1=\frac{x+1}{\sqrt{2}}:\frac{x+1}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{2}}:\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{6}:\frac{1}{\sqrt{6}}\times\sqrt{6}=\sqrt{3}:1$ 　$x+1:1=\sqrt{3}:1$ 　$x+1=\sqrt{3}$ 　$x=\sqrt{3}-1$

よって $\triangle ABD:\triangle ADE:\triangle AEC=BD:DE:EC=1:x:1=1:\boxed{\sqrt{3}-1}:1$

(補)(解14)と(解15)は、似たようなことでしたが、(解14)は、長さが等しいに持ち込み、(解15)は平行線の性質の利用でした.
次の(解16)(解17)は、高1です.

(解16) $BD=EC=1$, $DE=x$, $AD=AE=l$ とおく. △ABD,△ADEに正弦定理を用いて

$\frac{l}{\sin 45^\circ}=\frac{1}{\sin 30^\circ}$ ···① 　$\frac{l}{\sin 75^\circ}=\frac{x}{\sin 30^\circ}$ ···②

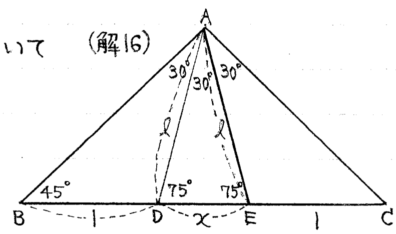
①,②より, $l=\frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{x\sin 75^\circ}{\sin 30^\circ}$ 　$\therefore x=\frac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}$

$\sin 75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)=\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\sin 45^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$x=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{2}=\sqrt{3}-1$

よって $\triangle ABD:\triangle ADE:\triangle AEC=BD:DE:EC=1:\boxed{\sqrt{3}-1}:1$




(解17) $BD=EC=1$, $DE=x$ とおく. ADを軸にして△ABDを折り曲げ△AB'Dとする.

$\angle ADE=\angle AED=75^\circ$ なので $\angle DEB'=105^\circ$ 　$\angle ABD=\angle EB'D=45^\circ$ 　$BD=B'D=1$

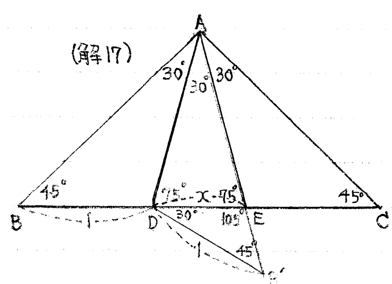
△DB'Eに正弦定理を用いて. $\frac{x}{\sin 45^\circ}=\frac{1}{\sin 105^\circ}$ 　$x=\frac{\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ}$

$\sin 105^\circ=\sin(45^\circ+60^\circ)=\sin 45^\circ\cos 60^\circ+\cos 45^\circ\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

よって $x=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{2}=\sqrt{3}-1$

よって $\triangle ABD:\triangle ADE:\triangle AEC=BD:DE:EC=1:x:1=1:\boxed{\sqrt{3}-1}:1$



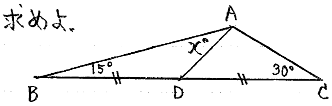

(補)(解17)は、(解1)の高校版というものでしょう. 大学入試も、中高入試の知識をfullに利用しましょう.

$\sin 105^\circ=\sin(180^\circ-75^\circ)=\sin 75^\circ=\sin(90^\circ-15^\circ)=\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$ などの変形が

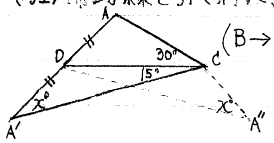
できるでしょうか. 更に図形によって, $\sin 105^\circ$などを求めることができるでしょうか. $\sin 36^\circ$, $\sin 72^\circ$は,?

似たような解を, たくさんかいてみましたが, 考え方は少しずつ違います. もうこれぐらいにします.

[類6] △ABCにおいて、$\angle ABC=15^\circ$, $\angle ACB=30^\circ$, 辺BCの中点をDとするとき$\angle BAD=x^\circ$を求めよ。
(高校生用の(解)もあります。)

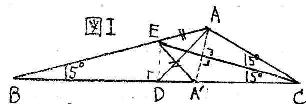



(考1) 補助線を引く前に、さまざまな試行錯誤をします。例えば、BD=CDだから、点Dを中心にして、△ABDを180°回転してみる。(B→C, A→A′)のようになります。更A″にしてみました。うまくいきそうにありません。




次には、点Aが辺CD上にくるように折ってみます。

図I



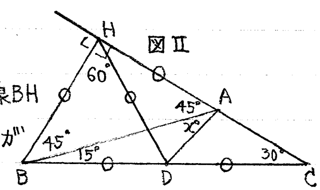

すると、見えてくるものがあります。

$\angle BAC(=\angle EAC)=180^\circ-15^\circ-30^\circ=135^\circ$, $\angle AEC=\angle A'EC=180^\circ-135^\circ-15^\circ=30^\circ$, $\angle EBC=\angle ECB=15^\circ$, 二等辺三角形EBC,
$BD=CD$だから $ED\perp BC$, $AE=A'E$, $AA'\perp CE$ などから、△AEA′は正三角形, $\angle BED=\angle CED=180^\circ-15^\circ-90^\circ=75^\circ$, ここまでくると、どうにでもなりそうです。

(解1) (考1)の図I参照 点Aが辺BC上にくるように、CEを対称に折る。$\angle EBC(\angle ABC)=\angle ECB=15^\circ$だから、$\angle AEC=\angle A'EC=30^\circ$
$BD=CD$だから $ED\perp BC$, $\angle DEC=\angle DEB=90^\circ-15^\circ=75^\circ$, $\angle DEA'=\angle DEC-\angle A'EC=75^\circ-30^\circ=45^\circ$, $\angle DA'E=180^\circ-90^\circ-45^\circ=45^\circ$
よって△DEA′は直角二等辺三角形 ∴$DE=DA'$ ---① $EA=EA'$, $\angle AEA'=\angle AEC+\angle A'EC=30^\circ+30^\circ=60^\circ$ により、△AEA′は正三角形
よって $AE=AA'$ ---② △AEDと△AA′Dは、①,②とAD共通であることにより、三辺が等しいから、△AED≡△AA′D
よって $\angle EAD$ ($\underline{\angle BAD=x^\circ}$) $=\angle A'AD=\angle EAA'\times\frac{1}{2}=60^\circ\times\frac{1}{2}=\underline{30^\circ}$ (∵△AEA′は正三角形)

(考2) BA方向 or CA方向に延長すると、$15^\circ+30^\circ=45^\circ$が現れる。CA方向に延長してみる。
条件BD=CDとつなぐには、どうすればよいか。定三角定規を考えてみると、Bから垂線BHをおろせば、2つの定三角定規が現れ、どうにかなりそうです。Dを中心とする円がかけて、$\angle DBH=15^\circ+45^\circ=60^\circ$だから正三角形HBD。$\angle DHA=90^\circ-60^\circ=30^\circ$, △HDAは、二等辺三角形だから---これで求まります。(解1)より、わかりやすいですね。(解2)′の方がもっとすっきりします。

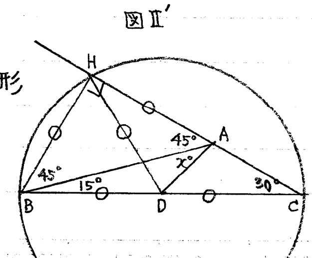
図II




(解2) (考2)の図II参照、半直線CA上に点Bから垂線BHをおろす。$\angle BAH=\angle ABC+\angle ACB=15^\circ+30^\circ=45^\circ$,
$\angle ABH=180^\circ-\angle BHA-\angle BAH=180^\circ-90^\circ-45^\circ=45^\circ$ よって、△HBAは、$\angle BHA=90^\circ$である直角二等辺三角形, ∴$HA=HB$ ---①
△HBCは、90°,60°,30°の定三角定規だから、斜辺BCの中点Dを中心とする外接円がかけて、$HB=HD(=BD=CD)$,
①とから $HA=HD$ したがって、△HDAは二等辺三角形, △HBDは、正三角形だから、$\angle BHD=60^\circ$
$\angle DHA=\angle BHA-\angle BHD=90^\circ-60^\circ=30^\circ$. したがって、$\angle HAD=(180^\circ-\angle DHA)\times\frac{1}{2}=(180^\circ-30^\circ)\times\frac{1}{2}=75^\circ=45^\circ+x^\circ$ ∴$\underline{x^\circ=30^\circ}$

(解2)′ 点Dを中心する半径BD(=CD)の円をかき、半直線CAとの交点をHとする。$\angle BHC=90^\circ$
$\angle HBC=180^\circ-\angle BHC-\angle HCB=180^\circ-90^\circ-30^\circ=60^\circ$, $\angle HBA=\angle HBC-\angle ABC=60^\circ-15^\circ=45^\circ$
$\angle HAB=180^\circ-\angle BHA-\angle HBA=180^\circ-90^\circ-45^\circ=45^\circ$ したがって△HBAは直角二等辺三角形
∴$HB=HA$, △HBDは正三角形だから、$HB=HD(=BD)$ よって $HD=HA$ であり、
△HDAは、二等辺三角形, 頂角$\angle DHA=\angle BHA-\angle BHD=90^\circ-60^\circ=30^\circ$
底角$\angle HAD$について $2\times\angle HAD+$頂角$\angle DHA=180^\circ$ $2\times(45^\circ+x^\circ)+30^\circ=180^\circ$
$2\times(45^\circ+x^\circ)=150^\circ$ $45^\circ+x^\circ=75^\circ$ ∴$\underline{x^\circ=30^\circ}$

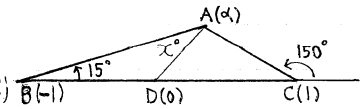
図II′



(解3)(解4)は(高校生になると別解)にします.

(考3)高校生になるといろいろと解き方があります. $\boxed{\text{この問を複素数平面を利用して解け. BD=CD=1として, ADの長さも求めよ.(理系)}}$ とします.

(解3) A, B, Cを表す複素数をそれぞれ A(α), B(−1), C(1)とし, D(0)とする.




$\arg(\alpha-1)=150^\circ$　$\alpha-1=|\alpha-1|(\cos150^\circ+i\sin150^\circ)$

$(\alpha-1)^2=|\alpha-1|^2(\cos150^\circ+i\sin150^\circ)^2$　$(\alpha-1)^2=(\alpha-1)(\overline{\alpha-1})(\cos300^\circ+i\sin300^\circ)$

$\alpha-1=(\bar{\alpha}-1)(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$　$\bar{\alpha}-1=(\alpha-1)(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$ ---① (両辺にバーをつけた)

$\arg(\alpha-(-1))=15^\circ$　$2\arg(\alpha+1)=30^\circ$　$\arg(\alpha+1)^2=30^\circ$　$(\alpha+1)^2=|(\alpha+1)^2|(\cos30^\circ+i\sin30^\circ)$

$(\alpha+1)^2=(\alpha+1)(\overline{\alpha+1})(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)$　$\alpha+1=(\bar{\alpha}+1)(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)$　$\bar{\alpha}+1=(\alpha+1)(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)$ ---② (両辺にバー)

②−①　$2=(\alpha+1)(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)-(\alpha-1)(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$　$4=\alpha(\sqrt{3}-i)+\sqrt{3}-i-\alpha(1+\sqrt{3}i)+1+\sqrt{3}i$

$(3-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-1)i=\alpha(\sqrt{3}-1-i-\sqrt{3}i)=\alpha\{(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+1)i\}$

$\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}-1)i=\alpha\times(\sqrt{3}-1)\{1-\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}i\}$, $\sqrt{3}-i=\alpha(1-\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}i)=\alpha(1-(2+\sqrt{3})i)$

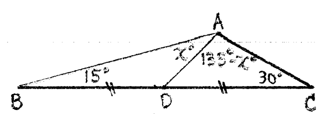
$\alpha=\frac{\sqrt{3}-i}{1-(2+\sqrt{3})i}=\frac{(\sqrt{3}-i)(1+(2+\sqrt{3})i)}{1+(2+\sqrt{3})^2}=\frac{\sqrt{3}+(2\sqrt{3}+3)i-i+(2+\sqrt{3})}{8+4\sqrt{3}}=\frac{(2+2\sqrt{3})+(2+2\sqrt{3})i}{4(2+\sqrt{3})}$

$\alpha=\frac{2(1+\sqrt{3})(1+i)}{4(2+\sqrt{3})}=\frac{(1+\sqrt{3})(1+i)}{2(2+\sqrt{3})}=\frac{(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})(1+i)}{2}=\frac{(\sqrt{3}-1)(1+i)}{2}$

よって $\angle ADC=\arg\alpha=\arg\{\frac{\sqrt{3}-1}{2}\times(1+i)\}=\arg\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\arg(1+i)=0^\circ+45^\circ=45^\circ$

$\underline{\angle BAD}=x^\circ=45^\circ-15^\circ=\underline{30^\circ}$　$\underline{AD}=|\alpha|=\left|\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right|\times|1+i|=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\times\sqrt{2}=\underline{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$

(考4) 三角による(解) (文理共通)



点Dは, BCの中点,

(解4) 正弦定理より $\frac{BD}{\sin x^\circ}=\frac{AD}{\sin15^\circ}$, $\frac{CD}{\sin(135^\circ-x^\circ)}=\frac{AD}{\sin30^\circ}$, BD=CDも利用して

辺々わると, $\frac{\sin x^\circ}{\sin(135^\circ-x^\circ)}=\frac{\sin15^\circ}{\sin30^\circ}$　$\sin x^\circ\times\sin30^\circ=\sin(135^\circ-x^\circ)\times\sin15^\circ$ ※補

$\frac{1}{2}\sin x^\circ=-\frac{1}{2}\{\cos(135^\circ-x^\circ+15^\circ)-\cos(135^\circ-x^\circ-15^\circ)\}=-\frac{1}{2}\{\cos(150^\circ-x^\circ)-\cos(120^\circ-x^\circ)\}$

$\sin x^\circ=-(\cos150^\circ\cos x^\circ+\sin150^\circ\sin x^\circ-\cos120^\circ\cos x^\circ-\sin120^\circ\sin x^\circ)$

$\sin x^\circ=-(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x^\circ+\frac{1}{2}\sin x^\circ+\frac{1}{2}\cos x^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x^\circ)$　$2\sin x^\circ=\sqrt{3}\cos x^\circ-\sin x^\circ-\cos x^\circ+\sqrt{3}\sin x^\circ$

$(3-\sqrt{3})\sin x^\circ=(\sqrt{3}-1)\cos x^\circ$　$\tan x^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}=\frac{1}{\sqrt{3}}$　$\underline{x^\circ=30^\circ}$

(補)※ $\sin135^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos135^\circ=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin45^\circ\cos30^\circ-\cos45^\circ\sin30^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

を用いて $\frac{1}{2}\sin x^\circ=(\sin135^\circ\cos x^\circ-\cos135^\circ\sin x^\circ)\times\sin15^\circ=(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x^\circ+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x^\circ)\times\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

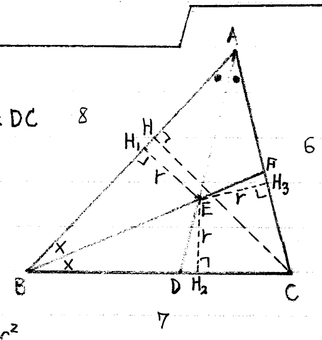
$2\sin x^\circ=(\sqrt{3}-1)(\cos x^\circ+\sin x^\circ)$　$\cos x^\circ$で辺々わると $2\tan x^\circ=(\sqrt{3}-1)(1+\tan x^\circ)=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}-1)\tan x^\circ$

$(3-\sqrt{3})\tan x^\circ=\sqrt{3}-1$　$\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)\tan x^\circ=\sqrt{3}-1$　$\sqrt{3}\tan x^\circ=1$　$\tan x^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$　$\underline{x^\circ=30^\circ}$

(補) 図形と方程式(座標設定)による(解)も, 勿論できます. 大学入試としては, (解3)の「複素数平面を利用せよ」でしょう.

(解4)は, 3角の計算練習には, よいかと思います.

[類1] $AB=8$, $AC=6$ である $\triangle ABC$ の線分 BC 上に、$BD=4$ となる点 D をとったとき、$BC=$ $\boxed{ア}$ であれば、$\angle BAD=\angle CAD$ となる。
このような、$\triangle ABC$ を作図したとする。$\angle ABC$ の2等分線と AD の交点を E、AC との交点を F とする。$CF=$ $\boxed{イ}$，$FA=$ $\boxed{ウ}$ となる。
点 E から、AB，BC，CA にそれぞれ垂線をおろし、その足をそれぞれ $H_1$，$H_2$，$H_3$，とする。$\triangle AH_1E$ と $AH_3E$ は $\boxed{エ}$ であるから、
$EH_1=EH_3$，$\triangle BH_1E$ と $\triangle BH_2E$ は $\boxed{エ}$ であるから、$EH_1=EH_2$、したがって $EH_1=EH_2=EH_3$ であることがわかり、中心を E、
半径を $EH_1(=EH_2=EH_3)$ とし、$H_1$，$H_2$，$H_3$ を $\boxed{オ}$ とする、$\triangle ABC$ の $\boxed{カ}$ 円がかけることがわかる。
C から、AB におろした垂線の足を H とし、$CH=x$，$AH=y$ とする。三平方の定理を用いて、$x$，$y$ に関する、
連立方程式を作ると、$\boxed{\quad キ \quad}$，$\boxed{\quad ク \quad}$ が得られ、これを解けば、$x=$ $\boxed{ケ}$，$y=$ $\boxed{コ}$ となる。
$\boxed{カ}$ 円の半径を $r$ とする。$r$ を用いて、$\triangle ABC$ の面積 $S$ を表わせば、$S=$ $\boxed{\quad サ \quad}$ となるから、$\triangle ABC$ の面積 $S$ を介して、
$r$ を求めると、$r=$ $\boxed{シ}$ となる。




(解)(ア) $BC=a$，$DC=a-4$，$\angle BAD=\angle CAD$ のとき 角の2等分線の定理より $BA:AC=BD:DC$

$8:6=4:a-4$　$8(a-4)=6\times 4$　$a-4=3$　$\underline{a=7}$

(イ)，(ウ) $7:8=CF:FA$　よって $CF=\dfrac{7}{7+8}\times AC=\dfrac{7}{15}\times 6=\underline{\dfrac{14}{5}}$　$FA=6-\dfrac{14}{5}=\underline{\dfrac{16}{5}}$

(キ)，(ク) $x^2+y^2=36$ ---①　$x^2+(8-y)^2=49$ ---②

(ケ)，(コ) ②より $x^2+64-16y+y^2=49$　$x^2+y^2-16y+15=0$ ---②'

①を②'に代入 $36-16y+15=0$　$51=16y$　$\underline{y=\dfrac{51}{16}}$　①に代入 $x^2+\left(\dfrac{51}{16}\right)^2=6^2$

$x^2=6^2-\left(\dfrac{51}{16}\right)^2=\left(6+\dfrac{51}{16}\right)\left(6-\dfrac{51}{16}\right)=3^2\left(2+\dfrac{17}{16}\right)\left(2-\dfrac{17}{16}\right)=3^2\times\dfrac{32+17}{16}\times\dfrac{32-17}{16}=\dfrac{3^2\times 7^2\times 15}{16^2}=\dfrac{21^2\times 15}{16^2}$　$\therefore \underline{x=\dfrac{21\sqrt{15}}{16}}$

(サ) $S=\triangle ABE+\triangle BCE+\triangle CAE=\dfrac{AB\times EH_1}{2}+\dfrac{BC\times EH_2}{2}+\dfrac{AC\times EH_3}{2}=\dfrac{8r}{2}+\dfrac{7r}{2}+\dfrac{6r}{2}=\underline{\dfrac{21r}{2}}$

(シ) 一方 $S=\dfrac{AB\times CH}{2}=\dfrac{8x}{2}=4x=\dfrac{21r}{2}$　$\therefore r=\dfrac{8x}{21}=\dfrac{8}{21}\times\dfrac{21\sqrt{15}}{16}=\underline{\dfrac{\sqrt{15}}{2}}$

| 答 | |
|---|---|
| | (ア) 7　(イ) $\dfrac{14}{5}$　(ウ) $\dfrac{16}{5}$ |
| | (エ) 合同　(オ) 接点、(カ) 内接 |
| | (キ)，(ク) $x^2+y^2=36$，$x^2+(8-y)^2=49$ |
| | (ケ) $\dfrac{21\sqrt{15}}{16}$　(コ) $\dfrac{51}{16}$　(サ) $\dfrac{21r}{2}$　(シ) $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ |

(補) $AH_1$，$AH_3$，$BH_1$，$BH_2$，$CH_2$，$CH_3$，を求めよ。AD を求めよ。更に、BF，更に-----は？

(カイ) $AH_1=AH_3=a$，$BH_1=BH_2=b$，$CH_2=CH_3=c$ とすると、$a+b=8$，$b+c=7$，$c+a=6$。

辺々全てたして $2(a+b+c)=21$　$a+b+c=\dfrac{21}{2}$　よって $8+c=\dfrac{21}{2}$，$a+7=\dfrac{21}{2}$，$b+6=\dfrac{21}{2}$　$\therefore \underline{c=\dfrac{5}{2}, a=\dfrac{7}{2}, b=\dfrac{9}{2}}$

$AD=AE+ED$　三平方の定理より、$AE^2=AH_1^2+r^2=\left(\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)^2=\dfrac{49+15}{4}=\dfrac{64}{4}=16$　$\therefore AE=4$

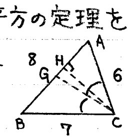
角の2等分線の定理より、$AB:BD=AE:ED$　$8:4=4:ED$　$\therefore ED=2$　$\therefore \underline{AD=4+2=6}$

更に $\underline{BF}$ を求めると、$BE^2=BH_1^2+r^2=\left(\dfrac{9}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)^2=\dfrac{81+15}{4}=\dfrac{96}{4}=24$　$\therefore BE=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

E は内心（内接円の中心）であり、CE は、$\angle BCA$ を2等分しているから、$BC:CF=BE:EF$　$7:\dfrac{14}{5}=2\sqrt{6}:EF$ $\left(=1:\dfrac{2}{5}=5:2\right)$

$EF=\dfrac{4\sqrt{6}}{5}$　$\therefore BF=BE+EF=2\sqrt{6}+\dfrac{4\sqrt{6}}{5}=\underline{\dfrac{14\sqrt{6}}{5}}$

更に、CE を延長し、AB との交点を G として、$\underline{CG}$ を求める。今度は、GH を求めて、$CH\left(=\dfrac{21\sqrt{15}}{16}\right)$ を利用し、三平方の定理を用いてみます。$BC:CA=BG:GA$　$7:6=BG:GA$　$GA=\dfrac{6}{7+6}\times AB=\dfrac{6}{13}\times 8=\dfrac{48}{13}$　$GH=GA-AH=\dfrac{48}{13}-\dfrac{51}{16}$



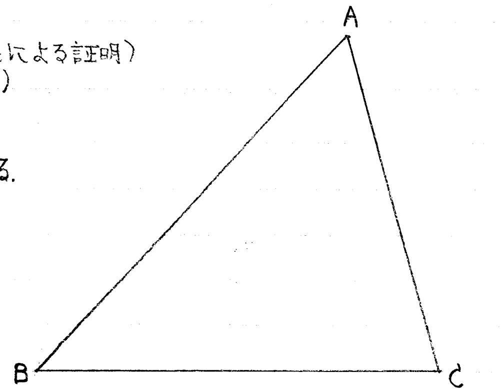

$=\dfrac{48\cdot 16-51\cdot 13}{13\cdot 16}=\dfrac{3(16^2-17\cdot 13)}{13\cdot 16}=\dfrac{3(256-221)}{13\cdot 16}=\dfrac{3\cdot 35}{13\cdot 16}$，$CG^2=GH^2+CH^2=\dfrac{3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{13^2\cdot 16^2}+\dfrac{3^2\cdot 7^2\cdot 15}{16^2}=$ 下に続く。

$=\dfrac{3^2\cdot 7^2\cdot 5}{16^2}\left(\dfrac{5}{13^2}+3\right)=\dfrac{3^2\cdot 7^2\cdot 5}{16^2}\cdot\dfrac{5+3\cdot 169}{13^2}=\dfrac{3^2\cdot 7^2\cdot 5\cdot 512}{16^2\cdot 13^2}=\dfrac{3^2\cdot 7^2\cdot 5\cdot 2\cdot 16^2}{16^2\cdot 13^2}=\dfrac{21^2\cdot 10}{13^2}$　$\therefore \underline{CG=\dfrac{21\sqrt{10}}{13}}$　I am tired.

BF で求めた方法がいかに easy かわかりました。三平方の定理は、2乗するので、一般に面倒になります。うまく利用することが大切です。角の2等分は、内接円と結びつき、よく出題されます。面積との関係をお忘れなく！

角の2等分線の定理の外接円を用いる証明（P.596の(5)に平行線による証明）
（高校生は、P.596の(6)）

[類2] (1)右図△ABCの外接円と∠BACの2等分線を作図せよ。
∠BACの2等分線と辺BC，外接円との交点をそれぞれD，Eとする。
（作図に用いた余分な円弧、線などは、全て消してよい）
(2) $AB=a$，$AC=b$，$BD=c$，$CD=d$，$AD=l$ とする。3つの三角形が相似であることを用いて、(ア) $ad=bc$ (イ) $l^2=ab-cd$ を証明せよ。

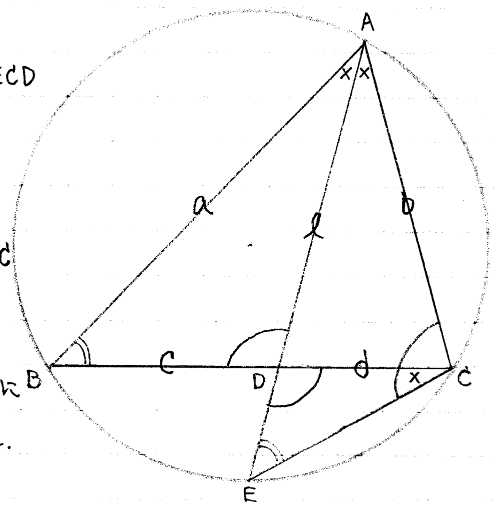



(考) (1) 外接円の中心は、各辺の垂直2等分線の交点。
(2) $ad=bc \Leftrightarrow a:b=c:d$ (or $a:c=b:d$) ですが、このことを外接円をかいて相似を利用し、証明してみよ、というのが、この設問の主旨です。$a:b=c:d$ だから $ad=bc$ とかいたら、アウトです。作問者(私)の意図を汲んで下さい。円周角の定理、2角が等しいことによる相似を用います。難関を目指している人は、この解が、キチンとかけるようにしておかないと、高校に入ってから困ります。(1)の作図は、皆さんできるでしょうから(解)(1)省略です。$BA=a$，$AC=b$，$BD=c$，$DC=d$ とかく方が、次の[類3]に、つながるかき方になります。

(解) (2) △ABD∽△CED∽△AEC を示す。

(i) △ABD と △CED において、
劣弧$\overset{\frown}{BE}$の上にたつ円周角 ∠BAE=∠BCE ∴∠BAD=∠ECD
対頂角 ∠ADB=∠CDE
2角がそれぞれ等しいから △ABD∽△CED

(ii) △ABD と △AEC において、
劣弧$\overset{\frown}{AC}$の上にたつ円周角 ∠ABC=∠AEC ∴∠ABD=∠AEC
条件(角の2等分)より ∠BAD=∠EAC
2角がそれぞれ等しいから △ABD∽△AEC




(i),(ii)より △ABD∽△CED∽△AEC 右図のように等しい角に印×，へ，⌒をつけておく。右下に、相対する辺の表をかいた。

(i)より、$a:CE=l:d$　$l\times CE=ad$　$\therefore CE=\dfrac{ad}{l}$ ---①
　　$c:DE=l:d$　$l\times DE=cd$　$\therefore DE=\dfrac{cd}{l}$ ---②

△ABD∽△AEC より　$c:CE=l:b$　①を代入 $c:\dfrac{ad}{l}=l:b$
$\dfrac{ad}{l}\times l=bc$　$\therefore ad=bc$

△ABD∽△AEC より　$a:l+DE=l:b$　②を代入
$a:l+\dfrac{cd}{l}=l:b$　$l\left(l+\dfrac{cd}{l}\right)=ab$
$l^2+cd=ab$　$\therefore l^2=ab-cd$

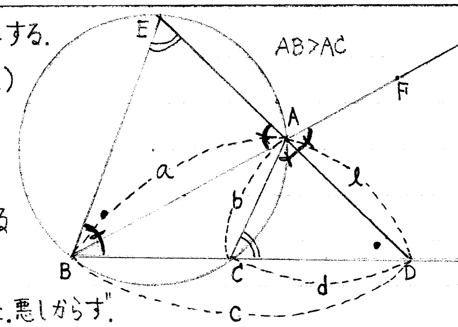
| △ABD | △CED | △AEC |
|---|---|---|
| a | CE | l+DE |
| c | DE | CE |
| l | d | b |

(補) CE，DE を l，a，c，d で表してしまうと、次に△AECとの相似を利用して、いろいろな相似比の利用ができます。$l^2=ad-bc$ を用いると、P.7の(3)(補) AD はすぐに求まりますね。記憶に値する式です。② すなわち $l\times DE=c\times d$ を方べきの定理といいます。

高校生は、P.596の(7)にもあります.

[類3] 右図、△ABCの∠BACの外角の2等分線と直線BCとの交点をDとする.
[類2]と同様なこととして、成り立つ関係式を求めよ.(図は自分でかく)
AB>ACとしてよい

(考) [類2]の場合 BA:AC=BD:DC　$a:b=c:d$　$ad=bc$ を円を利用して、示しました. 外角の2等分についても同様なことがいえる筈です. $AD^2=\ell^2$ については、どうでしょうか. 右に図をかきましたが、自分で作図して、(解)をかいて下さい. (解)に図はかきませんでした. 悪しからず.




(解) $BA=a$, $AC=b$, $BD=c$, $DC=d$, $AD=\ell$ とする. DAの延長と△ABCの外接円との交点をE, BAの延長上に点Fとする.
△ACD∽△BED∽△AEB を示す.

(i) △ACDと△BEDにおいて
円に内接する四角形の1つの内角は、その対角の外角に等しいから、∠ACD=∠BED (※)
∠D共通
2角がそれぞれ等しいから △ACD∽△BED

(ii) △ACDと△AEBにおいて
円に内接する四角形の1つの内角は、その対角の外角に等しいから ∠ACD=∠AEB (上の※と同じです)
∠CAD=∠DAF=∠EAB (∵条件と対頂角は等しい)
2角がそれぞれ等しいから △ACD∽△AEB

(i), (ii)より △ACD∽△BED∽△AEB 図のように等しい角に印 ⌒, 小, • をつけておく.

• 右に、相対する辺の表をかいた.

| △ACD | △BED | △AEB |
|---|---|---|
| $b$ | BE | AE |
| $d$ | $\ell$+AE | BE |
| $\ell$ | $c$ | $a$ |

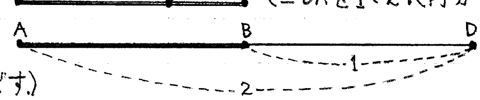
△ACD∽△AEBより $b:AE=\ell:a$　$\ell\times AE=ab$　$\therefore AE=\dfrac{ab}{\ell}$ ---①
$d:BE=\ell:a$　$\ell\times BE=ad$　$\therefore BE=\dfrac{ad}{\ell}$ ---②

△ACD∽△BEDより $b:BE=\ell:c$　②を代入 $b:\dfrac{ad}{\ell}=\ell:c$
$\dfrac{ad}{\ell}\times\ell=bc$　$\therefore ad=bc$
$d:\ell+AE=\ell:c$　①を代入 $d:\ell+\dfrac{ab}{\ell}=\ell:c$
$\ell\left(\ell+\dfrac{ab}{\ell}\right)=cd$　$\ell^2+ab=cd$　$\therefore \ell^2=cd-ab$

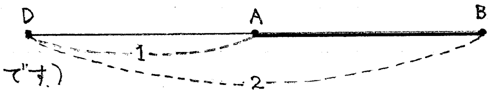
(補) 結果は、$\ell^2=cd-ab$ となって、[類2]の $\ell^2=ab-cd$ と異なりました. $\ell^2>0$ ですから、外角の2等分の場合は $cd>ab$ ということですが、自分で作図した人は、点Dが点Cから相当に遠くなり、$cd>ab$ も納得できる筈です.
内分、外分について.

ABをAD:DB=2:1に内分する点D  (≡BAを1:2に内分する点Dと同じです.)


ABをAD:DB=2:1に外分する点D
(≡BAを1:2に外分する点Dと同じです.)




ABを1:2に外分する点D
(≡BAを2:1に外分する点Dと同じです.)



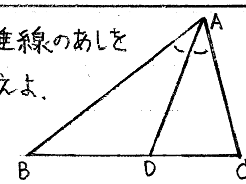

(線分ABの位置に注意)

角の2等分線の定理の面積を用いる証明

[類4] △ABCの∠BACの2等分線と辺BCとの交点をDとする。Dから直線AB, ACへおろした垂線のあしをそれぞれ$H_1$, $H_2$とする。AB = a, AC = b, BD = c, CD = d, AD = $\ell$ とおくとき、次の問に答えよ。

(1) $DH_1 = DH_2$ (= $h$ とおく) を証明し、面積を利用して、$ad = bc$ であることを示せ

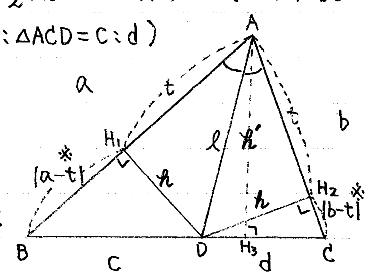
(2) 三平方の定理と $ad = bc$ を用いて $\ell^2 = ab - cd$ であることを示せ。



(解) (1) 直角三角形$ADH_1$と直角三角形$ADH_2$において、AD共通、条件角の2等分より$\angle H_1AD = \angle H_2AD$であるから、直角三角形の合同条件「一辺と直角でない他の一角がそれぞれ等しい」により、直角三角形$ADH_1 \equiv$ 直角三角形$ADH_2$ ∴$DH_1 = DH_2$ (= $h$)

△ABD : △ACD = c : d　一方 $\triangle ABD = \frac{1}{2}ah$, $\triangle ACD = \frac{1}{2}bh$ であるから $\frac{1}{2}ah : \frac{1}{2}bh = c : d$　$a : b = c : d$ ∴$ad = bc$

(AからBCに垂線$AH_3$ (= $h'$) をおろすと、$\triangle ABD = \frac{1}{2}ch'$, $\triangle ACD = \frac{1}{2}dh'$ ∴△ABD : △ACD = c : d)



(2) $AH_1 = AH_2 = t$ とおくと、$BH_1 = |a-t|^{※}$, $CH_2 = |b-t|^{※}$,

$\ell^2 = t^2 + h^2$ ---①　$c^2 = |a-t|^{2※} + h^2$ ---②　$d^2 = |b-t|^{2※} + h^2$ ---③

①, ②, ③より、t, $h$を消去し、a, b, c, d, $\ell$の関係式 $\ell^2 = ab - cd$ を $ad = bc$ も用いて、示す。

②より　$c^2 = a^2 - 2at + t^2 + h^2 = a^2 - 2at + \ell^2$ ---②′ (∵①より)

③より　$d^2 = b^2 - 2bt + t^2 + h^2 = b^2 - 2bt + \ell^2$ ---③′ (∵①より)

b×②′　$bc^2 = a^2b - 2abt + b\ell^2$ ---②″

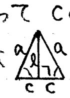
a×③′　$ad^2 = ab^2 - 2abt + a\ell^2$ ---③″

②″−③″　$bc^2 - ad^2 = a^2b - ab^2 + b\ell^2 - a\ell^2 = ab(a-b) + (b-a)\ell^2 = ab(a-b) - (a-b)\ell^2 = (a-b)(ab-\ell^2)$

$bc \times c - ad \times d = (a-b)(ab-\ell^2)$　この左辺に $ad = bc$ だから $bc$ に$ad$, $ad$ に$bc$を入れると

$adc - bcd = (a-b)(ab-\ell^2)$　$c(ad-bd) = (a-b)(ab-\ell^2)$　$cd(a-b) = (a-b)(ab-\ell^2)$

(i) $a - b \neq 0$ のとき 両辺を$a-b$でわって $cd = ab - \ell^2$　∴$\ell^2 = ab - cd$ ---Ⓣ

(ii) $a - b = 0$ ($a = b$) のとき △ABCは  だから $\ell^2 = a^2 - c^2$ これは、Ⓣをみたす。

(i), (ii)より $\ell^2 = ab - cd$

(補) ※に絶対値をつけたのは、aよりtの方が大きくなる場合があるからですが、$|a-t|^2 = |t-a|^2$ ですから、絶対値はつけなくても大丈夫です。しかし、厳密には、つける方がいいでしょう。∠BACを小さくして、点Aが辺BCに近い、△ABCを考えると、半直線AC (or AB) の点C (or 点B) の延長線上に点$H_2$ (or 点$H_1$) があり、$CH_2 = t - b$ (or $BH_1 = t - a$) となる。

---

P.34の(3) [類9] の (別解) です。

(別解) $5x + y - xy - 12 = 0$　$xy - 5x - y = -12$　$(x-1)(y-5) - 5 = -12$　$(x-1)(y-5) = -7$

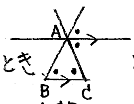
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x−1 | 7 | 1 | −1 | −7 |
| y−5 | −1 | −7 | 7 | 1 |
| x | 8 | 2 | 0 | −6 |
| y | 4 | −2 | 12 | 6 |

∴(x, y) = (8, 4) (2, −2) (0, 12) (−6, 6)

[類5] △ABCの∠BACの外角の2等分線と直線BCの交点をDとする. Dから直線AB, ACへおろした垂線のあしをそれぞれ$H_1, H_2$とする. $AB=a, AC=b, BD=c, CD=d, AD=l$ とおくとき、次の問に答えよ. 図は自分で作図せよ.

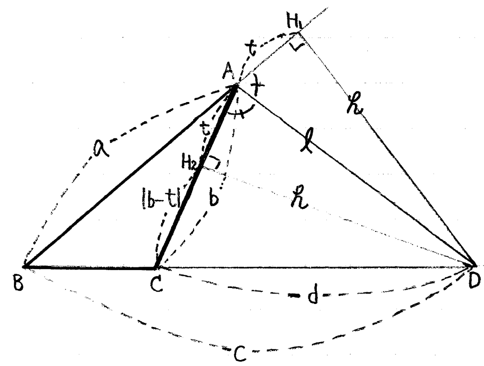
(1) $DH_1=DH_2$ ($=h$とおく)を証明し、$ad=bc$ が成り立つことを示せ.

(2) 三平方の定理と $ad=bc$ を用いて、$l^2=cd-ab$ が成り立つことを示せ.

(解) ∠ABC=∠ACBのとき 

となって交点Dは存在しない.

したがって、∠ABC<∠ACB or ∠ABC>∠ACB であるが、対称性から、∠ABC<∠ACB としても一般性は失われない. (右図)




(1) $\triangle ABD:\triangle ACD=c:d$ 一方 $\triangle ABD=\frac{1}{2}ah$, $\triangle ACD=\frac{1}{2}bh$ だから

$\frac{1}{2}ah:\frac{1}{2}bh=c:d$ ∴ $a:b=c:d$ ∴ $ad=bc$

$DH_1=DH_2$の証明(の方が先でした. Pardon me.) 前頁と全く同じ.

(2) $AH_1=AH_2=t$ とおくと、$BH_1=a+t$, $CH_2=|b-t|$

$\triangle ADH_1$より $l^2=t^2+h^2$ ---① $\triangle BDH_1$より $c^2=(a+t)^2+h^2$ ---② $\triangle CDH_2$より $d^2=|b-t|^2+h^2$ ---③

①,②,③より、$t, h$を消去し、$a, b, c, d, l$の関係式 $l^2=cd-ab$ を $ad=bc$も用いて示す.

②より、$c^2=a^2+2at+t^2+h^2=a^2+2at+l^2$ ---②′ (∵①より)

③より $d^2=b^2-2bt+t^2+h^2=b^2-2bt+l^2$ ---③′ (∵①より)

$b\times$②′ $bc^2=a^2b+2abt+bl^2$ ---②″

$a\times$③′ $ad^2=ab^2-2abt+al^2$ ---③″

②″+③″ $bc^2+ad^2=a^2b+ab^2+bl^2+al^2$ $\underline{bc}\times c+\underline{ad}\times d=ab(a+b)+l^2(a+b)=(a+b)(ab+l^2)$ ---④

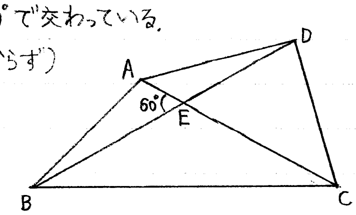
④の左辺に $ad=bc$ だから $\underline{bc}$にadを, $\underline{ad}$にbcを入れると $adc+bcd=(a+b)(ab+l^2)$

$cd(a+b)=(a+b)(ab+l^2)$ 両辺を $a+b$ ($>0, \neq 0$) でわって $cd=ab+l^2$ ∴ $l^2=cd-ab$

---

(問) 右図のように、AC=3, BD=4 である2つの線分AC, BDが点Eで、∠AEB=60°で交わっている.

このとき、四角形ABCDの面積を求めよ. (下の(カイ)の図はお任せ. 悪しからず)




(カイ) ACに平行な点B, 点Dを通る直線をそれぞれ$l_1, l_2$とする.

BDに平行な点A, 点Cを通る直線をそれぞれ$l_3, l_4$とする.

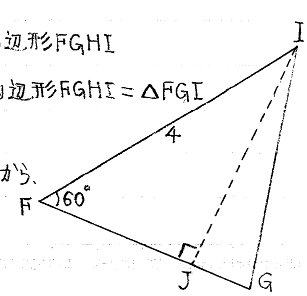
$l_3$と$l_1$の交点をF, $l_1$と$l_4$の交点をG, $l_4$と$l_2$の交点をH, $l_2$と$l_3$の交点をIとする.

4つの四角形AFBE, BGCE, CHDE, DIAEは平行四辺形であるから、△ABE=△AFB,

△BCE=△BGC, △CDE=△CHD, △DAE=△DIA したがって 四角形ABCD×2=平行四辺形FGHI

∠IFG=∠AEB=60°, FG=AC=3, FI=BD=4 であるから、四角形ABCD$=\frac{1}{2}\times$平行四辺形FGHI=△FGI

$=\frac{1}{2}\times FG\times IJ=\frac{1}{2}\times 3\times\left(4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3\sqrt{3}$ (右図, $IF:IJ=2:\sqrt{3}$ より, $IJ=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$)




補) 右図, Gから, IFに垂線をおろしてもできます. 平行四辺形など考えなくて, 直接, 点B, 点Dから, ACに垂線をおろし, ACに平行な点Dを通る直線をひいてもできます. 考えて下さい.

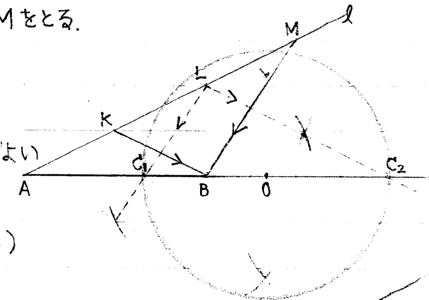
## アポロニウスの円

[類5] (1) 線分ABを2:1に内分する点$C_1$と2:1に外分する点$C_2$を作図せよ

(2) 点Pが$AP:PB=2:1$をみたしながら動くとき、点Pの軌跡※を作図せよ.

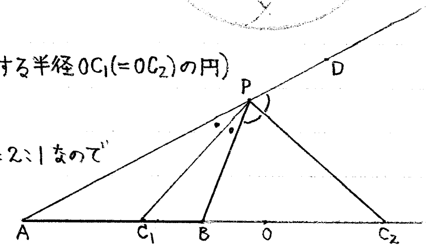
(3) (2)の理由を説明せよ. ※は、点Pが描く図形ということ.

A ――― B




(解) (1) Aから適当な半直線ℓをひき、ℓ上に$AK=KL=KM$となる適当な点K, L, Mをとる.
点Lを通り、MBに平行な直線をひき、ABとの交点を$C_1$とすればよい.
$AL:LM=2:1$, $MB /\!/ LC_1$なので$AC_1:C_1B=2:1$である.
点Lを通り、KBに平行な直線をひき、ABの延長線との交点を$C_2$とすればよい
$AK=KL$, $KB /\!/ LC_2$なので$AB=BC_2$ よって$AC_2:C_2B=2:1$である.
($C_2$については、$AB=BC_2$だから明らかに$AC_2:C_2B=2:1$ですが‥‥)

(2) $C_1C_2$を直径とする円が点Pの軌跡である.(右上図. $C_1C_2$の中点0を中心とする半径$0C_1(=0C_2)$の円)

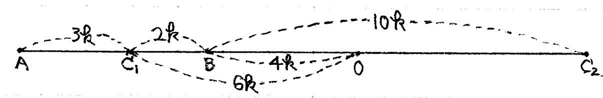



(3) $AP:PB=1:2$をみたす、点$C_1$, 点$C_2$以外の点Pをとる. $AP:PB=AC_1:C_1B=2:1$なので
角の2等分線の定理から、$\angle APC_1=\angle C_1PB$
$AP:PB=AC_2:C_2B=2:1$なので、外角の2等分線の定理から、
$\angle BPC_2=\angle C_2PD$ したがって$\angle C_1PB+\angle BPC_2=\angle C_1PC_2=90^\circ$(一定) よって(2)がいえる.(Pが$C_1$, $C_2$に一致するときも、この円に含まれる.)

(補) (3)は、角の2等分線の定理 $\angle APC_1=\angle C_1PB \rightleftarrows AP:PB=AC_1:C_1B$, $\angle BPC_2=\angle C_2PD \rightleftarrows AP:PB=AC_2:C_2B$
を用いました. この円は、アポロニウスの円と呼ばれるものです.

中学生への(問) ABを3:2に内分する点を$C_1$, 3:2に外分する点を$C_2$, とする. $AP:PB=3:2$をみたしながら動く点Pの軌跡は、上述(解)(3)と同じように$C_1C_2$を直径とするアポロニウスの円である. この円の中心を0とするとき、点0は、ABを$\boxed{ア}:\boxed{イ}$に$\boxed{ウ}$する点である. すなわち$A0:0B=\boxed{ア}:\boxed{イ}$である. ABの長さ$AB=5$のとき$0P=\boxed{エ}$となる.

(カイ) $AC_1:C_1B=3:2$だから$AC_1=3k$, $C_1B=2k$ $(k>0)$とおける. $AC_2:C_2B=3:2$だから、$AB:C_2B=3-2:2=1:2$
$AB=3k+2k=5k$だから$C_2B=10k$

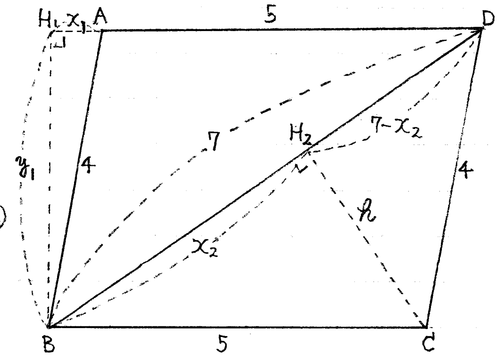



$C_1C_2=C_1B+C_2B=2k+10k=12k$
円の中心0は$C_1C_2$の中点だから、$C_10=\frac{C_1C_2}{2}=\frac{12k}{2}=6k$ $0B=6k-2k=4k$ $A0=AB+0B=5k+4k=9k$
よって$A0:0B=9k:4k=\underline{9:4}$ $0P=0C_1=6k$ $AB=5$のときだから$AB=5k=5$ $k=1$のとき $\therefore \underline{0P=6}$
(補) $A0:0B=9:4=3^2:2^2$であり. $AC_1:C_1B=AC_2:C_2B=3:2$. $A0:0B=AC_1^2:C_1B^2=AC_2^2:C_2B^2=3^2:2^2$

答. ア.9 イ.4 ウ.外分 エ.6

高校生(高1), 意欲ある中学生への(問) 上の(問)をABを$m:n$ $(m>n>0)$に内分、外分, ABの長さ$AB=m+n$として解いて下さい. (カイ)は、Vol. II, P.596の(6)下にあります.

[類6] 対辺の長さがそれぞれ4,5,対角線の長さが7である平行四辺形の面積Sと頂点から対角線へおろした垂線の長さ$h$を求めよ.




(解1) 右図参照

直角三角形$ABH_1$と直角三角形$BDH_1$に三平方の定理を用いて

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2=4^2=16 \cdots ① \\ (x_1+5)^2+y_1^2=7^2 \quad x_1^2+10x_1+25+y_1^2=49 \quad x_1^2+y_1^2+10x_1=24 \cdots ② \end{cases}$$

①を②に代入 $16+10x_1=24$ $10x_1=8$ $x_1=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$ これを

①に代入 $\left(\frac{4}{5}\right)^2+y_1^2=4^2$ $y_1^2=4^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\left(4+\frac{4}{5}\right)\left(4-\frac{4}{5}\right)$

$y_1^2=4\times\left(1+\frac{1}{5}\right)\times4\times\left(1-\frac{1}{5}\right)=4^2\times\frac{6}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{4^2\times2^2\times6}{5^2}=\left(\frac{4\times2}{5}\right)^2\times6$

$y_1>0$ $y_1=\frac{8\sqrt{6}}{5}$ よって 面積$\underline{S}=5y_1=5\times\frac{8\sqrt{6}}{5}=\underline{8\sqrt{6}}$

$\triangle BCD=\frac{1}{2}S$ $7h\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times8\sqrt{6}$ $\underline{h=\frac{8\sqrt{6}}{7}}$

(解2) 直角三角形$BCH_2$と直角三角形$CDH_2$に三平方の定理を用いて

$$\begin{cases} x_2^2+h^2=5^2=25 \cdots ① \\ (7-x_2)^2+h^2=4^2 \quad 49-14x_2+x_2^2+h^2=16 \quad x_2^2+h^2-14x_2+33=0 \cdots ② \end{cases}$$

①を②に代入 $25-14x_2+33=0$ $58=14x_2$ $x_2=\frac{58}{14}=\frac{29}{7}$ これを①に代入 $\left(\frac{29}{7}\right)^2+h^2=5^2$

$h^2=5^2-\left(\frac{29}{7}\right)^2=\left(5+\frac{29}{7}\right)\left(5-\frac{29}{7}\right)=\frac{64}{7}\times\frac{6}{7}=\left(\frac{8}{7}\right)^2\times6$ $h>0$ $\underline{h=\frac{8\sqrt{6}}{7}}$

面積$\underline{S}=\left(7h\times\frac{1}{2}\right)\times2=7h=7\times\frac{8\sqrt{6}}{7}=\underline{8\sqrt{6}}$

(補) 上の図では、BD=7 としましたが、AC=7 の図をかいたにしても、同じことです.裏返しにしたら同じ図になります.

[類7] (I) 45°,45°,90° の三角形の辺の比は、$1:1:\sqrt{2}$ であることを指示に従って証明せよ.

(1) 三平方の定理を用いる. (2) 三平方の定理を用いない.

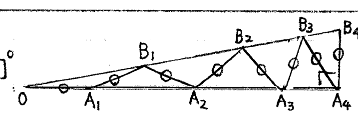
(II) 30°,60°,90° の三角形の辺の比は、$1:\sqrt{3}:2$ であることを指示に従って証明せよ.

(1) 三平方の定理を用いる. (2) 三平方の定理を用いない.

(考) (I),(II) どちらも(2)が大切です.(1)ができないと困りますが、(1)だけでsatisfactionしている人は、高校に入ってから、ゆくゆくは、大学入試にも影響するような勉強の仕方をしていることになります.どのように考えたら、気づくのかを学習すること、暗記するものもあります.さて、この設問の(考)ですが、紙面が少ないので、別問題P.15の(5)の例1.5上,P.15の(7)下～P.15の(10)にかきました.

---

問. 右図 $OA_1=A_1B_1=B_1A_2=A_2B_2=B_2A_3=A_3B_3=B_3A_4=A_4B_4$, $\angle OA_4B_4=90°$ のとき $\angle B_4OA_4=\square°$




(カイ) $\angle B_4OA_4(=\angle B_1OA_1)=x°$ とする. $\angle OB_1A_1=x°$, $\angle B_1A_1A_2=\angle B_1A_2A_1=2x°$, $\angle A_2B_1B_2=\angle A_2B_2B_1=3x°$, $\angle B_2A_2A_3=\angle B_2A_3A_2=4x°$

$\angle A_3B_2B_3=\angle A_3B_3B_2=5x°$, $\angle B_3A_3A_4=\angle B_3A_4A_3=6x°$, $\angle A_4B_3B_4=\angle A_4B_4B_3=7x°$, $\angle A_4B_4B_3(\angle A_4B_4O)+\angle B_4OA_4=90°$,

$7x°+x°=90°$ $8x°=90°$ $x°=\underline{11.25°}$

[類7] AB = 3cm, AD = 4cm, ∠BAD = 120° の平行四辺形ABCDについて次の問いに答えよ.

(1) 平行四辺形ABCDを作図せよ.　(2) 平行四辺形ABCDの面積Sを求めよ.

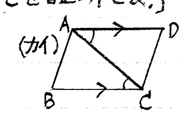
(3) 対角線ACの長さを求めよ.　(4) 対角線BDの長さを求めよ.

更に点Aから対角線BDに垂直な直線をひき、対角線BDとの交点をE, 線分BCとの交点をFとする.

(5) AEの長さを求めよ (6) BEの長さを求めよ (7) BFの長さを求めよ. (8) EFの長さを求めよ.

(考) (2), (3), (4) は三平方の定理で求まりますが, (5), (6), (7), (8) は相似も考える. (1)の作図も最速を考えます.
最終結果は有理化ですが, 次に2乗して計算するときには, 分母がルートのままのものを用います.
平行四辺形の定義: 二組の対辺がそれぞれ平行な四角形
平行四辺形の性質 (i) 対辺は長さが等しく平行 (ii) 対角線は互いに他を二等分する.
(iii) 二組の対角がそれぞれ等しい. (iv) 2本の対角線によって分けられた4つの三角形の面積は等しい.
四角形のとき、(i) or (ii) or (iii) がいえれば、その四角形は平行四辺形です. 厳密には、証明することになりますが----
例えば「四角形ABCDにおいて、AD∥BC, AD = BCならば、四角形ABCDは平行四辺形であることを証明せよ.」

(カイ) △ABCと△CDAにおいて 条件AD∥BCより錯角が等しいから ∠ACB = ∠CAD ---①




条件AD = BCより BC = DA ---②　AC = CA (AC共通) ---③

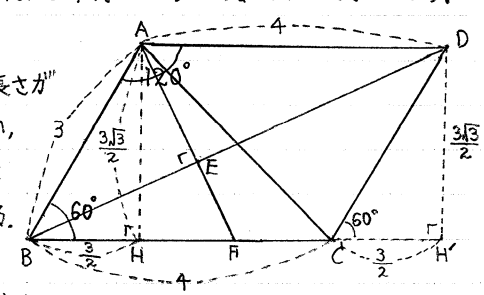
①, ②, ③より、二辺とその間の角がそれぞれ等しいから △ABC ≡ △CDA

よって ∠BAC = ∠DCA 錯角が等しいから AB∥DC

これで、二組の対辺がそれぞれ平行であることが示され、定義により、四角形ABCDは平行四辺形である.

となりますが、普通の証明問題では、"対辺の長さが等しく、平行だから平行四辺形である"とかいてもOKです.

(解) (1) 右図 BC = 4cmをとる. Bを頂点とし、底辺がBC上にある一辺の長さが3cmの正三角形を描き、点Aをとる. (これで, AB = 3cm, BC = 4cm, ∠ABC = 60° (∵∠BAD = 120°) が確定). 同じ3cmの半径でCを中心とする円を描き、Aを中心とする半径4cmの円との交点をDとする.
ついでに、右図、点E、点Hを作図しておく. ABの中点を中心とする半径 $\frac{AB}{2} = \frac{3}{2}$ cm の円を描き、BCとの交点をH, BDとの交点をEとする.




(2) △ABHは30°, 60°, 90°の定三角定規なので. $BH = AB \times \frac{1}{2} = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $AH = BH \times \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

∴ $\underline{S} = BC \times AH = 4 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = \underline{6\sqrt{3}}$

(3) 三平方の定理より. $AC^2 = AH^2 + CH^2 = AH^2 + (BC - BH)^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2 \cdot 3}{2^2} + \frac{5^2}{2^2} = \frac{27+25}{2^2} = \frac{52}{2^2} = \frac{2^2 \cdot 13}{2^2} = 13$

$AC > 0$ ∴ $\underline{AC = \sqrt{13}}$

(4) 右上図 三平方の定理より. $BD^2 = DH'^2 + BH'^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{3^2 \cdot 3 + 11^2}{2^2} = \frac{27+121}{2^2} = \frac{148}{2^2} = \frac{2^2 \cdot 37}{2^2} = 37$

$BD > 0$ ∴ $\underline{BD = \sqrt{37}}$

(5) $\triangle ABD =$ 平行四辺形$ABCD \times \frac{1}{2}$　$BD \times AE \times \frac{1}{2} = 5 \times \frac{1}{2}$　$\sqrt{37} \times AE = 6\sqrt{3}$　$\therefore \underline{AE} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{37}} = \underline{\frac{6\sqrt{111}}{37}}$

(6) 三平方の定理より $BE^2 = AB^2 - AE^2 = 3^2 - \left(\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{37}}\right)^2 = 3^2 - \left(\frac{2\cdot 3\sqrt{3}}{\sqrt{37}}\right)^2 = 3^2 - \frac{2^2\cdot 3^2\cdot 3}{37} = 3^2 \times \left(1 - \frac{2^2\cdot 3}{37}\right) = 3^2 \times \frac{37-12}{37} = \frac{3^2\cdot 5^2}{37}$

$BE > 0$　$\therefore \underline{BE} = \frac{3\cdot 5}{\sqrt{37}} = \frac{15}{\sqrt{37}} = \underline{\frac{15\sqrt{37}}{37}}$

(7) $\triangle BFE \backsim \triangle DAE$ より　$BF : DA = BE : DE = BE : BD - BE$　$BF : 4 = \frac{15}{\sqrt{37}} : \sqrt{37} - \frac{15}{\sqrt{37}} = 15 : (\sqrt{37})^2 - 15 = 15 : 22$

$22 \times BF = 4 \times 15$　$\therefore \underline{BF} = \frac{4\times 15}{22} = \underline{\frac{30}{11}}$

(8) $\triangle BFE \backsim \triangle DAE$ より、$EF : EA = BF : DA$　$EF : \frac{6\sqrt{111}}{37} = \frac{30}{11} : 4 = 30 : 44 = 15 : 22$　$22 \times EF = \frac{6\sqrt{111} \times 15}{37}$

$\therefore \underline{EF} = \frac{6\sqrt{111} \times 15}{22 \times 37} = \frac{3\sqrt{111} \times 15}{11 \times 37} = \underline{\frac{45\sqrt{111}}{407}}$

(別解) 三平方の定理より $EF^2 = BF^2 - BE^2 = \left(\frac{30}{11}\right)^2 - \left(\frac{3\cdot 5}{\sqrt{37}}\right)^2 = \frac{2^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{11^2} - \frac{3^2\cdot 5^2}{37} = 3^2\cdot 5^2 \times \left(\frac{2^2}{11^2} - \frac{1}{37}\right) = 3^2\cdot 5^2 \times \frac{4\times 37 - 121}{11^2 \times 37}$

$= 3^2\cdot 5^2 \times \frac{27}{11^2 \times 37} = \frac{3^2\cdot 5^2\cdot 3^3}{11^2\cdot 37} = \left(\frac{3\cdot 5\cdot 3}{11}\right)^2 \cdot \frac{3}{37}$

$EF > 0$　$\therefore \underline{EF} = \frac{3\cdot 5\cdot 3}{11} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{37}} = \frac{45\sqrt{3} \times \sqrt{37}}{11 \times 37} = \underline{\frac{45\sqrt{111}}{407}}$

(補) 三平方の定理を用いるよりも相似を用いる方が計算が楽になります。他にも、求める方法はあります。
「図形と方程式」としてBを原点にとり、座標を設定すると、結局、長さを求めるには$\sqrt{\bigcirc^2 + \triangle^2}$の計算だけに、
頼らねばならず、計算がtroublesomeになるでしょう。
しかし、座標設定しても、相似、面積、メネラウスの定理などを途中で
持ち込むとやさしくなるでしょうか？ BF(Fの座標)は、すぐに求まりそうです。
$BE : ED = BF : AD$ から、$BE = BD \times \frac{BF}{BF + AD}$ が求まります。AFを求めると、
同じように相似を利用して、AE, EFが求まるだろうですが、P.3の(9)下にあります。

| | |
|---|---|
| 答 | (1) (解)参照、(2) $S = 6\sqrt{3}$ $cm^2$<br>(3) $AC = \sqrt{13}$ cm　(4) $BD = \sqrt{37}$ cm<br>(5) $AE = \frac{6\sqrt{111}}{37}$ cm　(6) $BE = \frac{15\sqrt{37}}{37}$ cm<br>(7) $BF = \frac{30}{11}$ cm　(8) $EF = \frac{45\sqrt{111}}{407}$ cm |

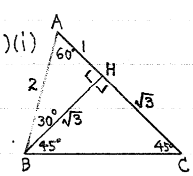
---

問(1)(i) $AB = 2$, $\angle A = 60°$, $\angle B = 75°$ の $\triangle ABC$ のとき $BC = \boxed{ア}$, $AC = \boxed{イ}$, $\triangle ABC$の面積$= \boxed{ウ}$ である。

(ii) $AB = \sqrt{6}$, $AC = 2$, $\angle A = 75°$, $\angle P = 90°$ である凸四角形$ABPC$の面積の最大値は $\boxed{エ}$ である。(点Pは動点)

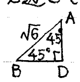
(2) $AC = 1$, $\angle A = 75°$, $\angle B = 15°$ である$\triangle ABC$の面積を求めよ。

(1)(i)



(カイ)(1)(i) 右図 $BH : BC = 1 : \sqrt{2}$　$\therefore \underline{BC} = \sqrt{2}BH = \underline{\sqrt{6}}$, $\underline{AC = 1 + \sqrt{3}}$, $\underline{\triangle ABC} = (1+\sqrt{3}) \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \underline{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}$

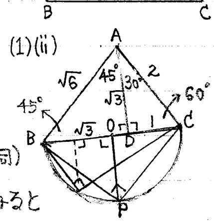
(ii) 2辺とその間の角が決まっている($AB = \sqrt{6}$, $AC = 2$, $\angle A = 90°$)から、$\triangle ABC$は、ただ一つ決定する。

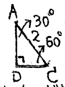


のような直角二等辺三角形の辺の比は、$AB : AD(BD) = \sqrt{2} : 1$ であるから $AB = \sqrt{6}$ のとき

$\sqrt{6} : AD(BD) = \sqrt{2} : 1$　$\sqrt{2} \times AD(BD) = \sqrt{6}$　$\therefore AD = BD = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$

(1)(ii)



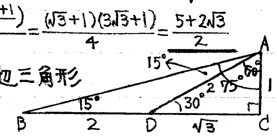


のような直角三角形の辺の比は $AC : AD : CD = 2 : \sqrt{3} : 1$ であるから $AC = 2$ のとき $AD = \sqrt{3}$, $CD = 1$

したがって、$\triangle ABC$は、上の2つの直角三角形の辺ADを共有させた三角形である。((i)の$\triangle ABC$と合同)

$BC = \sqrt{3} + 1$, $\angle BPC = 90°$ だから、点Pは、線分BCを直径とする円周上にある。$\triangle BPC$の底辺をBCとみると

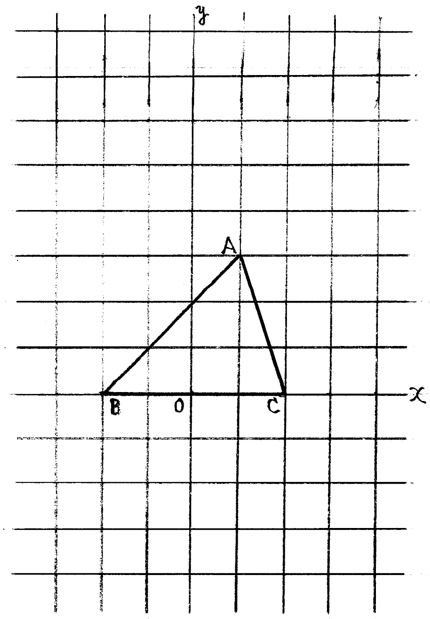
点Pが右図の位置のとき高さが最大で面積最大　$\therefore$ $\underline{求める面積} = \frac{BC(AD + OP)}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)\left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)(3\sqrt{3}+1)}{4} = \underline{\frac{5+2\sqrt{3}}{2}}$



(2) $\angle ACB = 90°$, $\angle CAD = 60°$ となる点Dをとると(右図)、$\angle BAD = 15°$ であるから、$\triangle ADB$は二等辺三角形

となり、$AD = BD = 2$ ($\because AC = 1$), $CD = \sqrt{3}$　よって $\underline{\triangle ABC} = (2+\sqrt{3}) \times 1 \times \frac{1}{2} = \underline{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$

[類8] A(1,3), B(-2,0), C(2,0), D(-3,1), F(4,-1) とする. 次の□を埋めながら右グラフに各点、直線(線分)をかき込め. 全体的に矢印の形が現われる.
平行四辺形ABDEとなる点E($\boxed{\text{ア}}$,$\boxed{\text{イ}}$)と平行四辺形ACFGとなる点G($\boxed{\text{ウ}}$,$\boxed{\text{エ}}$)をとる. 直線DE: $y=\boxed{\text{オ}}x+\boxed{\text{カ}}$ と直線FG: $y=\boxed{\text{キ}}x+\boxed{\text{ク}}$ の交点をHとすると, 直線AH: $y=\boxed{\text{ケ}}x+\boxed{\text{コ}}$ である. 直線AHに平行な, 点B(-2,0)を通る直線: $y=\boxed{\text{サ}}x+\boxed{\text{シ}}$ と直線DHの交点I($\boxed{\text{ス}}$,$\boxed{\text{セ}}$)であり, 直線AHに平行な点C(2,0)を通る直線: $y=\boxed{\text{ソ}}x+\boxed{\text{タ}}$ と直線FHの交点J($\boxed{\text{チ}}$,$\boxed{\text{ツ}}$)となる.
半直線IB上にBI=BKとなる点K($\boxed{\text{テ}}$,$\boxed{\text{ト}}$)と半直線JC上に, CJ=CLとなる点L($\boxed{\text{ナ}}$,$\boxed{\text{ニ}}$)をとる.
平行四辺形ABDEの面積 $S_1=\boxed{\text{ヌ}}$, 平行四辺形ACFGの面積 $S_2=\boxed{\text{ネ}}$, 四角形BKLCの面積 $S=\boxed{\text{ノ}}$ となる.
したがって, $S_1, S_2, S$ に $\boxed{\text{ハ}}$ の関係があると推測できる. 直線AHと線分BC, 線分KLとの交点は, それぞれ, M($\boxed{\text{ヒ}}$,$\boxed{\text{フ}}$), N($\boxed{\text{ヘ}}$,$\boxed{\text{ホ}}$)である. $\boxed{\text{ハ}}$が成り立つ理由を説明せよ.




(解) A(1,3), B(-2,0), C(2,0), D(-3,1), E($\overset{\text{ア}}{\boxed{0}}$,$\overset{\text{イ}}{\boxed{4}}$), F(4,-1), G($\overset{\text{ウ}}{\boxed{3}}$,$\overset{\text{エ}}{\boxed{2}}$)

直線DE: $y=\overset{\text{オ}}{\boxed{1}}x+\overset{\text{カ}}{\boxed{4}}$, 直線FG: $y=\frac{-1-2}{4-3}(x-3)+2=-3(x-3)+2=\overset{\text{キ}}{\boxed{-3}}x+\overset{\text{ク}}{\boxed{11}}$,

直線AHを求める. Hを通る直線は, $(-3x+11-y)+k(x+4-y)=0$ とおける. ※補

($y=\boxed{\text{ケ}}x+\boxed{\text{コ}}$)

(但し直線 $x+4-y=0$ は表せない. 交点Hを表すことはできる)

A(1,3)を通るから, 代入して $(-3\cdot1+11-3)+k(1+4-3)=0$

$5+2k=0$ ∴ $k=-\frac{5}{2}$ $(-3x+11-y)-\frac{5}{2}(x+4-y)=0$

$2(-3x+11-y)-5(x+4-y)=0$, $-11x+2+3y=0$

$3y=11x-2$ ∴直線AH: $y=\overset{\text{ケ}}{\boxed{\frac{11}{3}}}x-\overset{\text{コ}}{\boxed{\frac{2}{3}}}$

$y=\boxed{\text{サ}}x+\boxed{\text{シ}}$ を求める. $y=\frac{11}{3}(x+2)+0=\overset{\text{サ}}{\boxed{\frac{11}{3}}}x+\overset{\text{シ}}{\boxed{\frac{22}{3}}}$ ---①

I($\boxed{\text{ス}}$,$\boxed{\text{セ}}$)を求める ①と $y=x+4$ を連立して, $x+4=\frac{11}{3}x+\frac{22}{3}$

$3x+12=11x+22$ $-10=8x$ $x=-\frac{10}{8}=-\frac{5}{4}$

$y=-\frac{5}{4}+4=\frac{11}{4}$ ∴ I($\overset{\text{ス}}{\boxed{-\frac{5}{4}}}$,$\overset{\text{セ}}{\boxed{\frac{11}{4}}}$)

$y=\boxed{\text{ソ}}x+\boxed{\text{タ}}$ を求める $y=\frac{11}{3}(x-2)+0=\overset{\text{ソ}}{\boxed{\frac{11}{3}}}x+\overset{\text{タ}}{\boxed{-\frac{22}{3}}}$ ---②

J($\boxed{\text{チ}}$,$\boxed{\text{ツ}}$)を求める. ②と $y=-3x+11$ を連立して $-3x+11=\frac{11}{3}x-\frac{22}{3}$

$-9x+33=11x-22$ $55=20x$ $x=\frac{55}{20}=\frac{11}{4}$

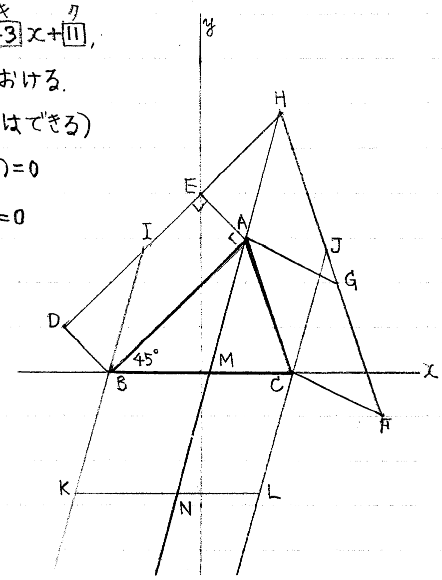
$y=-3\cdot\frac{11}{4}+11=11\times(-\frac{3}{4}+1)=\frac{11}{4}$ ∴ J($\overset{\text{チ}}{\boxed{\frac{11}{4}}}$,$\overset{\text{ツ}}{\boxed{\frac{11}{4}}}$)

K($\boxed{\text{テ}}$,$\boxed{\text{ト}}$)を求める I($-\frac{5}{4}$,$\frac{11}{4}$)とK(x,y)の中点がB(-2,0)だから, $\frac{-\frac{5}{4}+x}{2}=-2$ $-\frac{5}{4}+x=-4$ $x=-4+\frac{5}{4}=-\frac{11}{4}$

$\frac{\frac{11}{4}+y}{2}=0$ $y=-\frac{11}{4}$ ∴ K($\overset{\text{テ}}{\boxed{-\frac{11}{4}}}$,$\overset{\text{ト}}{\boxed{-\frac{11}{4}}}$)

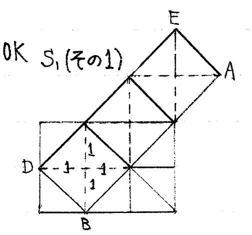
L($\boxed{\text{ナ}}$,$\boxed{\text{ニ}}$)を求める. J($\frac{11}{4}$,$\frac{11}{4}$)とL(x,y)の中点がC(2,0)だから $\frac{\frac{11}{4}+x}{2}=2$ $\frac{11}{4}+x=4$ $x=4-\frac{11}{4}=\frac{5}{4}$

$\frac{\frac{11}{4}+y}{2}=0$ $y=-\frac{11}{4}$ ∴ L($\overset{\text{ナ}}{\boxed{\frac{5}{4}}}$,$\overset{\text{ニ}}{\boxed{-\frac{11}{4}}}$)



平行四辺形ABDEの面積$S_1$=ヌを求める.(長方形ABDEである)

(その1)(小学?中学入試の発想) $S_1=$ △(1, 1) が12個 $=1\times1\times\frac{1}{2}\times12=\overset{ヌ}{\boxed{6}}$, 長方形にしてもOK $(2\times3=\boxed{6})$




(その2)定三角定規(90°,45°,45°)の辺の比 $1:1:\sqrt{2}$ より $BD=AE=\sqrt{2}$, $AB=ED=3\sqrt{2}$

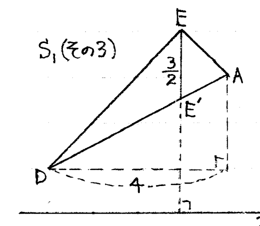
よって $S_1=\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=\overset{ヌ}{\boxed{6}}$

(その3) $S_1=\triangle ADE\times2$

直線AD: $y=\frac{3-1}{1-(-3)}(x-1)+3=\frac{1}{2}(x-1)+3=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$　E(0,4)のx座標 $x=0$

を代入 $y=\frac{5}{2}$　$EE'=4-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$　$\therefore S_1=(4\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2})\times2=\overset{ヌ}{\boxed{6}}$

(補)長方形−3つの三角形 or 台形−2つの三角形 でも of course できます.




平行四辺形ACFGの面積$S_2$=ネを求める. $S_2=\triangle AFG\times2$

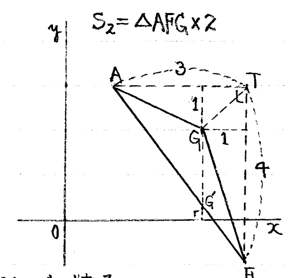
$\triangle AFG=\triangle AFT-\triangle AGT-\triangle GFT=3\times4\times\frac{1}{2}-3\times1\times\frac{1}{2}-4\times1\times\frac{1}{2}=6-\frac{3}{2}-2=\frac{5}{2}$

$\therefore S_2=\frac{5}{2}\times2=\overset{ネ}{\boxed{5}}$

(補)直線AF: $y=\frac{3-(-1)}{1-4}(x-1)+3=-\frac{4}{3}(x-1)+3=-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}+3=-\frac{4}{3}x+\frac{13}{3}$

G(3,2)のx座標 $x=3$ を代入 $y=-\frac{4}{3}\cdot3+\frac{13}{3}=-4+\frac{13}{3}=\frac{1}{3}$　$\therefore G'(3,\frac{1}{3})$

$GG'=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$　$\therefore \triangle AFG=\frac{5}{3}\times3\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$　$\therefore S_2=\frac{5}{2}\times2=\overset{ネ}{\boxed{5}}$




四角形BKLCは、点K,点Lのy座標が等しい$(-\frac{11}{4})$から,BC//KL, BK//CLとから平行四辺形BKLCである

平行四辺形BKLCの面積 $S=BC\times$高さ$=4\times\frac{11}{4}=\overset{ノ}{\boxed{11}}$　したがって $\overset{ハ}{\boxed{S_1+S_2=S}}$ と推測する.

直線AH: $y=\frac{11}{3}x-\frac{2}{3}$ に $y=0$を代入 $0=\frac{11}{3}x-\frac{2}{3}$　$11x-2=0$　$x=\frac{2}{11}$　$\therefore M(\overset{ヒ}{\boxed{\frac{2}{11}}},\overset{フ}{\boxed{0}})$

$y=-\frac{11}{4}$(直線KLの式)を代入 $-\frac{11}{4}=\frac{11}{3}x-\frac{2}{3}$　$-33=44x-8$　$-25=44x$　$x=-\frac{25}{44}$　$\therefore N(\overset{ヘ}{\boxed{-\frac{25}{44}}},\overset{ホ}{\boxed{-\frac{11}{4}}})$

$\overset{ハ}{\boxed{S_1+S_2=S}}$ が成り立つ理由(詳しくは,P.7の(14)[類8]参照)

平行四辺形ABIH,平行四辺形ACJHだから $BI=AH=CJ$　$BI=BK$, $CJ=CL$ だから $BK=CL$

BK//CLとから,四角形BKLCは,平行四辺形BKLC　BK//MN//CLから平行四辺形BKNM,平行四辺形MNLC,

平行四辺形ABDE=平行四辺形ABIH(底辺AB共通,高さが同じ)
平行四辺形ABIH=平行四辺形BKNM(底辺BI=BK,高さが同じ)
∴平行四辺形ABDE=平行四辺形BKNM

平行四辺形ACFG=平行四辺形ACJH(底辺AC共通,高さが同じ)
平行四辺形ACJH=平行四辺形MNCL(底辺CJ=CL,高さが同じ)
∴平行四辺形ACFG=平行四辺形MNLC

よって,平行四辺形ABDE+平行四辺形ACFG=平行四辺形BKNM+平行四辺形MNLC=平行四辺形BKLC
(四角形BKLC)

すなわち $S_1+S_2=S$

(補) $y=-3x+2$ と $y=\frac{1}{4}x-3$ の交点をA,点B(3,1)とするとき,直線ABの式は,点Aの座標を求めずに求まります.

$3x+y-2=0$ と $x-4y-12=0$ の交点Aを通る直線の式は, $3x+y-2+k(x-4y-12)=0$ とおける.(但し,この式は
$x-4y-12=0$ $(y=\frac{1}{4}x-3)$は表すことができない).点B(3,1)を通るとすれば, $3\cdot3+1-2+k(3-4\cdot1-12)=0$　$8-13k=0$　$\therefore k=\frac{8}{13}$

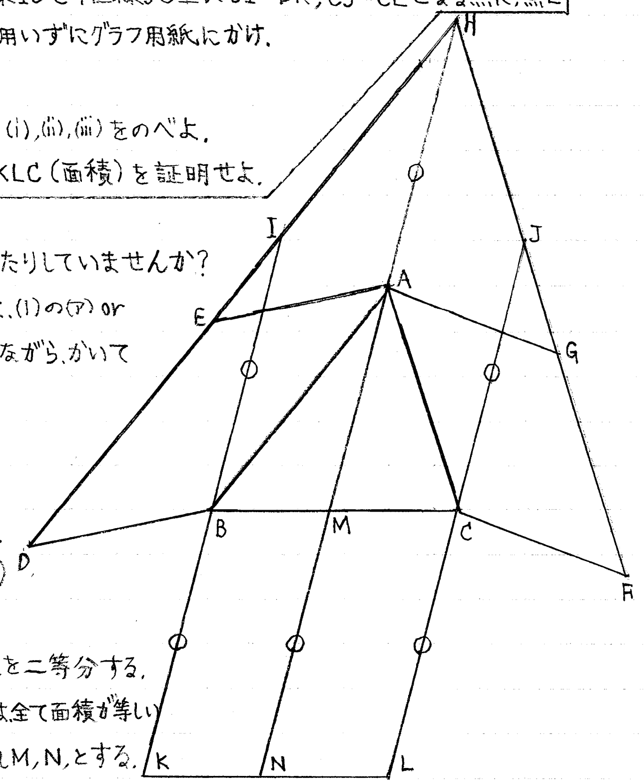
よって $3x+y-2+\frac{8}{13}(x-4y-12)=0$　$39x+13y-26+8x-32y-96=0$　$47x-19y-122=0$　$\therefore y=\frac{47}{19}x-\frac{122}{19}$

[類8] △ABCの外側に、辺AB，辺ACを一辺とする適当な平行四辺形ABDEと平行四辺形ACFGをそれぞれつくる。直線DEと直線FGの交点をHとする。点Bと点Cを通る直線HAと平行な直線をそれぞれひき、直線DH，直線FHとの交点をそれぞれ点I，点Jとする。半直線IBと半直線JC上にBI＝BK，CJ＝CLとなる点K，点Lをそれぞれとる。できるだけ一般的な図をコンパスを用いずにグラフ用紙にかけ。

(1) (ア) 平行四辺形の定義をのべよ。

(イ) 定義から導かれる平行四辺形の性質を3つ(i),(ii),(iii)をのべよ。

(2) 平行四辺形ABDE＋平行四辺形ACFG＝四角形BKLC（面積）を証明せよ。




(考) 右のような図がかけたでしょうか。点Eと点Iが重なったりしていませんか？一般に通用する図をかくべきです。(2)の証明は、(1)の(ア) or (イ)の(i),(ii),(iii)のどの性質を用いたかを明確にしながら、かいてみましょう。

(解) (1) (ア) 二組の対辺がそれぞれ平行な四角形

(イ) (i) 一組の対辺の長さが等しく平行である。
（もう一組も必ず同様です。P.70の(10)）

(ii) 二組の対角がそれぞれ等しい。

(iii) 二つの対角線は、それぞれ他の対角線を二等分する。

(iv) 二つの対角線で分けられる四つの三角形は全て面積が等しい

(2) 直線HAと辺BC，線分KLとの交点をそれぞれM，Nとする。

(ア)により、平行四辺形ABIH，平行四辺形ACJH がいえる。すると(イ)の(i)により BI＝AH＝CJ

BI＝BK，CJ＝CL だから、BK＝CL，BK // CL よって(イ)(i)により、平行四辺形BKLCがいえる。

(ア)により、平行四辺形BKNM，平行四辺形MNLC がいえる。(四角形BKLCは平行四辺形BKLCがいえた)

平行四辺形ABDE＝平行四辺形ABIH（∵底辺AB共通，高さが同じ）
平行四辺形ABIH＝平行四辺形BKNM（∵底辺 BI＝BK，高さが同じ）
∴平行四辺形ABDE＝平行四辺形BKNM

平行四辺形ACFG＝平行四辺形ACJH（∵底辺AC共通，高さが同じ）
平行四辺形ACJH＝平行四辺形MNLC（∵底辺 CJ＝CL，高さが同じ）
∴平行四辺形ACFG＝平行四辺形MNLC

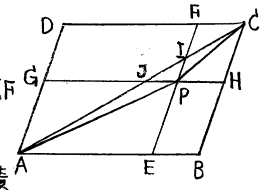
よって 平行四辺形ABDE＋平行四辺形ACFG＝平行四辺形BKNM＋平行四辺形MNLC＝平行四辺形BKLC
（四角形BKLC）

(補) 説明するのはeasyですが、書くとなると大変ですねぇ〜。平行四辺形IBCJとなる筈ですが、-------

カけぱし



[類9] 平行四辺形ABCDの△ABCの内部に点Pを次のような条件をみたすように、とることにする。




条件：点Pを通り、AD(//BC)に平行な直線をひき、辺AB,辺DCとの交点をそれぞれ、点E,点F とする。更に点Pを通り、AB(//DC)に平行な直線をひき、辺AD,辺BCとの交点をそれぞれ、点G,点H,とする。このとき、平行四辺形PFDG,平行四辺形PEBHの面積は、それぞれ、$S_1$,$S_2$をみたす定数である。

(1) $S_1>S_2$でなければならないことを証明せよ。

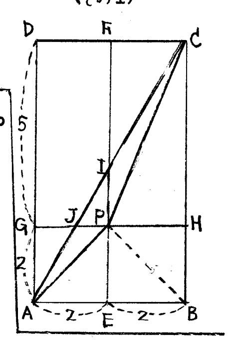
(2) △PCAの面積Sは、$S_1$と$S_2$で表わされる定数であることを証明せよ

高校生 (3) このような平行四辺形ABCDの面積Tの最小値$T_0$を$S_1$,$S_2$で表せ。(△PCAは不用)((解)は、次頁下)

(考1) P.7の(10)にある、平行四辺形の性質です。面積については、2本の対角線によって分けられる4つの三角形の面積は等しいがあります。勿論、1本の対角線で分けられる2つの三角形の面積は等しいです。(1)は、この性質により、平行四辺形PGAE,平行四辺形PHCF の面積$S_0$,$S_0'$を考えるとeasyです。(2)は、(解2)は解を見ると、easyに見えますが、一つの受験テクニックとして、覚えて欲しい技法ではあります。文字の数は、条件分析をして、組み入れた、最小の文字数を用います。結果は、S=($S_1$と$S_2$だけの式)となるということです。平行四辺形は、全部で、何個ありますか？ ${}_3C_2\times{}_3C_2=9$個です。(たて、3本のうち2本を選び、よこ3本のうち2本を選べば、平行四辺形が1個できる) この9個から、△PCA(=S)を含むものを選んで、平行四辺形の性質、上述、波線部を用いることを考えます。このとき、平行であることを用いて、三角形の面積の移動を考えることは、いうまでもありません。$\triangle ABC=S+S_2+\frac{S_0}{2}+\frac{S_0'}{2}=\triangle ACD$ ですが、$S_1$との連結がうまくいきません。△PIJが、邪魔をしているからです。そこで、$\triangle PIJ=x$とおいて、---すると、$\triangle PCI=y$, $\triangle PJA=z$とおき、$x+y+z=S$, $x,y,z$を介して、Sとの連結を考えることになります。他の平行四辺形の波線部の条件を考えて、△ABC=△ACDに持ち込むことになります。このような解法に気付くには、条件分析がしっかりなされていること、この設問の場合、波線部を、平行四辺形の条件から選び出せたかということですが、平行四辺形の面積には、これしかありませんのでeasyです。このような解法に気付かなくても、次の(解3)のようにもできます。いきなり、$\triangle ICF=a$, $\triangle JGA=b$などとおいても、勿論できますが、平行四辺形の性質と、対称性を考えると、$S_1$,$S_2$,とある以上、$S_0$,$S_0'$を持ち込むのが、数学的には、一般的です。$x,y,z$を持ち出さないで、直接$S,S_1,S_2,S_0,S_0'$だけで考えるのがBestです。2△ABC=平行四辺形ABCD とすれば"OKです。(解1)にしました。

例 この設問で、$S_1=10$, $S_2=4$のとき$S=\square$である。((その2),(その3),(補),は、本題の(2),(3)の(解)にも適用します。)

(その1)




(カイ) (その1) 穴埋め問題と捉えれば"、右図、長方形でも求まります。$S_1=2\times5$, $S_2=2\times2$とする

$\underline{S}=\triangle ABC-\triangle PAB-\triangle PBC=\frac{1}{2}\times4\times7-\frac{1}{2}\times4\times2-\frac{1}{2}\times7\times2=14-4-7=\underline{3}$

(その2) 図は次頁 $\triangle PFDG=S_1=10$, $\triangle PEBH=S_2=4$, $\triangle PIJ=x$, $\triangle PCI=y$, $\triangle PJA=z$, 平行四辺形PGAE$=S_0$

平行四辺形PHCF$=S_0'$とおく。△ABC=△ACDに持ち込む。

$\triangle ABC=\triangle PCA+\triangle PAE+\triangle PHC+$平行四辺形PEBH$=(x+y+z)+\frac{1}{2}S_0+\frac{1}{2}S_0'+4$

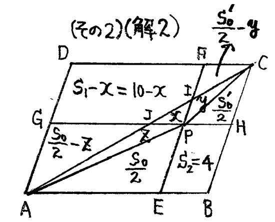
$\triangle ACD=\triangle JGA+\triangle ICF+$図形$\overset{D}{\underset{G}{\square}}\overset{F}{\underset{J}{I}}=(\frac{1}{2}S_0-z)+(\frac{1}{2}S_0'-y)+(10-x)$

よって $x+y+z+\frac{1}{2}S_0+\frac{1}{2}S_0'+4=\frac{1}{2}S_0-z+\frac{1}{2}S_0'-y+10-x$

$\therefore 2x+2y+2z=10-4=6$　$2(x+y+z)=6$　$2S=6$　$\underline{\therefore S=3}$

(補) この設問は、$S=\square$であり、題意の図形は、$S_1=10$, $S_2=4$ならば"、必ず"Sが求まるということですから、長方形にして、適当に長さをとっても必ず"解は得られます。途中経過を示せならば"、この(その1)は、outです。

(その2)(解2)




(その3) 図のように長さを決めると、条件は、$S_1=ad=10$, $S_2=bc=4$

$\triangle PCA=S=\frac{1}{2}(c+d)\times PJ$

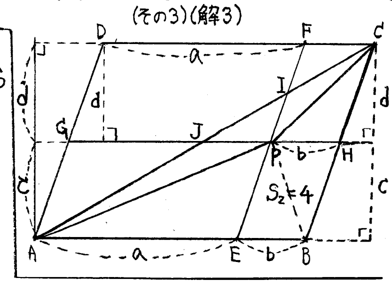
$PJ=JH-PH=JH-b$　$\triangle ABC\backsim\triangle JHC$ だから $AB:JH=BC:HC=c+d:d$

$(c+d)\times JH=d\times AB=d\times(a+b)$　$\therefore JH=\frac{d(a+b)}{c+d}$

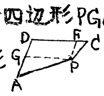
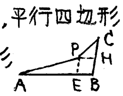
$PJ=\frac{d(a+b)}{c+d}-b$　$\therefore \triangle PCA=S=\frac{1}{2}(c+d)\times PJ=\frac{1}{2}(c+d)\left\{\frac{d(a+b)}{c+d}-b\right\}=\frac{1}{2}\{d(a+b)-b(c+d)\}=\frac{1}{2}(ad-bc)$

$ad=10$, $bc=4$ を入れて、$\triangle PCA=S=\frac{1}{2}(10-4)=3$ (この解は、P.15の(3)と深く結びつきます.)

(その3)(解3)




(解1) (1) 平行四辺形PGAE$=S_0$, 平行四辺形PHCF$=S_0'$ とする. $\triangle ABC$内に点Pがあるから

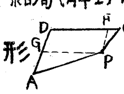
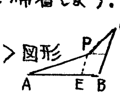
図形  > 図形  すなわち, $S_1+\frac{S_0}{2}+\frac{S_0'}{2}>S_2+\frac{S_0}{2}+\frac{S_0'}{2}$　$\therefore S_1>S_2$

(2) $2\triangle ABC=2\times(S+\frac{S_0}{2}+\frac{S_0'}{2}+S_2)=$平行四辺形$ABCD=S_1+S_0+S_0'+S_2$

$2S+S_0+S_0'+2S_2=S_1+S_0+S_0'+S_2$　$2S=S_1-S_2$　$\therefore S=\frac{S_1-S_2}{2}$ (定数)

注、$\angle BAD$が鈍角でもOKです.

(補) 座標においてしまうのも、わかりやすいでしょう. これを(解4)とできます. 更に他の解を考えます. 点Jを通り、AD(//BC)に平行な直線をひき、6個の平行四辺形にして、$\triangle JPC$, $\triangle JPA$を等積変形するとできますが、結局(解1)に帰着します.

(解2) (1) 平行四辺形PGAE$=S_0$, 平行四辺形PHCF$=S_0'$ とする. $\triangle ABC$内に点Pがあるから, 図形  > 図形 

平行四辺形PFDG$+\triangle PGA+\triangle PCF>$平行四辺形PEBH$+\triangle PAE+\triangle PHC$

$S_1+\frac{S_0}{2}+\frac{S_0'}{2}>S_2+\frac{S_0}{2}+\frac{S_0'}{2}$　$\therefore S_1>S_2$

(2) 例の(その2)において, $10=S_1$, $6=S_2$とすれば $S=\frac{S_1-S_2}{2}$

| 答 | (1) 左解　(2) $S=\frac{S_1-S_2}{2}$<br>(3) $T_0=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$ |
| --- | --- |

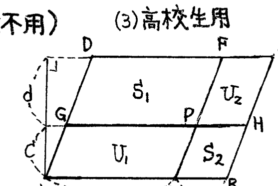
(補) 高校のジャンルを用いると、$\angle BAD=\theta$ などとおいて、三角でもできます.

(解3) (1) (解1)に同じ

(2) 例の(その3)において, $ad=S_1$, $bc=S_2$ とかきなおせばよい (座標をとっても、同じようなことです.)

高 高校生用 設問(3) このような平行四辺形ABCDの面積Tの最小値$T_0$を求めよ. ($\triangle PCA$は不用)

(3) 高校生用




(解) 右図のように, a, b, c, d とする. $ad=S_1$, $bc=S_2$, $\therefore d=\frac{S_1}{a}$, $c=\frac{S_2}{b}$

$T=(a+b)(c+d)=(a+b)(\frac{S_2}{b}+\frac{S_1}{a})=\frac{a}{b}S_2+S_1+S_2+\frac{b}{a}S_1=\frac{b}{a}S_1+\frac{a}{b}S_2+S_1+S_2$

相加相乗平均の関係より, $\frac{b}{a}S_1+\frac{a}{b}S_2\geqq 2\sqrt{\frac{b}{a}S_1\cdot\frac{a}{b}S_2}=2\sqrt{S_1S_2}$

等号成立は $\frac{b}{a}S_1=\frac{a}{b}S_2$, $a^2S_2=b^2S_1$, $a\sqrt{S_2}=b\sqrt{S_1}$, $a:b=\sqrt{S_1}:\sqrt{S_2}$ のとき

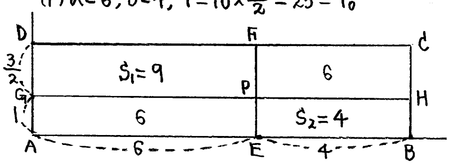
求める最小値 $T_0=S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2}=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$

($U_1U_2=S_1S_2$ も成立しますね. 何故ですか?)

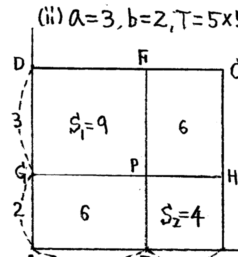
(補) 下図(i), (ii), (iii), 全て $S_1=9$, $S_2=4$ の場合です.

(i), (ii) は, $a:b=\sqrt{S_1}:\sqrt{S_2}=\sqrt{9}:\sqrt{4}=3:2$ です.
どちらも $T=T_0=25$　(iii) は, $a:b=3:4\neq 3:2$, $T=28$

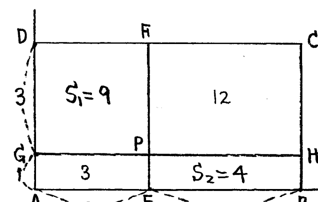
(i) $a=6$, $b=4$, $T=10\times\frac{5}{2}=25=T_0$




(ii) $a=3$, $b=2$, $T=5\times5=25=T_0$




(iii) $a=3$, $b=4$, $T=7\times4=28>T_0=25$



「垂心が1点で交わる」ことの円を用いる証明(鋭角三角形)

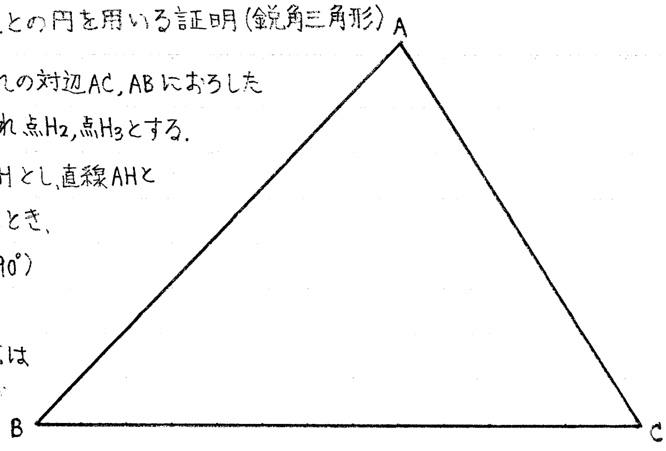
[類]「点B,点Cから,それぞれの対辺AC,ABにおろした垂線のあしをそれぞれ点$H_2$,点$H_3$とする.

$BH_2$と$CH_3$の交点をHとし,直線AHとBCの交点を$H_1$とするとき,

$AH_1 \perp BC$ ($\angle AH_1C = 90^\circ$)

であることを示せ.」

この証明により,垂心は1点で交わることが示される.

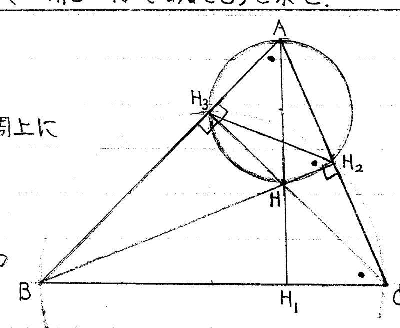


(1) 今,点Bから対辺ACに垂線$BH_2$を,点Cから対辺ABに垂線$BH_3$をおろしたい.BCを直径とする円を描き,辺AC,辺ABとの交点をそれぞれ$H_2$,$H_3$,とすればよい.理由をのべよ.((2)から証明が始まる)

(2) $BH_2$と$CH_3$の交点をHとする.AとH,$H_2$と$H_3$を結べ.4つの点A,$H_3$,H,$H_2$,を通る円が描けることを示し,これを描け.

(3) $\angle H_3AH = \angle H_3H_2H = \angle H_3CB$であることを示せ.

(4) AHを延長し,辺BCとの交点を$H_1$とする.$AH_1$と辺BCは垂直に交わる($\angle AH_1C = 90^\circ$であること)を示せ.



(解) (1) BCが直径だから,円周角の定理により,$\angle BH_3C = \angle BH_2C = 90^\circ$

(2) $\angle AH_3H = \angle AH_2H = 90^\circ$を円周角とみることにより,AHを直径とする円周上に4つの点A,$H_3$,H,$H_2$があることがわかる.

(3) 小さい方の円で,円周角の定理により,劣弧$\overset{\frown}{H_3H}$の上に立つ円周角$\angle H_3AH = \angle H_3H_2H$, 大きい方の円で,同様に劣弧$\overset{\frown}{H_3B}$の上に立つ円周角$\angle H_3H_2B$ $(=\angle H_3H_2H) = \angle H_3CB$

したがって,$\angle H_3AH = \underline{\angle H_3AH_1} = \angle H_3CB = \underline{\angle H_3CH_1}$

(4) $\angle H_3AH_1 = \angle H_3CH_1$を劣弧$\overset{\frown}{H_3H_1}$の上に立つ円周角と見ることにより,4つの点$H_3$,$H_1$,C,Aが同一円周上にあることがわかり,弧$\overset{\frown}{AC}$の上に立つ円周角$\angle AH_3C = \angle AH_1C = 90^\circ$である.この円が,ACを直径とする円であることもわかる.

したがって垂心が1点で交わることが示された.

(補) かいてあるような鋭角三角形でなく,鈍角三角形の場合はどうなるか.かいてみて下さい.垂心を一般化すると,「点B,点Cから,それぞれの対辺に垂直な直線,それぞれ$l_1$,$l_2$をひき,$l_1$と$l_2$の交点をH(垂心)とする.直線AHも,直線BCと垂直に交わる.」平面vectorを用いる証明が,Bestですが,上のように,平面幾何(特に円)がわかっていないと,図形と方程式,三角,vector,ガウス平面のジャンルでのさまざまな設問に苦労することになります.円に関する設問は,特に大切です.

---

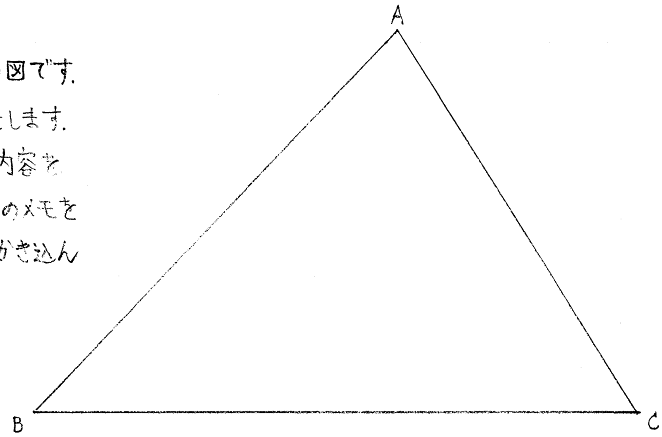
問. $2^{48}$と$3^{32}$の大,小を理由をつけて答えよ.

(カイ) $2^{48} - 3^{32} = (2^{24})^2 - (3^{16})^2 = (2^{24}+3^{16})(2^{24}-3^{16}) = (2^{24}+3^{16})((2^{12})^2-(3^8)^2) = (2^{24}+3^{16})(2^{12}+3^8)(2^{12}-3^8)$

$= (2^{24}+3^{16})(2^{12}+3^8)((2^6)^2-(3^4)^2) = (2^{24}+3^{16})(2^{12}+3^8)(2^6+3^4)(2^6-3^4) = (2^{24}+3^{16})(2^{12}+3^8)(2^6+3^4)((2^3)^2-(3^2)^2)$

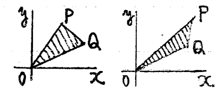
$= \underline{(2^{24}+3^{16})(2^{12}+3^8)(2^6+3^4)(2^3+3^2)}(2^3-3^2) < 0$ (∵下線部は正 $2^3-3^2 = 8-9 = -1 < 0$) $\therefore \underline{2^{48} < 3^{32}}$

前頁の説明をするための図です。
一定のところまで説明をします。
それまでは、下に説明の内容を
理解するための自分なりのメモを
とって下さい。決して図をかき込ん
ではいけません。

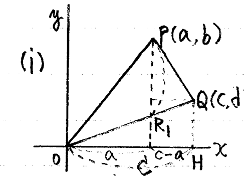


三角形の面積（$S=\frac{1}{2}|ad-bc|$ の中学生版）

［類3］高校では、$A(a,b)$，$B(c,d)$ のとき $\triangle OAB$ の面積 $S=\frac{1}{2}|ad-bc|$ のように、絶対値のついた公式として、利用する。
ここでは、これを中学生版として、次の設問とする。
（設問）第Ⅰ象限にある $\triangle POQ$（$P(a,b)$，$Q(c,d)$，$\angle POx > \angle QOx$ とする）の面積 $S=\frac{1}{2}(bc-ad)$ であることを、
証明せよ。これには、絶対値はつきません。第Ⅰ象限とは、$x>0$，$y>0$ の領域です。




（解）(i) 点 $P(a,b)$ を通る $x$ 軸に垂直な直線 $x=a$ と線分 $OQ$ が点 $R_1$ で交わる場合（$0<a\leqq c$）
線分 $OQ$ の式は、$y=\frac{d}{c}x$ だから、$x=a$ のとき $y=\frac{ad}{c}$　$\therefore R_1\left(a,\frac{ad}{c}\right)$　$PR_1=b-\frac{ad}{c}$
したがって、$\triangle POQ=\frac{PR_1\times c}{2}=\frac{1}{2}\left(b-\frac{ad}{c}\right)\times c=\frac{1}{2}(bc-ad)\ (=S)$

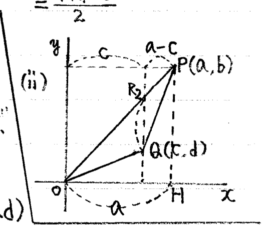



(ii) 点 $Q(c,d)$ を通る $x$ 軸に垂直な直線 $x=c$ と線分 $OP$ が点 $R_2$ で交わる場合（$0<c\leqq a$）
線分 $OP$ の式は、$y=\frac{b}{a}x$ だから $x=c$ のとき $y=\frac{bc}{a}$　$\therefore R_2=\left(c,\frac{bc}{a}\right)$　$R_2Q=\frac{bc}{a}-d$
したがって $\triangle POQ=\frac{R_2Q\times a}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}-d\right)\times a=\frac{1}{2}(bc-ad)\ (=S)$
(i)，(ii) いずれの場合も、$S=\frac{1}{2}(bc-ad)$（$a=c$ のときは、(i)，(ii) どちらでもOK）

$\triangle POQ=\triangle PR_1O+\triangle PR_1Q$
$=\frac{PR_1\times a}{2}+\frac{PR_1\times(c-a)}{2}$
$=\frac{PR_1\times c}{2}$

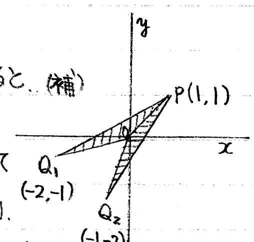
（補）一般には、長方形 or 台形から余分な三角形をひいて求めます。これを用いると、次のように
3つの場合分けが必要となり、計算も面倒そうです。(i)　(ii)　(iii)

長方形から三角形をひくというのが、基本の求め方であり、これに基ずいて、台形などを考えるのが、
本筋の考え方です。(i) の場合（$0<a\leqq c$ and $0<d\leqq b$）$\triangle POQ=$ 台形 $-$ 三角形 $-$ 三角形 でやると、
$=\frac{1}{2}(c+(c-a))b-\frac{1}{2}(b-d)(c-a)-\frac{1}{2}cd=\frac{1}{2}(2bc-ab-(bc-ab-cd+ad)-cd)=\frac{1}{2}(bc-ad)$

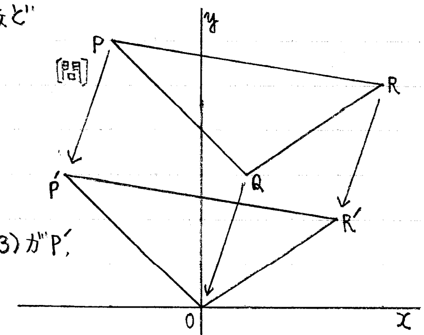



(i) の場合を $\triangle POQ=$ 長方形 $-$ 3つの三角形でやってみると、$\triangle POQ=bc-\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}cd-\frac{1}{2}(b-d)(c-a)$
$=bc-\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}cd-\frac{1}{2}(bc-ab-cd+ad)=\frac{1}{2}bc-\frac{1}{2}ad=\frac{1}{2}(bc-ad)$ となり、台形を利用するより、easyでした。
(ii)，(iii) も皆さん、やってみて下さい。注意深さの習得と計算練習になるでしょう。（解）は、$\triangle POQ$ の面積を直接考えて
いることになります。等積変形を考えていることに、ほかなりません。

（補）例えば、右図のような、$\triangle OPQ_1$ と $\triangle OPQ_2$ を考えます。絶対値のついた公式 $S=\frac{1}{2}|ad-bc|$ を用いると、
$\triangle OPQ_1=\frac{1}{2}|(-2)\cdot1-(-1)\cdot1|=\frac{1}{2}|-1|=\frac{1}{2}$　でもよいし、$\triangle OPQ_1=\frac{1}{2}|1\cdot(-1)-1\cdot(-2)|=\frac{1}{2}|1|=\frac{1}{2}$
でもよいということです。しかしながら、$\triangle OPQ_1$ を原点 $O$ の回りに左回り（時計と反対回り）に考えて
線分 $OQ_1$ を先行させ、$Q_1(a,b)$，$P(c,d)$ とすると、$S=\frac{1}{2}(bc-ad)=\frac{1}{2}\{(-1)\cdot1-(-2)\cdot1\}=\frac{1}{2}$ となり、
絶対値をつける必要がなくなります。$\triangle OPQ_2$ については、線分 $OP$ を先行させて、$P(a,b)$，$Q_2(c,d)$
と考えて、$\triangle OPQ_2=\frac{1}{2}\{1\cdot(-1)-1\cdot(-2)\}=\frac{1}{2}$ です。絶対値をつけなくても、必ず正になります。高校課程では、
図形と方程式、3角関数、vector、極座標などで、回転を用いて証明するなど
重要な事項となります。




［問］$P(-2,6)$，$Q(1,3)$，$R(4,5)$ のとき、$\triangle PQR$ の面積を求めよ。




（カイ）$\triangle PQR$ を点 $Q$ が原点 $O$ にくるように、平行移動し、$\triangle P'OR'$ とする。（右図）
$Q$ について、$(1,3)-(1,3)=(0,0)$ なので　$P$ について　$(-2,6)-(1,3)=(-3,3)$ が $P'$，
$R$ について $(4,5)-(1,3)=(3,2)$ が $R'$，よって上（補）を利用すると、
$\triangle PQR=\triangle P'OR'=\frac{1}{2}(3\times3-(-3)\times2)=\frac{1}{2}(9+6)=\underline{\frac{15}{2}}$

注、高校では、$\overrightarrow{QP}=(-2,6)-(1,3)=(-3,3)=\overrightarrow{OP'}$，$\overrightarrow{QR}=(4,5)-(1,3)=(3,2)=\overrightarrow{OR'}$ とかきます。

## 放物線と三角形の面積

この設問は(解)を得ることだけを目的としません.さまざまな内容をgrasp!この様な勉強の仕方が,成績UPにつながります.

[類-1] 原点Oを頂点とする放物線C上に点A(-3,図),点B(6,12)がある. (1)放物線Cの式と点Aのy座標図を求めよ.
(2)直線ABの式を求めよ. (3)△AOBの面積を求めよ. (4)直線$x=k_1$で△AOBの面積を2等分するとき,$k_1$の値を求めよ. (5)直線$y=k_2$で△AOBの面積を2等分するとき,$k_2$の値を求めよ. (6)原点Oを通る直線$l_1$で△AOBの面積を2等分するとき,直線$l_1$の式を求めよ. (7)放物線C上にある点Bと異なる点Pのとき,△AOBの面積が,△AOPの面積と等しくなるC上の点Pの座標を求めよ.(8)△AOQの面積が△AOBの面積の2倍となる放物線C上の点Qの座標を全て求めよ. (9)点A,点O,点B ともう1つの点が平行四辺形となるとき,もう1つの点を全て求めよ.
(10)点E(6,0)をとり,点Eと点Bの中点をMとする.点Mを通り,四角形AOEBの面積を2等分する直線$l_2$の式を求めよ.

2次関数未修の人は,点A(-3,3)として,(1),(7),(8)以外を解いて下さい.(解)(1),(2),(3)は,P.15の(7),(解)(4)~(10)は,P.15の(12)(13).

(考)点A(-3,3)が求まれば,(7),(8)以外は,放物線(2次関数)が絡まないので,1次関数の問題です.様々な問題ができるようになります.解法は,1つだけではありません.なるべく多くの解法にtry! 理解できれば,高校内容でも------
次のことは,是非とも理解して欲しい内容です.等積変形,図形の性質なども,うまく利用することが大切です.

例1 点A(-2,3),点B(3,-4)のとき,直線ABの式

直線$y=ax+b$の形(異なる2点のx座標が一致するとき,傾きは存在せず,直線$x=k$(定数)の形になる.)では,傾きと1つの定点を利用して,連立方程式を用いなくても求まります.

- $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$のとき (i) $x_1 \neq x_2$ ならば 傾き$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$,定点として$A(x_1,y_1)$とすると $y=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)+y_1$
(これは,必ず,点$B(x_2,y_2)$も通ります.定点として$B(x_2,y_2)$を用いることもできます.) (ii) $x_1=x_2$ ならば $x=x_1$

(カイ) 傾きは,$\frac{3-(-4)}{(-2)-3}=\frac{7}{-5}=-\frac{7}{5}$ $y=-\frac{7}{5}(x-3)-4=-\frac{7}{5}x+\frac{21}{5}-4=-\frac{7}{5}x+\frac{1}{5}$

例2 点$A(x_1,y_1)$,点$B(x_2,y_2)$の中点$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

例3 直線$l_1$:$y=-\frac{3}{2}x+1$に垂直な,点$A(-\frac{3}{2},-2)$を通る直線$l_2$の式及び$l_1$と$l_2$の交点Hの座標

直線$y=m_1x+n_1$と直線$y=m_2x+n_2$が垂直に交わるとき $m_1 \times m_2=-1$ ($n_1$,$n_2$には関係ありません.)

(カイ) 求める直線$l_2$の傾きを$m$とすると,$l_1$と$l_2$は垂直に交わるから($l_1$の傾き$-\frac{3}{2}$である) $(-\frac{3}{2})\times m=-1$
$-\frac{3m}{2}=-1$ $\frac{3m}{2}=1$ $3m=2$ $m=\frac{2}{3}$ ($l_1$の逆数に符号マイナスをつけたもの). $l_2$はA$(-\frac{3}{2},-2)$を通るから
$l_2$:$y=\frac{2}{3}(x-(-\frac{3}{2}))-2=\frac{2}{3}x-1$ 交点Hの座標は,$l_1$と$l_2$を連立して解く $-\frac{3}{2}x+1=\frac{2}{3}x-1$ $2=\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}x$
$12=4x+9x$ $12=13x$ $x=\frac{12}{13}$ $y=\frac{2}{3}\times\frac{12}{13}-1=\frac{8}{13}-1=-\frac{5}{13}$ ∴H$(\frac{12}{13},-\frac{5}{13})$

例4 $|x-1|=|2x+3|$を解け.(数には,虚数※というものもありますが,今は,全て実数として捉えます.)

- $|A|=|B| \Leftrightarrow A=B$ or $A=-B$ ($B=A$ or $B=-A$も同じこと,$A=\pm B$とかきます.)
- $|A|=B$ のときは,$B<0$ならば Aそのものが存在しません. $B\geqq 0$のとき $A=B$ or $A=-B$です.一般に $|A|=B$とあるとき $B\geqq 0$を前提とします.例えば $|x|=-1$のとき$x$は解なし $|x|=1$のとき $x=1$ or $x=-1$ (これを$x=\pm 1$とかく)
高校では,'場合分け'という重要なことを習います.それは,さておき,上の事実を有難ぁ~く頂戴することとします.
- $\sqrt{A^2}=|A|$ ついでに,例えば $|1-x|=|-(x-1)|=|(-1)\times(x-1)|=|-1|\times|x-1|=1\times|x-1|=|x-1|$
$\sqrt{(2-t)^2}=3$ のとき $|2-t|=3 \Leftrightarrow |t-2|=3 \Leftrightarrow t-2=3$ or $t-2=-3 \Leftrightarrow t=5$ or $t=-1$

(カイ) $x-1=2x+3$ or $x-1=-(2x+3)=-2x-3 \Leftrightarrow -4=x$ or $3x=-2 \Leftrightarrow x=-4$ or $x=-\frac{2}{3}$

※虚数とは根号(ルート)の中が負の数のことです. $\sqrt{-1}=i$と定義し,例えば$\sqrt{-3}=\sqrt{3\times(-1)}=\sqrt{3}\times\sqrt{-1}=\sqrt{3}i$です.
虚数に,大小関係はありません.($2i>3i$,$2i<3i$ということはない) 不等式がある場合実数のみを取扱う.

背理法など

(例15) $x^2=1$ をとけば、$x=1$ または $x=-1$ これを $x=\pm1$ とかく。$x^2=4$ をとけば $x=2$ または $x=-2$ $x=\pm2$
$x^2=2$ をとけば、$x=1.414\cdots\cdots$ または $x=-1.414\cdots\cdots$ であり、いつまでも続く数で分数にすることができません。
そこで、$1.414\cdots=\sqrt{2}$（ルート2）とかくことにしました。$x^2=2$ の解は $x=\pm\sqrt{2}=\pm1.414\cdots$ です。$(\pm\sqrt{2})^2=2$
$x^2=3$ の解は、$x=\pm\sqrt{3}$　$x^2=5$ の解は、$x=\pm\sqrt{5}=\pm2.236\cdots$　$x^2=6$ の解は $x=\pm\sqrt{6}=\pm\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\pm2.44949\cdots$
$x^2=7$ の解は $x=\pm\sqrt{7}=\pm2.64575\cdots$　$x^2=8$ の解は $x=\pm\sqrt{8}=\pm\sqrt{2^2\times2}=\pm\sqrt{2^2}\times\sqrt{2}=\pm2\sqrt{2}=\pm2.282\cdots$
$x^2=12$ の解は $x=\pm\sqrt{12}=\pm\sqrt{2^2\times3}=\pm\sqrt{2^2}\times\sqrt{3}=\pm2\sqrt{3}$，$x^2=\frac{1}{2}$ の解は $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
$(\sqrt{2})^2=\sqrt{2^2}$，$x^2=2028$ の解は $x=\pm\sqrt{2028}=\pm\sqrt{3\times2^2\times13^2}=\pm\sqrt{3\times(2\times13)^2}=\pm\sqrt{26^2\times3}=\pm26\sqrt{3}$ 先にP.15の(7)下へ

---

$-\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\pi\cdots$ など、いつまでも続く数で、分数にできない数を無理数といいます。$0.333\cdots=0.\dot{3}=\frac{1}{3}$ ですから無理数でなく有理数です。高校で習うことになりますが、次の事は、知識程度に留めておいて下さい。
ルート（$\sqrt{\ }$，根号）の中が負のときもあります。$x^2=-1$ の解は、$x=\pm\sqrt{-1}=\pm i$ とかきます。$\sqrt{-1}=i$ です。これを虚数といいます。$x^2=-2$ の解は、$x=\pm\sqrt{-2}=\pm\sqrt{2\times(-1)}=\pm\sqrt{2}\times\sqrt{-1}=\pm\sqrt{2}i$　$x^2=-12$ の解は、$x=\pm\sqrt{-12}=\pm\sqrt{12}i=\pm2\sqrt{3}i$
全ての数（複素数）は、実数と虚数（$i$ が入っている数）があるということです。実数は、有理数と無理数があります。
有理数は、整数と分数（分数にできる小数も含まれる）がある。更に、整数は、正の整数（自然数）と0と負の整数の3種類がある。ここで、有名な証明方法を1つ覚えてもらいます。背理法といいます。高校では、重要です。数学の規則の概念（定義、定理など）がわかっていないと証明できません。$\sqrt{2}$ が無理数の証明は教科書。

- 「2，3，4の長さで、三角形ができることを示し、この三角形は、直角三角形でないことを証明せよ。」詳しくします。

(カイ) $a$，$b$，$c$ で3角形ができるためには、$a>0$，$b>0$，$c>0$，$|a-b|<c<a+b$（どの数が、中央でもOK）
最大辺が $a$ とわかっているときには、$a>0$，$b>0$，$c>0$，$a<b+c$ でよい
2，3，4 は全て正であり、最大が4である。$4<2+3$ が成立するから、三角形ができる。
三角形の分け方の1つには、「直角三角形である」かまたは「直角三角形でない」がある。
(その1) 直角三角形では、斜辺が最大であり、三平方の定理（斜辺の2乗は、他の2辺のそれぞれの平方の和に等しい）が成り立つ。2，3，4 で、できる三角形が、直角三角形であるとする。$4^2=2^2+3^2$ が成立する。
左辺 $4^2=16$，右辺 $=2^2+3^2=13$ であるから、不合理である。これは、2，3，4で、できる三角形が、直角三角形であるとしたことから、導き出された矛盾である。よって背理法により、示された。
(補) 実際には、このような（その1）はしません。（その2）です。
(その2) 最大辺4の平方 $4^2=16$，他の二辺のそれぞれの平方の和 $=2^2+3^2=13$ であるから、三平方の定理は、成り立たない。$(4^2\neq2^2+3^2)$ よって、直角三角形でない。

- 「三角形の3つの内角のうち少なくとも1つは60°以上であることを証明せよ。」

3角形の3つの内角をそれぞれ $a°$，$b°$，$c°$ とすると、$a°+b°+c°=180°$，60°の大きさで分けると、次の4つの場合があります。(i) 全ての角が60°より小さい (ii) 2つの角が60°より小さい かつ 残りの1つの角が60°以上
(iii) 1つの角が60°より小さい かつ 残り2つの角が60°以上 (iv) 全ての角が60°以上
少なくとも1つが60°以上とは、(ii) または (iii) または (iv) の場合です。(i) とすると、不合理であることを示せばよいということになります。(iv) 全ての角が60°以上とは（$a°=60°$ または $a°>60°$）かつ（$b°=60°$ または $b°>60°$）かつ（$c°=60°$ または $c°>60°$）ということですから、このときは $a°+b°+c°=180°$ から $a°=b°=c°=60°$ のときと全く同じことになります。
(カイ) 3つの内角全てが60°より小さいとすると、3つの内角の和は180°より小さいとなる。これは、三角形の内角の和が、丁度180°であることに矛盾する。したがって背理法により題意がいえる。

（・「$\sqrt{2}$ は無理数である」の証明は、背理法では有名ですが、あえてかきませんでした。）

(カイ.2) $0^\circ < a^\circ \leqq b^\circ \leqq c^\circ < 180^\circ$ と仮定しても一般性は失われない.(最大角$c^\circ$は他の2角より大きいかまたは等しい)
$c^\circ \geqq a^\circ$ かつ $c^\circ \geqq b^\circ$ かつ $c^\circ \geqq c^\circ$ であるから辺々たせば $3c^\circ \geqq a^\circ + b^\circ + c^\circ = 180^\circ$ ∴ $c^\circ \geqq 60^\circ$ すなわち、最大角は、必ず$60^\circ$以上であることが示された。よって、題意が成り立つ.

- 「$x, y$が実数, $x^2+y^2=0$ ならば, $x=y=0$ であることを証明せよ.」
$x=y=0 \Leftrightarrow x=0$ かつ $y=0$, $A$が実数ならば $A^2 \geqq 0$, $B$が虚数ならば、例えば、$B=\sqrt{-2}=\sqrt{2}i$ のとき $B^2=-2<0$ となります。背理法を用いると、用いることができる数式が1つふえます.
(カイ.1) $x$は実数であるから, $x^2 \geqq 0$, $x \neq 0$ とすると $x^2>0$, $x^2+y^2=0$ より $y^2=-x^2<0$ となる. ところが、$y$は実数であるから. $y^2 \geqq 0$ でなければならない. これは、$x \neq 0$ としたことから導き出された矛盾である.
よって(背理法により) $x=0$ このとき $x^2+y^2=0$ に $x=0$ を代入して $y=0$ すなわち $x=y=0$
(カイ2) $x, y$ は実数だから、$x^2 \geqq 0$ かつ $y^2 \geqq 0 \Leftrightarrow (x^2>0$ かつ $y^2>0)$ または $(x^2>0$ かつ $y^2=0)$ または $(x^2=0$ かつ $y^2>0)$ または $(x^2=0$ かつ $y^2=0)$ この4つの場合のうち $x^2+y^2=0$ をみたすのは, $(x^2=0$ かつ $y^2=0)$ の場合に限られる. ∴ $x=0$ かつ $y=0$ ∴ $x=y=0$

- 「$a, b$が有理数, $\sqrt{c}$が無理数または虚数とする. $a+b\sqrt{c}=0$ ならば, $a=b=0$ であることを証明せよ」
(カイ) $b \neq 0$ とすると $a+b\sqrt{c}=0$ $b\sqrt{c}=-a$ $\sqrt{c}=-\frac{a}{b}$ 左辺$\sqrt{c}$は無理数または虚数であるが、右辺$-\frac{a}{b}$は、$a, b$が有理数だから有理数となり不合理. $b \neq 0$ としたことから出た矛盾. よって $b=0$ $a+b\sqrt{c}=0$ に $b=0$ を代入して $a=0$ すなわち $a=b=0$

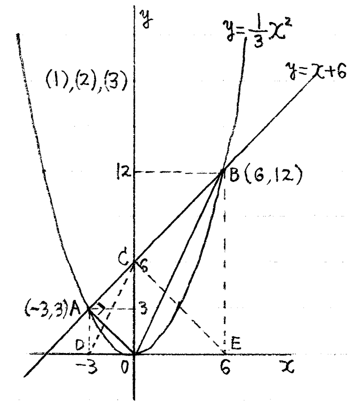
- 「(1) $x$が奇数ならば, $x^2$は奇数であることを証明せよ (2) $x^2$が奇数ならば, $x$が奇数であるは真か偽か.
(正しいことを真(シン), 正しくないことを偽(ギ)という). 真ならば、それを証明し、偽ならば、どのような条件を加えれば、真となるかを示し、それを証明せよ. (3) $a, b, c$が整数, $a^2+b^2=c^2$ のとき, $a, b, c$ のうち少なくとも1つは偶数であることを証明せよ」
(カイ) (1) $x=2n+1$, $n$は整数 とおける. $x^2=(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4(n^2+n)+1$ $n^2+n$※は整数であり、これに偶数4をかけた $4(n^2+n)$ は偶数 したがって これに1をたした $x^2=4(n^2+n)+1$ は奇数である.
(2) $x=\sqrt{3}$ を入れると $x^2=3$ となり奇数であるが $x=\sqrt{3}$ は奇数ではない($x$は無理数) よって偽である.
条件 $x$は整数 を加えて,「$x$が整数, $x^2$が奇数ならば $x$は奇数であることを証明せよ」とする.
証明: $x$が整数, $x^2$が奇数のとき $x$が偶数であるとする. $x$が偶数だから$x^2$は偶数であるが、これは、条件$x^2$が奇数に反する. よって背理法により, $x$は奇数である.
(3) $a, b, c$が整数, $a^2+b^2=c^2$ のとき $a, b, c$ 全てが奇数であるとする. (1)により, $a^2, b^2, c^2$ 全て奇数である.
左辺 $a^2+b^2$ は 奇数+奇数=偶数 であるが、右辺 $c^2$ は奇数であるから、偶数=奇数となって不合理.
よって背理法により「$a, b, c$ 全てが奇数である」は、間違いであることがわかった. 証明できた.
※ $n^2+n=n(n+1)$ は、連続する2つの整数だから, $n, n+1$ のいずれか一方は必ず偶数(他方は奇数) したがって、積$n(n+1)$は必ず偶数であり、4をかけてなくても1をたしたら奇数となります. 詳しくすると、
$x^2=4(n^2+n)+1=4n(n+1)+1$ は $n(n+1)$は2の倍数(偶数), $4n(n+1)$は8の倍数、ですから、
$x$が奇数のとき$x^2$を8でわると必ず余りが1になるということです.

無理数が現れる(解)を今から、しますので、少しだけ√‾(ルート)についてかいてからと思いましたが、教科書に、無理数であることの証明らしきものがありました(背理法)ので、まとめてみました. [類4]の(解)を得るために、この頁及び、前頁の後半は、必要ありません.「$\sqrt{2}$が無理数である」ことの証明は、教科書、参考書、全てに載っています.

定三角定規のまとめ(下の方)

(解) (1) $C: y=ax^2$ とおく. $B(6,12)$ が $C$ 上にあるから $12=a\times6^2=36a$, $a=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$ ∴ $C: \underline{y=\frac{1}{3}x^2}$

$A(-3,\boxed{ア})$ は $C$ 上にあるから $\boxed{ア}=\frac{1}{3}\times(-3)^2=\underline{3}$ ∴ $A(-3,3)$




(2) $\underline{y}=\frac{12-3}{6-(-3)}(x-6)+12=\frac{9}{9}(x-6)+12=\underline{x+6}$

(3) (カイ1) 右図、等積変形により、$\triangle AOB=\triangle CDE=\frac{1}{2}\times DE\times OC=\frac{1}{2}\times9\times6=\underline{27}$

(カイ2) $\triangle AOB=$ 台形$ADEB-\triangle AOD-\triangle BOE=\frac{(3+12)\times9}{2}-\frac{3\times3}{2}-\frac{6\times12}{2}=\underline{27}$

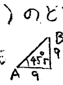
(カイ3) OAの傾きは$-1$ ($OA: y=-x$), ABの傾きは1 ($AB: y=x+6$) なので

$OA\perp AB$ 　$AB=\sqrt{(-3-6)^2+(3-12)^2}\overset{※}{=}\sqrt{9^2+9^2}=\sqrt{2\cdot9^2}=9\sqrt{2}$

$OA=3\sqrt{2}$ (∵ $\triangle AOD$ は $45°,45°,90°$ の定三角定規 $1:1:\sqrt{2}$, $AD=OD=3$)

よって $\triangle AOB=\frac{1}{2}\times OA\times AB=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times9\sqrt{2}=\underline{27}$

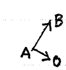
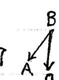
(補) ※ $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ のとき $\underline{AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}$ (3平方の定理) 　$(x_1-x_2)^2=(x_2-x_1)^2$, $(y_1-y_2)^2=(y_2-y_1)^2$

公式を使わなくても  ですから $AB=9\sqrt{2}$ です. 2点間の距離の公式を覚えて下さい.

(カイ4) (高校内容. P.15の(3)参照) 知っていると便利です. 暗記するならば、確実に暗記する.

$\overrightarrow{OA}=(-3,3)$, $\overrightarrow{OB}=(6,12)$ 　$\triangle AOB=\frac{1}{2}|3\times6-(-3)\times12|=\frac{1}{2}|18+36|=\frac{1}{2}\times54=27$ $\left(\frac{1}{2}|(-3)\times12-3\times6|=\frac{1}{2}\times|-54|=27\right)$

(補) 次のようにもできます. $O(0,0)$, $A(-3,3)$, $B(6,12)$

- $\overrightarrow{AO}=(0-(-3),0-3)=(3,-3)$, $\overrightarrow{AB}=(6-(-3),12-3)=(9,9)$ 　$\triangle AOB=\frac{1}{2}|9\times3-9\times(-3)|=27$ 
- $\overrightarrow{BA}=((-3)-6,3-12)=(-9,-9)$, $\overrightarrow{BO}=(0-6,0-12)=(-6,-12)$ 　$\triangle AOB=\frac{1}{2}|(-12)\times(-9)-(-6)\times(-9)|=\frac{1}{2}\times|54|=27$ 

$(a,b)$, $(c,d)$ のとき $S=\frac{1}{2}|ad-bc|=\frac{1}{2}|bc-ad|$ (上のカイは絶対値の中が正になるように計算しました.)

(補) 高校生で、すぐに(カイ4)をやってしまう人がいます. 難関大入試では、図形を利用する問題がよく出題されます.

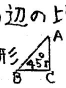
図形を大切にして下さい.(vector, 3角では、特に円絡みの図形が大切です) いろいろと解法は、知っているが、

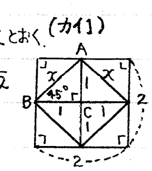
(カイ4)を用いて、計算だけで解をすすめる方が、easyなとき用います. 中学生には、recommendationしません.

---

(解)(4)の前に定三角定規についてまとめます. (先に必ず、P.15の(9)波線部下の条件分析を理解する.) 解(4)はP.15の(12)

[I] $45°,45°,90°$ の直角二等辺三角形の辺の比は、$1:1:\sqrt{2}$ であることを証明せよ

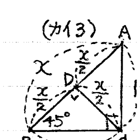
(カイ1) $45°,45°,90°$ の直角二等辺三角形  は、全て相似だから、$AC=BC=1$ としても一般性は失われない. $AB=x$ とおく.




右図、小さい方の正方形の面積×2 = 大きい方の正方形の面積 だから $x^2\times2=2^2$ $x^2=2$ $x>0$ ∴ $x=\sqrt{2}$

すなわち、$1:1:\sqrt{2}$ がいえた.

(カイ2) ((カイ1)の1行目をかいて) 三平方の定理より、$AB^2=AC^2+BC^2=1^2+1^2=2$ 　$AB>0$ より $AB=\sqrt{2}$ ∴ $1:1:\sqrt{2}$ がいえた.




(カイ3) ((カイ1)の1行目をかいて) 右図、点Cから辺ABに垂線CDをおろす. $\triangle ADC\equiv\triangle BDC$ (一辺2角相等)

($AB=x$ とおく) $AD=BD=CD=\frac{x}{2}$ 　$\triangle ABC$ の面積 $=\frac{1}{2}\times AB\times CD=\frac{1}{2}\times BC\times AC$

$\frac{1}{2}\times x\times\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\times1\times1$ 　$x^2=2$ 　$x>0$ だから $x=\sqrt{2}$ 　すなわち $1:1:\sqrt{2}$ がいえた

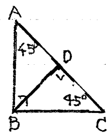
(補) 'ABの中点を点Dとする' から始めても同様なことです. (直角)二等辺三角形の頂角から、底辺へ垂線をおろせば、

底辺を2等分することは、用いてもいいです. (証明せよとあったらダメです. 上では、$\triangle ADC\equiv\triangle BDC$ をかいておきました.)

$\angle C=90°$ だから、辺ABの中点Dを中心とする点A, 点B, 点Cを通る円(外接円, 直径AB)がかける. $AC=BC$ だから

$\angle ADC=\angle BDC=90°$ から始めることもできます. $1:\sqrt{3}:2$ の直角三角形に利用できそうですが------

下図の直角二等辺三角形ABC（$\angle A=\angle C=45^\circ$, $\angle B=90^\circ$）のとき、①〜⑦に答えよ.（$BD\perp AC$とする）




① $AB=BC=1$ のとき $BD=\square$

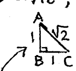
(カイ1) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times AC\times BD=\frac{1}{2}\times AB\times BC$　$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times BD=\frac{1}{2}\times 1\times 1$　$\therefore BD=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(カイ2) $BD=AC\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because AD=CD=BD$)

(カイ3) $AB(=BC):BD=\sqrt{2}:1$　$1:BD=\sqrt{2}:1$　$\sqrt{2}\times BD=1\times 1$　$\therefore BD=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(カイ4) 三平方の定理より $AD^2+BD^2=AB^2$, $AD=BD$　$2\times BD^2=1^2=1$, $BD^2=\frac{1}{2}$, $BD>0$　$\therefore BD=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

② $AB=BC=2$ のとき $BD=\square$

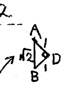


(カイ) $AB=BC=1$ のとき $AC=\sqrt{2}$ だから $AC$は$AB(=BC)$の$\sqrt{2}$倍, この問いでは$AB=BC=2$ だから $AC=2\sqrt{2}$

$BD=AC\times\frac{1}{2}=2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\sqrt{2}$ ($\because AD=CD=BD$)

(カイ) $AB(=BC):BD=\sqrt{2}:1$　$2:BD=\sqrt{2}:1$　$\sqrt{2}\times BD=2\times 1$　$BD=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

③ $AC=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $AB=BC=\boxed{\text{ア}}$　$BD=\boxed{\text{イ}}$



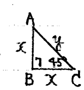
(カイ) $BD=AC\times\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2\times 3}=\frac{\sqrt{3}}{6}=\boxed{\text{イ}}$, $BD=1$のとき $AB(=BD)=\sqrt{2}$ だから$AB$は$BD$の$\sqrt{2}$倍

$\therefore AB=BD\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{6}=\boxed{\text{ア}}$

(カイ) $AB:AC=1:\sqrt{2}$　$\sqrt{2}\times AB=AC=\frac{1}{\sqrt{3}}$　$AB=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}=BC=\boxed{\text{ア}}$

$BD=AC\times\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}=\boxed{\text{イ}}$

④ $AB+AC=2$ のとき $BC=\boxed{x}$, $AC=\boxed{y}$



(カイ1) $AC(=y)$は, $BC=AB(=x)$の$\sqrt{2}$倍 ($BC(=AB):AC=1:\sqrt{2}$)　$y=\sqrt{2}x$ と $x+y=2$ を連立

$x+\sqrt{2}x=2$　$x(1+\sqrt{2})=2$　$x=\frac{2}{\sqrt{2}+1}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$※$=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2})^2-1^2}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{2-1}=2(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}-2$

$y=\sqrt{2}x=\sqrt{2}\times 2(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=2(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}=2\times 2-2\sqrt{2}=4-2\sqrt{2}$

(補)※$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ (公式)　$\boxed{(a+b)}(a-b)=\boxed{(a+b)}a-\boxed{(a+b)}b=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$

ついでに、結果から $AB(=BC):AC=\cancel{2}(\sqrt{2}-1):\cancel{2}(2-\sqrt{2})=(\sqrt{2}-1):(2-\sqrt{2})=\cancel{(\sqrt{2}-1)}:\sqrt{2}\cancel{(\sqrt{2}-1)}=1:\sqrt{2}$

(カイ2) $AB:BC:AC=1:1:\sqrt{2}$ だから $AB(=BC)$は, 全周$(AB+BC+AC)$の $\frac{1}{1+1+\sqrt{2}}$ 倍

$AB(=BC)=(AB+BC+AC)\times\frac{1}{1+1+\sqrt{2}}$, $x=(x+x+y)\times\frac{1}{2+\sqrt{2}}$, $x=(x+2)\times\frac{1}{2+\sqrt{2}}$ ($\because x+y=2$)

$(2+\sqrt{2})x=x+2$　$(2+\sqrt{2})x-x=2$　$(2+\sqrt{2}-1)x=2$　$(\sqrt{2}+1)x=2$　以下(カイ1)に同じ

(カイ3) 三平方の定理より, $AC^2=AB^2+BC^2$　$y^2=x^2+x^2=2x^2=(\sqrt{2}x)^2$　$y=\pm\sqrt{2}x$ であるが $x>0, y>0$ なので

$y=\sqrt{2}x$　以下(カイ1)に同じ　(補) $A^2=B^2 \Leftrightarrow A=\pm B$ or $B=\pm A$

⑤ $AB+BC+AC=2$ のとき $AB=BC=\boxed{x}$, $AC=\boxed{y}$

(カイ) $AB:BC:AC=1:1:\sqrt{2}$ だから $AB(=BC)$は全周$(AB+BC+CA)$の $\frac{1}{1+1+\sqrt{2}}$ 倍

$AB(=BC)=(AB+BC+CA)\times\frac{1}{1+1+\sqrt{2}}$　$x=2\times\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{2(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\frac{2(2-\sqrt{2})}{2^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{2(2-\sqrt{2})}{4-2}=2-\sqrt{2}$

$AC=AB\times\sqrt{2}$　$y=\sqrt{2}x=\sqrt{2}(2-\sqrt{2})=2\sqrt{2}-(\sqrt{2})^2=2\sqrt{2}-2$

(カイ) $y=\sqrt{2}x$ と $2x+y=2$ を連立. $2x+\sqrt{2}x=2$　$(2+\sqrt{2})x=2$　$x=\frac{2}{2+\sqrt{2}}$　以下上(カイ)に同じ

⑥ 直角二等辺三角形の面積が24のとき $AB=BC=\boxed{x}$, $AC=\boxed{y}$

(カイ) $\frac{1}{2}\times AB\times BC=24$　$\frac{x^2}{2}=24$　$x^2=2\times 24=2\times 8\times 3=16\times 3$　$x>0$ だから $x=\sqrt{16\times 3}=\sqrt{4^2\times 3}=4\sqrt{3}$

$AC=AB\times\sqrt{2}=4\sqrt{3}\times\sqrt{2}=4\sqrt{6}=y$

⑦ 直角二等辺三角形の面積が2028のとき　$AB=BC=\boxed{x}$, $AC=\boxed{y}$

(カイ) $\frac{x^2}{2}=2028=4\times 507=4\times 3\times 169=3\times 2^2\times 13^2$　$x^2=2\times 3\times(2\times 13)^2$　$x>0$ だから $x=\sqrt{6\times 26^2}=26\sqrt{6}$

$y=\sqrt{2}x=\sqrt{2}\times 26\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}=2\times 26\times\sqrt{3}=52\sqrt{3}$

(補)ついでに $2028=2^2\times 3\times 13^2$ の約数の個数は $(3\times 2\times 3)\times 2=4\times 9=36$個

[Ⅱ] $\angle A=30^\circ$, $\angle B=60^\circ$, $\angle C=90^\circ$ の直角三角形の辺の比は、$BC:AC:AB=1:\sqrt{3}:2$ であることを証明せよ

(カイ1) 全て相似な三角形なので、$BC=1$ としても一般性は失われない

$\angle BCD=60^\circ$ となる点Dを辺AB上にとる。$\triangle DBC$ は、正三角形となる。$\therefore BD=CD=BC=1$ ---①

$\triangle ACD$ は底角が $30^\circ$ である二等辺三角形だから、$CD=AD$ ---②

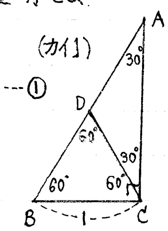
①,②より $AD=BD=BC=1$ よって $AB=AD+BD=1+1=2$

三平方の定理より、$AC^2=AB^2-BC^2=2^2-1^2=3$ $AC>0$ だから $AC=\sqrt{3}$

よって $BC:AC:AB=1:\sqrt{3}:2$ が示された

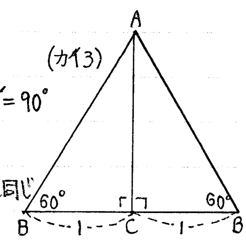
(別カイ)(AB=2を求めるまでは同じ) 中線定理を用いると $AC^2+BC^2=2(AD^2+CD^2)$

$AC^2+1^2=2(1^2+1^2)=4$ $AC^2=3$ $AC>0$ だから $AC=\sqrt{3}$




(カイ2) ((カイ1)の1行目をかいて) $\angle C=90^\circ$ なので、円の性質により、ABの中点Dを中心とし、ABを直径とする、点Cを通る円がかける。($\triangle ABC$ の外接円という) よって $AD=CD=BD$, $\triangle DBC$ は、$BD=CD$ の二等辺三角形であり、$\angle B=60^\circ$ から、正三角形DBCとなる。よって $AB=AD+BD=BC+BC=1+1=2$ 以下(カイ1)に同じ。

(カイ3) ((カイ1)の1行目をかいて) 右図、ACを軸にして線対称な直角三角形AB'Cをかく。($\triangle ABC$ をACを軸にして折り曲げた $\triangle AB'C$ をかく) $\triangle ABC\equiv\triangle AB'C$, $\angle ACB=\angle ACB'=90^\circ$ だから、点B,点C,点B'は一直線上にある。$BC=B'C=1$ より $BB'=2$, $AB=AB'$ と $\angle ABC=\angle AB'C=60^\circ$ より $\triangle ABB'$ は正三角形。よって $AB=BB'(=AB')=2$ 以下(カイ1)に同じ




---

ここで(カイ4)をする前に、[Ⅰ],[Ⅱ]の証明をどのように捉えていくのかをかいておきます。(カイ)を見て、単に納得するだけでは、他の証明問題に活かされません。まず、条件分析から始めます。

[Ⅰ]について、直角二等辺三角形とかいてありますが、単に3つの角が45°,45°,90°の三角形とかいてあっても同じことです。

証明するのに $\triangle ABC$ を自分で設定してかかなければなりません。三角形の大きさも、自分で設定しなければなりません。そこで、1行目をかくことになります。(そうでなければ、$AC=BC=\ell(>0)$ とかいて、ABの長さを求めることになる。)

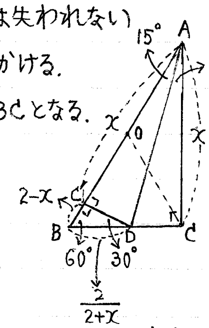
この場合 ① $\triangle ABC$ は直角三角形、② $\triangle ABC$ は、底角が等しいから二等辺三角形 ①,②をみたすものとして $AC=BC=1$ $\angle C=90^\circ$ を設定したということです。$AC=BC=1$ は②の条件をみたしていますので、次に①の条件を用いて、三平方の定理に持ち込んだということです。(カイ3)で、$\triangle ADC\equiv\triangle BDC$ なので $AD=BD=CD=\frac{x}{2}$ がいえたので、中線定理(Black Vol.Ⅰ,P.61)を用いても、$AC(=x)$ は求まります。

[Ⅱ]について、① $\triangle ABC$ は直角三角形 ②直角三角形ABCの直角でない角について、$\angle A=30^\circ$, $\angle B=60^\circ$ は、決まっている。

②の条件を分析した結果として、(カイ1)(カイ2)(カイ3)のように、まず、$AB=2$ が確定し、①の条件に三平方の定理または、中線定理を用いて、$AC=\sqrt{3}$ を求めたということです。②の条件をもう少し分析すると、30°,60°の関係は $30^\circ\times2=60^\circ$ (あるいは、$60^\circ\div2=30^\circ$) から、$\angle B=60^\circ$ の角の二等分線をひくと、どうなるだろうということになります。するとさまざまなことが見えてきます。これを、更に分析していくと、三平方の定理を用いなくても、$AC=\sqrt{3}$ が求まります。中1,中2,中3(1学期まで?)、のときに、できるだけ、沢山の(解)を考えて、定理,数式、の用い方に慣れ、暗記するものは暗記する(特に、図形では多いです)姿勢が、君の計算力,数学力を高めます。

それでは、(カイ4)は、どのようになるでしょうか。上述のことをヒントにして、考えてみて下さい。次頁を見ないで考えること。

(カイ4) $\angle A=30^\circ, \angle B=60^\circ, \angle C=90^\circ$ の直角三角形は全て相似なので $BC=1$ としても一般性は失われない



$\angle C=90^\circ$ なので、円の性質により、ABの中点Oを中心とする、点A、点B、点Cを通る円がかける。

$OB=OC$ より、$\triangle OBC$ は、二等辺三角形であるが、$\angle OBC=\angle OCB=60^\circ$ なので、正三角形OBCとなる。

よって、$BC=OB=OC=OA=1$ ∴ $AB=OA+OB=2$

$\angle A$ の二等分線と辺BCの交点をD、点Dから辺ABへおろした垂線のあしを点C'とする。

直角三角形ADC ≡ 直角三角形ADC'（∵ AD共通、$\angle CAD=\angle C'AD=15^\circ$、$\angle ADC=\angle ADC'=75^\circ$）

$AC=x$ とする。$AC=AC'=x$ だから $BC'=AB-AC'=2-x$ ---①

$\triangle DBC'$ は、$\angle BDC'=30^\circ, \angle DBC'=60^\circ, \angle BC'D=90^\circ$ の直角三角形，直角三角形ABCで、$AB:BC=2:1$ は示されたので

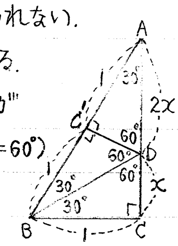
$\triangle ABC \backsim \triangle DBC'$ である直角三角形DBC'にも、これが適用できる。すなわち $BD=2\times BC'$ ---②

角の二等分線の定理より、$AB:AC=BD:CD=2:x$ であり、$BC=1$ であることから $BD=BC\times\frac{2}{2+x}=\frac{2}{2+x}$ ---③

よって、①、②、③より、$\frac{2}{2+x}=2\times(2-x)$　$(2-x)(2+x)=1$　$2^2-x^2=1$　$4-1=x^2$　$x^2=3$　$x>0$ だから $x=\sqrt{3}$

∴求める辺の比は $BC:AC:AB=\underline{1:\sqrt{3}:2}$（始めに、辺の比1:2を出して、それを利用した、ということです。）

(カイ5) $\angle A=30^\circ, \angle B=60^\circ, \angle C=90^\circ$ の直角三角形は、全て相似なので $BC=1$ としても一般性は失われない。



$\angle B(=60^\circ)$ の二等分線と辺ACの交点をD、点Dから辺ABへおろした垂線のあしを点C'とする。

$\triangle BCD$ と $\triangle BC'D$ は、BD共通、$\angle CBD=\angle C'BD(=30^\circ)$、$\angle BDC=\angle BDC'(=60^\circ)$、一辺とその両端の角が

それぞれ等しいので、$\triangle BCD\equiv\triangle BC'D$ ---①　$\triangle BC'D$ と $\triangle AC'D$ は、DC'共通、$\angle BDC'=\angle ADC'(=60^\circ)$

$\angle BC'D=\angle AC'D(=90^\circ)$、一辺とその両端の角がそれぞれ等しいので $\triangle BC'D\equiv\triangle AC'D$ ---②

①、②より、$BC=BC'=AC'=1$　したがって $AB=AC'+BC'=2$。（ここから三平方の定理を用い

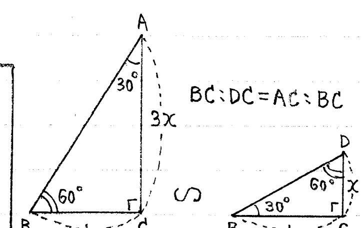
ないで解をすすめます。）$CD=x$ とおけば、角の二等分線の定理より、$BC:AB=CD:AD$　$1:2=x:AD$　∴ $AD=2x$

$\triangle ABC\backsim\triangle BDC$ なので　$BC:DC=AC:BC$　$1:x=3x:1$　$3x^2=1$　$x^2=\frac{1}{3}$　$x>0$　∴ $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$　∴ $AC=3x=3\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

よって $BC:AC:AB=1:\sqrt{3}:2$ が証明できた。

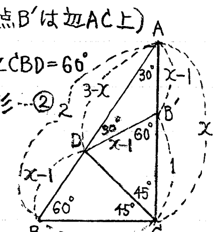
(カイ4)(カイ5)に共通なこと、まず、$AB=2$ を求めて、角の二等分線の利用でした。

もう1つの角の二等分線は、？(カイ4)、(カイ5)、と違うかき方をしてみました。




(カイ6) $AB=2$ を求めるまでは、(カイ4)と同じ、$\angle C$ の二等分線と辺ABの交点をD、

CDを対称の軸として、$\triangle BCD$ を折り曲げた三角形を $\triangle B'CD$（$\angle BCD=\angle ACD=45^\circ$ なので、点B'は辺AC上）



$\triangle BCD\equiv\triangle B'CD$ ---①　$\triangle AB'D$ の外角 $\angle CB'D=\angle DAB'+\angle ADB'=30^\circ+\angle ADB'$、①より、$\angle CB'D=\angle CBD=60^\circ$

なので $60^\circ=30^\circ+\angle ADB'$ ∴ $\angle ADB'=30^\circ=\angle DAB'$ 底角($30^\circ$)が等しいので $\triangle AB'D$ は二等辺三角形 ---②

$AC=x$ とおけば、$AB'=AC-B'C=x-1$（∵ ①より、$BC=B'C=1$）

②、①より、$AB'=B'D=BD=x-1$，$AD=AB-BD=2-(x-1)=3-x$（右図のようになる。）

角の二等分線の定理より、$BC:AC=BD:AD$　$1:x=(x-1):(3-x)$

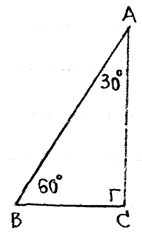
$x(x-1)=3-x$　$x^2-x=3-x$　$x^2=3$　$x>0$ だから $x=\sqrt{3}$　よって $BC:AC:AB=1:\sqrt{3}:2$

(補) $AB'=x$ とおいたらどうなるか、$AC=x+1$，$BD=B'D=AB'=x$，$AD=2-x$　$1:x+1=x:2-x$

$x(x+1)=2-x$　$x^2+x=2-x$　$x^2+2x-2=0$　$x=-1\pm\sqrt{3}$　$x>0$ なので $x=-1+\sqrt{3}=\sqrt{3}-1$

$AC=x+1=(\sqrt{3}-1)+1=\sqrt{3}$，(カイ4)(カイ5)も、軸にして、折り曲げれば、合同は明らかですね。

下図の直角三角形ABC($\angle A=30^\circ, \angle B=60^\circ, \angle C=90^\circ$)のとき①～⑩に答えよ




$AC=BC\times\sqrt{3}$, $AB=BC\times 2$ ですから、まずBCを求めることを考えると、わかりやすいです。

① $BC=2$ のとき $AB=\boxed{\text{ア}}$, $AC=\boxed{\text{イ}}$

(カイ) $AB=BC\times 2=2\times 2=4=\boxed{\text{ア}}$, $AC=BC\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}=\boxed{\text{イ}}$

② $BC=\sqrt{3}$ のとき $AB=\boxed{\text{ア}}$, $AC=\boxed{\text{イ}}$

(カイ) $AB=BC\times 2=2\sqrt{3}=\boxed{\text{ア}}$, $AC=BC\times\sqrt{3}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3=\boxed{\text{イ}}$

③ $AB=3$ のとき $AC=\boxed{\text{ア}}$, $BC=\boxed{\text{イ}}$ (カイ) $AB=BC\times 2$ $3=2\times BC$ $BC=\frac{3}{2}=\boxed{\text{イ}}$ $AC=BC\times\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}=\boxed{\text{ア}}$

④ $AB=\sqrt{2}$ のとき $AC=\boxed{\text{ア}}$, $BC=\boxed{\text{イ}}$ (カイ) $AB=BC\times 2$ $\sqrt{2}=2\times BC$ $BC=\frac{\sqrt{2}}{2}=\boxed{\text{イ}}$ $AC=BC\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{6}}{2}=\boxed{\text{ア}}$

⑤ $AC=2$ のとき $AB=\boxed{\text{ア}}$, $BC=\boxed{\text{イ}}$ (カイ) $AC=BC\times\sqrt{3}$ $2=\sqrt{3}\times BC$ $BC=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}=\boxed{\text{イ}}$ $AB=BC\times 2=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times 2=\frac{4\sqrt{3}}{3}=\boxed{\text{ア}}$

⑥ $AC=\sqrt{2}$ のとき $AB=\boxed{\text{ア}}$, $BC=\boxed{\text{イ}}$ (カイ) $AC=BC\times\sqrt{3}$ $\sqrt{2}=\sqrt{3}\times BC$ $BC=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}=\boxed{\text{イ}}$ $AB=BC\times 2=\frac{\sqrt{6}}{3}\times 2=\frac{2\sqrt{6}}{3}=\boxed{\text{ア}}$

⑦ $AC=\frac{\sqrt{6}}{6}$ のとき $AB=\boxed{\text{ア}}$, $BC=\boxed{\text{イ}}$ (カイ) $AC=BC\times\sqrt{3}$ $\frac{\sqrt{6}}{6}=\sqrt{3}\times BC$ $BC=\frac{\sqrt{6}}{6\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{6}=\boxed{\text{イ}}$, $AB=BC\times 2=\frac{\sqrt{2}}{6}\times 2=\frac{\sqrt{2}}{3}=\boxed{\text{ア}}$

⑧ $AC+BC=2$ のとき $AB=\boxed{\text{ア}}$, $BC=\boxed{\text{イ}}$, $AC=\boxed{\text{ウ}}$ (カイ1) $BC=x$, $AC=\sqrt{3}x$, $\sqrt{3}x+x=2$ $(\sqrt{3}+1)x=2$ $x=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2-1}$

$BC=\sqrt{3}-1=\boxed{\text{イ}}$, $AC=\sqrt{3}x=\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)=3-\sqrt{3}=\boxed{\text{ウ}}$ $AB=2\times BC=2\sqrt{3}-2=\boxed{\text{ア}}$

(カイ.2) $AC:BC=\sqrt{3}:1$ $\therefore AC=(AC+BC)\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=2\times\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=2\times\frac{3-\sqrt{3}}{2}=3-\sqrt{3}=\boxed{\text{ウ}}$ $BC=2-AC=2-(3-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1=\boxed{\text{イ}}$

$AB=2\times BC=2(\sqrt{3}-1)=2\sqrt{3}-2=\boxed{\text{ア}}$

⑨ $AB+BC+AC=2$ のとき $AB=\boxed{\text{ア}}$, $BC=\boxed{\text{イ}}$, $AC=\boxed{\text{ウ}}$ (カイ.1) $BC=(AB+BC+CA)\times\frac{1}{2+1+\sqrt{3}}=2\times\frac{1}{3+\sqrt{3}}=\frac{2(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}$

$=\frac{2(3-\sqrt{3})}{9-3}=\frac{2(3-\sqrt{3})}{6}=\frac{3-\sqrt{3}}{3}=\boxed{\text{イ}}$ $AB=2\times BC=\frac{6-2\sqrt{3}}{3}=\boxed{\text{ア}}$

$AC=BC\times\sqrt{3}=\frac{(3-\sqrt{3})\times\sqrt{3}}{3}=\frac{3\sqrt{3}-3}{3}=\sqrt{3}-1=\boxed{\text{ウ}}$

(カイ.2) $BC=x$, $AB=2x$, $AC=\sqrt{3}x$

$2x+x+\sqrt{3}x=2$ $(3+\sqrt{3})x=2$ $x=\frac{2}{3+\sqrt{3}}$

以下(カイ1)に同じ

⑩ $\triangle ABC=24$ (面積) のとき $AB=\boxed{\text{ア}}$, $BC=\boxed{\text{イ}}$, $AC=\boxed{\text{ウ}}$

(ルートの中にルートがあることもあります。)

(カイ) $BC=x$, $AC=\sqrt{3}x$, $AB=2x$, $\frac{BC\times AC}{2}=\triangle ABC$ $\frac{\sqrt{3}x^2}{2}=24$ $x^2=\frac{2\times 24}{\sqrt{3}}=\frac{2\times 8\times 3}{\sqrt{3}}$

$x^2=\frac{16\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=16\sqrt{3}$ $x>0$ $x=\sqrt{16\sqrt{3}}=4\sqrt{\sqrt{3}}=\boxed{\text{イ}}$

$AB=2x=8\sqrt{\sqrt{3}}=\boxed{\text{ア}}$ $AC=\sqrt{3}x=\sqrt{3}\times 4\times\sqrt{\sqrt{3}}=4\sqrt{3\sqrt{3}}=\boxed{\text{ウ}}$

以上、定三角定規のまとめでした。次に設問形式にしておきます。

> [I] 45°, 45°, 90°の三角形の辺の比は、$1:1:\sqrt{2}$ であることを指示に従い説明せよ
>
> (1)三平方の定理を用いる。　(2)三平方の定理を用いない
>
> [II] 30°, 60°, 90°の三角形の辺の比は $1:\sqrt{3}:2$ であることを指示に従い説明せよ
>
> (1)三平方の定理を用いる。　(2)三平方の定理を用いない。

まとめを理解した人は、キチンとかけなくても説明できる筈です。他の人に、説明したとき、その人が納得できるように、順序だてて、説明できるかということです。是非とも、他の人にも考えてもらって、説明してやって下さい。このような幾何の問題は、理論的に説明できるかにつきます。

定三角定規の計算の仕方は、必ず覚えて下さい。

ようやく、P.15の(4)の[類4]の(解)(4)からです。

(解)(4)(カイ.1) $\triangle AOB=\triangle CDE(=27)$ だから $\triangle CDE$ を $x=k_1\ (0<k_1<6)$ で二等分する。右図 $\angle FEG=45^\circ$ だから

$\triangle FGE$ は直角二等辺三角形 よって、$GE=GF=6-k_1$　$\dfrac{(6-k_1)^2}{2}=\dfrac{1}{2}\times\triangle CDE=\dfrac{27}{2}$

$(6-k_1)^2=27$　$6-k_1=\pm\sqrt{27}=\pm3\sqrt{3}$　$k_1=6\mp3\sqrt{3}$ であるが $0<k_1<6$ より $\underline{k_1=6-3\sqrt{3}}$

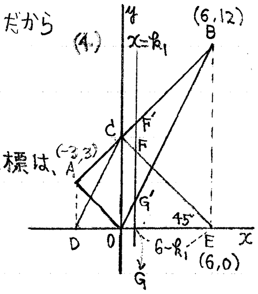
(カイ.2) $\triangle AOB$ を直接二等分する。直線AB：$y=x+6$ と直線 $x=k_1\ (0<k_1<6)$ の交点 $F'$ の $y$座標は、

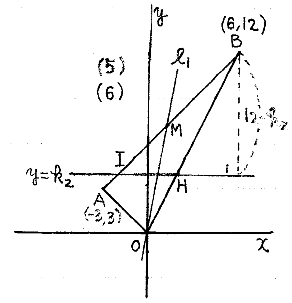
$y=k_1+6$，直線OB：$y=2x$ と直線 $x=k_1$ の交点 $G'$ の $y$座標は $y=2k_1$

したがって、$F'G'=(k_1+6)-2k_1=6-k_1$，$\triangle BF'G'$ の底辺を $F'G'$，高さを $GE=6-k_1$ と見て、

$\triangle BF'G'=\dfrac{\triangle AOB}{2}=\dfrac{27}{2}=\dfrac{1}{2}(6-k_1)^2$，$(6-k_1)^2=27$　以下 (カイ.1) に同じ

(補) $S=\dfrac{1}{2}|ad-bc|$ の公式も使えます。



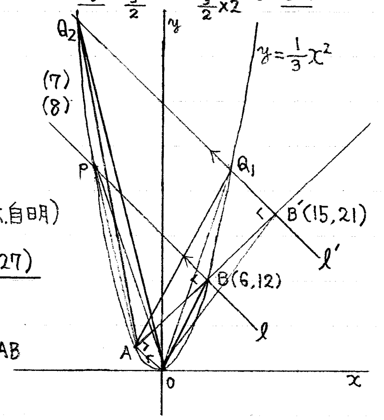

(5) $3<k_2<12$，直線OB：$y=2x$ と直線 $y=k_2$ の交点 $H\left(\dfrac{k_2}{2},k_2\right)$，直線AB：$y=x+6$ と

直線 $y=k_2$ の交点 $I(k_2-6,k_2)$　したがって $HI=\dfrac{k_2}{2}-(k_2-6)=6-\dfrac{k_2}{2}=\dfrac{12-k_2}{2}$

$\triangle IBH=\dfrac{1}{2}\times IH\times(12-k_2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{12-k_2}{2}\times(12-k_2)=\dfrac{1}{2}\times\triangle AOB=\dfrac{1}{2}\times27$

$(12-k_2)^2=54$　$12-k_2=\pm\sqrt{54}=\pm3\sqrt{6}$，$k_2=12\mp3\sqrt{6}$ であるが $3<k_2<12$ より $\underline{k_2=12-3\sqrt{6}}$

(6) ABの中点 $M\left(\dfrac{(-3)+6}{2},\dfrac{3+12}{2}\right)=M\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{15}{2}\right)$　AM：BM＝1：1 なので求める直線 $\ell_1$ は直線OM：$\underline{y}=\dfrac{\frac{15}{2}}{\frac{3}{2}}x=\dfrac{\frac{15}{2}\times2}{\frac{3}{2}\times2}x=\underline{5x}$




(7) 点B(6,12)を通り、線分OAに平行な直線 $\ell$ と放物線C：$y=\dfrac{1}{3}x^2$ の交点を

Pとすればよい。直線 $\ell$：$y=(-1)\cdot(x-6)+12=-x+18$ ---①

Pの座標は、$y=\dfrac{1}{3}x^2$ と①を連立して解いて、$\dfrac{1}{3}x^2=-x+18$　$x^2=-3x+54$

$x^2+3x-54=0$　$(x-6)(x+9)=0$（点Bの $x$座標6がこの解に含まれることは自明）

$x=6,-9$ であるが、点Pの $x$座標は $x=-9$ これを①に入れて $y=27$　$\therefore\underline{P(-9,27)}$

(8) $\angle OAB=90^\circ$ だから、$\triangle OAB$ の面積(27)を2倍にするには、半直線AB上に $AB'=2\times AB$

となる点 $B'$ をとり、$\triangle OAB'$ とすればよい。点 $B'$ を通り、線分OAに平行な直線 $\ell'$ と、

放物線C：$y=\dfrac{1}{3}x^2$ の交点が求める点Qである。($Q_1,Q_2$ 2つある)（半直線BA上に $AB''=2AB$ となる点 $B''$ は、解に結びつかない）

$B'(x,y)$ とおけば、$AB'$ の中点がBであるから $\dfrac{(-3)+x}{2}=6$，$-3+x=12$，$x=15$，$\dfrac{3+y}{2}=12$，$3+y=24$，$y=21$，$\therefore B'(15,21)$

直線 $\ell'$：$y=(-1)(x-15)+21=-x+36$ ---①　$y=\dfrac{1}{3}x^2$ と①を連立して解く。$\dfrac{1}{3}x^2=-x+36$，$x^2=-3x+108$

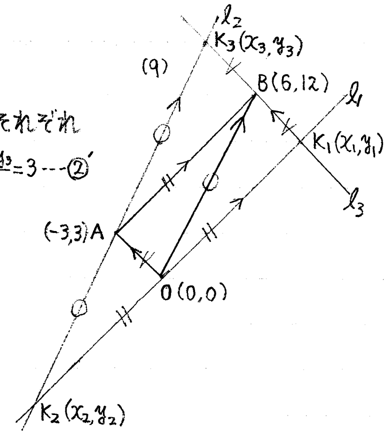
$x^2+3x-108=0$　$(x-9)(x+12)=0$　$x=9$ のとき①に入れて $y=27$，$x=-12$ のとき①に入れて $y=48$　$\therefore\underline{Q_1(9,27),Q_2(-12,48)}$

(補)(8) $Q\left(t,\dfrac{1}{3}t^2\right)$ とおく。$\overrightarrow{OA}=(-3,3)$，$\overrightarrow{OQ}=\left(t,\dfrac{1}{3}t^2\right)$　$\triangle AOQ=\dfrac{1}{2}\left|3\times t-(-3)\times\left(\dfrac{1}{3}t^2\right)\right|=\dfrac{1}{2}|3t+t^2|=2\times\triangle AOB=2\times27=54$

$|t^2+3t|=108$　$t^2+3t=\pm108$　(i) $t^2+3t=-108$ のとき $t^2+3t+108=0$　$t$ の実数解はない。

(ii) $t^2+3t=108$ のとき $t^2+3t-108=0$　$(t-9)(t+12)=0$　$t=9$ のとき $\dfrac{1}{3}t^2=\dfrac{1}{3}\times9^2=27$，$t=-12$ のとき $\dfrac{1}{3}t^2=\dfrac{1}{3}\times(-12)^2=48$

よって $Q_1=(9,27)$，$Q_2=(-12,48)$　高校では、このように解くことができますが------




(9) 右図のように、3点$K_1, K_2, K_3$が存在する.(平行四辺形は3つできる)

(カイ.1) $K_1(x_1,y_1)$, $K_2(x_2,y_2)$, $K_3(x_3,y_3)$とおく. $K_1K_2$, $K_2K_3$, $K_3K_1$の中点がそれぞれ

O, A, B, だから、$\frac{x_1+x_2}{2}=0$ …① $\frac{y_1+y_2}{2}=0$ …①′ $\frac{x_2+x_3}{2}=-3$ …② $\frac{y_2+y_3}{2}=3$ …②′

$\frac{x_3+x_1}{2}=6$ …③ $\frac{y_3+y_1}{2}=12$ …③′

①, ②, ③より $x_1+x_2=0$, $x_2+x_3=-6$, $x_3+x_1=12$ 辺々全てたして

$2(x_1+x_2+x_3)=6$ $x_1+x_2+x_3=3$ よって $x_3=3$, $x_1=9$, $x_2=-9$

①′, ②′, ③′より $y_1+y_2=0$, $y_2+y_3=6$, $y_3+y_1=24$ 辺々、全てたして

$2(y_1+y_2+y_3)=30$ $y_1+y_2+y_3=15$ よって $y_3=15$, $y_1=9$, $y_2=-9$

よって、求める頂点は、$K_1(9,9)$, $K_2(-9,-9)$, $K_3(3,15)$

(カイ.2) 原点Oを通り、ABに平行な直線$l_1$ : $y=x$, 点A$(-3,3)$を通り、OBに平行な直線$l_2$ : $y=2(x+3)+3=2x+9$

点B$(6,12)$を通り、OAに平行な直線$l_3$ : $y=(-1)(x-6)+12=-x+18$

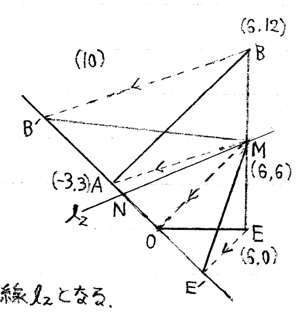
$l_1$と$l_3$の交点$K_1$を求める. 連立して解けば $x=-x+18$ $2x=18$ $x=9$, $y=9$ $K_1(9,9)$

$l_1$と$l_2$の交点$K_2$を求める. 連立して解けば、$x=2x+9$ $x=-9$, $y=-9$ $K_2(-9,-9)$ ※補

$l_2$と$l_3$の交点$K_3$を求める. 連立して解けば、$2x+9=-x+18$ $3x=9$ $x=3$ $y=2\times3+9=15$ $K_3(3,15)$

(補) 点$K_1$と点$K_2$は、原点対称なので、(カイ.1)では、$K_1(x_1,y_1)$のとき$K_2(-x_1,-y_1)$ すなわち $x_2=-x_1$, $y_2=-y_1$ ということ

(カイ.2)では$K_1(9,9)$を求めると$K_2(-9,-9)$は明らかです.




(10) (P.3の(5)下, P.3の(6)参照)

(カイ.1) (等積変形) 求める直線$l_2$は、線分OA上にある点Nを通る. ($\because \triangle AMB=\frac{6\times9}{2}=27$,

四角形AOEB $=\triangle AOB+\triangle BOE=27+\frac{6\times12}{2}=27+36=63>2\times\triangle AMB=54$)

点Bを通るAMに平行な直線と直線OAとの交点をB′とすると$\triangle AMB=\triangle AMB'$、

点Eを通るOMに平行な直線と直線OAとの交点をE′とすると$\triangle OME=\triangle OME'$

よって 四角形AOEB $=\triangle B'E'M$, 線分B′E′の中点をNとすれば、直線MNが求める直線$l_2$となる.

直線BB′ : $y=\frac{1}{3}(x-6)+12=\frac{1}{3}x+10$ …① ($\because$ AMの傾き$=\frac{6-3}{6-(-3)}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$)

直線EE′ : $y=1\times(x-6)=x-6$ …② ($\because$ OMの傾き$=1$), 直線OA : $y=-x$ …③

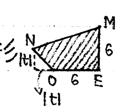
点B′の座標 ①と③を連立して $\frac{1}{3}x+10=-x$, $x+30=-3x$, $4x=-30$, $x=-\frac{30}{4}=-\frac{15}{2}$, $y=\frac{15}{2}$ $\therefore$ B′$\left(-\frac{15}{2},\frac{15}{2}\right)$

点E′の座標 ②と③を連立して $x-6=-x$, $2x=6$, $x=3$, $y=-3$ $\therefore$ E′$(3,-3)$

点Nの座標 (B′E′の中点) $x=\frac{\left(-\frac{15}{2}\right)+3}{2}=\frac{\left(-\frac{15}{2}+3\right)\times2}{2\times2}=\frac{-15+6}{4}=-\frac{9}{4}$, $y=\frac{\frac{15}{2}+(-3)}{2}=\frac{15-6}{4}=\frac{9}{4}$ $\therefore$ N$\left(-\frac{9}{4},\frac{9}{4}\right)$

求める直線$l_2$ MNの傾き $\frac{6-\frac{9}{4}}{6-\left(-\frac{9}{4}\right)}=\frac{24-9}{24+9}=\frac{15}{33}=\frac{5}{11}$ よって $y=\frac{5}{11}(x-6)+6=\frac{5}{11}x+6-\frac{30}{11}=\frac{5}{11}x+\frac{36}{11}$

(カイ.2) Nは線分OA $y=-x$上の点だからN$(t,-t)$ $(-3<t<0)$とおける. 四角形




$=\frac{(6+|t|)(6+|t|)}{2}-\frac{|t|^2}{2}=18+6|t|$

四角形NOEM $=\frac{1}{2}\times$ 四角形AOEB $=\frac{1}{2}\times63=\frac{63}{2}$

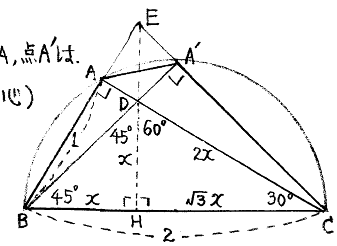
$18+6|t|=\frac{63}{2}$ $6+2|t|=\frac{21}{2}$ $12+4|t|=21$ tは負$(-3<t<0)$だから$|t|=-t$ $12-4t=21$ $4t=-9$ $t=-\frac{9}{4}$

$\therefore$ N$\left(-\frac{9}{4},\frac{9}{4}\right)$ 以下(カイ.1)に同じ

[類5] $\angle BAC=90^\circ$, $\angle ABC=60^\circ$の直角三角形ABCと$\angle BA'C=90^\circ$, $\angle A'BC=45^\circ$の直角三角形A'BCが底辺BCを共有して同一平面上にある。
但し、点A, 点A'は、辺BCに関して同じ側にある。点A, 点A'を結ぶ。ACとA'Bの交点をD, BCの長さを2とする。
(1) 図形を作図せよ。(BCの長さ2は、作図するときには、BC=8cmとせよ。余分な線は全て消してよい)
(2) 全ての線分の長さ、角度、三角形の面積を様々な方法で求めよ。

(考) (1) どのように作図したか、が(2)にもつながります。
(2) $\triangle ADA'$が、問題となります。

(解) (1) BCの中点を中心にして、直径BCの円をかく。($\angle BAC=90^\circ$, $\angle BA'C=90^\circ$だから、点A, 点A'は、円周上にある。) $\angle ABC=60^\circ$を正三角形を利用して作図する。BCの中点(円の中心)を通る垂線をひき、円との交点を点A'とする。




$A'C : BC = 1 : \sqrt{2} = A'C : 2$
$\sqrt{2} \times A'C = 2 \quad A'C = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = A'B$

(2) 定三角定規の辺の比より、$\underline{AB=1}$, $AC=\sqrt{3}$, $A'B=\underline{A'C=\sqrt{2}}$,
トレミーの定理より、$AA' \times BC + AB \times A'C = AC \times A'B \quad AA' \times 2 + 1 \times \sqrt{2} = \sqrt{3} \times \sqrt{2}$
$2 \times AA' = \sqrt{6} - \sqrt{2} \quad \underline{AA' = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$

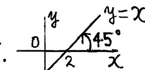
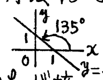
点Dから、辺BCに垂線DHをおろす。$BH = DH = x$とすると、直角三角形DHCの辺の比($1 : \sqrt{3} : 2$)より、$CH = \sqrt{3}x$, $CD = 2x$,
$BC = BH + CH = 2$ より $x + \sqrt{3}x = 2 \quad (\sqrt{3}+1)x = 2 \quad x = \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \sqrt{3}-1 \quad \therefore \underline{CD} = 2x = \underline{2\sqrt{3}-2}$
$\underline{AD} = AC - CD = \sqrt{3} - (2\sqrt{3}-2) = \underline{2-\sqrt{3}} \quad \underline{BD} = BH \times \sqrt{2} = \sqrt{2}x = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1) = \underline{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$
$\underline{A'D} = A'B - BD = \sqrt{2} - (\sqrt{6}-\sqrt{2}) = \underline{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}$
$\underline{\triangle BCD} = BC \times DH \times \frac{1}{2} = 2 \times x \times \frac{1}{2} = x = \underline{\sqrt{3}-1} \quad \underline{\triangle ABD} = AB \times AD \times \frac{1}{2} = 1 \times (2-\sqrt{3}) \times \frac{1}{2} = \underline{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$
$\underline{\triangle A'DC} = A'D \times A'C \times \frac{1}{2} = (2\sqrt{2}-\sqrt{6}) \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{4-\sqrt{12}}{2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = \underline{2-\sqrt{3}}$
$\underline{\triangle ADA'} = \triangle A'DC \times \frac{AD}{CD} \overset{※1}{=} (2-\sqrt{3}) \times \frac{2-\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-1)} = \frac{(2-\sqrt{3})^2}{2(\sqrt{3}-1)} = \frac{4-2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+3}{2(\sqrt{3}-1)} \overset{※2}{=} \frac{7-4\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-1)} = \frac{(7-4\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{7\sqrt{3}+7-12-4\sqrt{3}}{2(3-1)}$
$= \underline{\frac{3\sqrt{3}-5}{4}}$ 円周角の移動により、$\underline{\angle AA'D} = \angle ACB = \underline{30^\circ}$, $\underline{\angle A'AC} = \angle A'BC = \underline{45^\circ}$, その他の角は、お任せ。

(補) 相似を用いろ。(方べきの定理) BD, AD (CD, A'D)を求めると、$\triangle BCD \backsim \triangle AA'D$より、$BC : AA' = BD : AD \quad 2 : AA' = \sqrt{6}-\sqrt{2} : 2-\sqrt{3}$
面積比は $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 : (2-\sqrt{3})^2 = \triangle BCD : \triangle AA'D = \sqrt{3}-1 : \triangle AA'D \quad (\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 \times \triangle AA'D = (2-\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{3}-1)$
$(\sqrt{2}(\sqrt{3}-1))^2 \times \triangle AA'D = (2-\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{3}-1) \quad 2(\sqrt{3}-1)^2 \times \triangle AA'D = (2-\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{3}-1) \quad \triangle AA'D = \frac{(2-\sqrt{3})^2(\sqrt{3}-1)}{2(\sqrt{3}-1)^2} = \frac{(2-\sqrt{3})^2}{2(\sqrt{3}-1)}$ 以下同じ
※1では、面積比と辺の比の関係 $\triangle ADA'(\triangle AA'D) : \triangle A'DC = AD : CD$ を用いました。
点Bを原点Oとして、直線BA: $y=\sqrt{3}x$, 直線BA': $y=x$, 直線AC: $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2) = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}}$, 交点の座標A, D, A'を求めても、面積、長さなどが求まります。※2では、公式$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$, $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$を用いました。
BA, CA'の交点をEとすると、$\triangle EBC$の垂心が点Dであり、3点、E, D, H, は、一直線に並びます。$\triangle EBC$を見ると、円周角$90^\circ$を考えることにより、いろいろな線分を直径とする円がかけて、円周角が等しいことにより、角の移動ができます(P.8の(1))

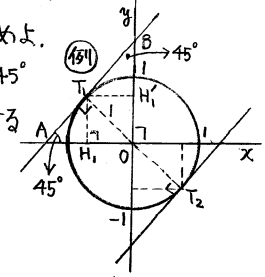
(練習) (1) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 2 - 2\sqrt{6} + 3 = 5 - 2\sqrt{6}$ (2) $(2\sqrt{3}-1)^2 = (2\sqrt{3})^2 - 2\cdot(2\sqrt{3})\cdot 1 + 1^2 = 12 - 4\sqrt{3} + 1 = 13 - 4\sqrt{3}$
(3) $(3\sqrt{5}-5\sqrt{3})^2 = (3\sqrt{5})^2 - 2\cdot(3\sqrt{5})\cdot(5\sqrt{3}) + (5\sqrt{3})^2 = 45 - 30\sqrt{15} + 75 = 120 - 30\sqrt{15}$ (4) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot 1 + 1^2 = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$
(5) $\left(-\sqrt{3}-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left\{(-1)\left(\sqrt{3}+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right\}^2 = (-1)^2\left(\sqrt{3}+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1\cdot\left((\sqrt{3})^2 + 2\cdot(\sqrt{3})\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2\right) = 3 + \sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 3 + \frac{9}{2} = \frac{15}{2} + 3\sqrt{6}$
or $= (-\sqrt{3})^2 + 2(-\sqrt{3})\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = 3 + \sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 3 + \frac{9}{2} = \frac{15}{2} + 3\sqrt{6}$

カイ

[類6] $xy$平面上に点$O'(2,1)$を中心とする半径1の円Cがある。直線$\ell$：$y=-x+k$が円Cに接するとき$k$の値を求めよ。

(考) $y=x-2$の傾きは1ですが、$x$軸の正の方向と左回りになす角は45°です。  一般に、左回りを正の角度とします。高校では、この傾き$1=\overset{\text{タンジェント}}{\tan}45°$とかきます。$y=-x+1$  の傾き$-1=\tan135°$です。(tanは高校で習う)

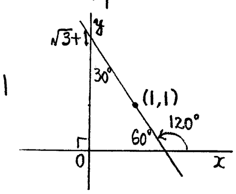
(例) 原点を中心とする半径1の円(単位円という)に直線$\ell$：$y=x+k$が接しているとき$k$の値を求めよ。



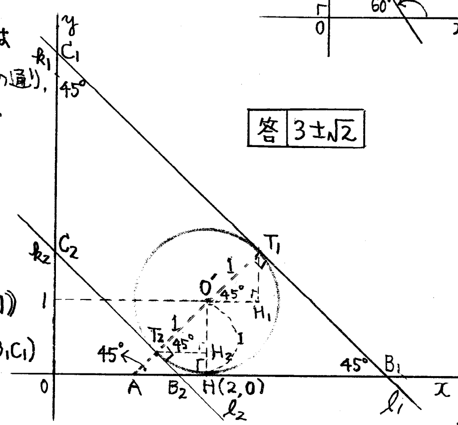
(カイ) 右図のように2本あります。接点$T_1, T_2$とする。$OT_1=1$(円の半径)、$\angle OT_1A=90°$、$\angle OAT_1=45°$ですから、定三角定規の辺の比より、$OA=OB=\sqrt{2}$ よって、$\ell$：$y=x+k$が点$T_1$で接するとき、$y$切片$k=\sqrt{2}$です。点$T_2$が接点のとき対称性から$k=-\sqrt{2}$が得られ、求める$k$の値は、$k=\pm\sqrt{2}$ 接点$T_1$の座標を求めます。$OH_1=\frac{1}{2}\times OA=\frac{\sqrt{2}}{2}=OH_1'$ですから、$T_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$、対称性から、$T_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$となります。

それでは、「点(1,1)を通り、$x$軸の正の方向となす角が120°である直線$\ell$の式を求めよ」です。

傾きは、定三角定規の辺の比より$-\frac{\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$ だから$\ell$：$y=-\sqrt{3}(x-1)+1=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}+1$



(解) 右図のように、接線は、$\ell_1, \ell_2$ 2本ある。接点をそれぞれ$T_1, T_2$とする。$T_1, T_2$は円の中心$O'$に対称である。直線$T_1O'(T_1T_2)$と$x$軸の交点をAとする。各点は図の通り。



答 $3\pm\sqrt{2}$

$\ell$の傾きが$-1$だから、$\angle T_1B_1A=45°$、$T_1$は接点だから、$\angle O'T_1B_1(\angle AT_1B_1)=90°$

$\angle O'AB_1(\angle O'AH)=45°$、直角三角形$T_1AB_1$, $O'AH$は直角二等辺三角形である。

半径$O'H=AH=1$、直角二等辺三角形$O'AH$より $O'A=AH\times\sqrt{2}=1\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$

よって$AT_1=O'A+$半径$O'T_1=\sqrt{2}+1$、直角二等三角形$T_1AB_1$だから

$AB_1=AT_1\times\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1)\times\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$、$H(2,0)$、$AH=1$ だから $A(1,0)$ ($OA=1$)

したがって $OB_1=OA+AB_1=1+(2+\sqrt{2})=3+\sqrt{2}=OC_1=k_1$ (∵直角二等辺三角形$OB_1C_1$)

$T_2A=O'A-1$(半径)$=\sqrt{2}-1$、直角二等辺三角形$T_2AB_2$より、$AB_2=T_2A\times\sqrt{2}$

$AB_2=(\sqrt{2}-1)\times\sqrt{2}=2-\sqrt{2}$  $OB_2=OA+AB_2=1+(2-\sqrt{2})=3-\sqrt{2}=OC_2=k_2$

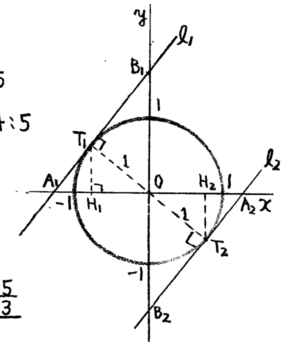
($\triangle T_1AB_1$, $\triangle O'AH$, $\triangle OB_1C_1$, $\triangle O'H_1T_1$はいずれも、直角二等辺三角形であり、相似である。)

(別解) $T_1$の座標は、$T_1H_1=O'H_1=$半径$O'T_1\times\frac{1}{\sqrt{2}}=1\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ だから、$T_1\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$、$\ell_1$の傾きは$-1$だから、

$\ell_1$：$y=(-1)\left(x-\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)+1+\frac{1}{\sqrt{2}}=-x+2+\frac{1}{\sqrt{2}}+1+\frac{1}{\sqrt{2}}=-x+3+\frac{2}{\sqrt{2}}=-x+3+\sqrt{2}=-x+k_1$  ∴$k_1=3+\sqrt{2}$

同様に、$T_2$の座標は、$T_2\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\ell_2$：$y=(-1)\left(x-\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)+1-\frac{1}{\sqrt{2}}=-x+2-\frac{1}{\sqrt{2}}+1-\frac{1}{\sqrt{2}}=-x+3-\sqrt{2}$  ∴$k_2=3-\sqrt{2}$

問. 原点Oを中心とする半径1の円に、傾きが$\frac{4}{3}$である直線$\ell$が接している。直線$\ell$の式を求めよ。



(カイ1) $\ell_1$を求める。傾き$\frac{4}{3}$だから、$OA_1:OB_1=3:4$、直角三角形$A_1OB_1$だから$OA_1:OB_1:A_1B_1=3:4:5$

直角三角形$OT_1B_1$ ∽ 直角三角形$A_1OB_1$だから、直角三角形$OT_1B_1$の辺の比 $T_1O:T_1B_1:OB_1=3:4:5$

$T_1O=1$(半径)だから $T_1O:OB_1=1:OB_1=3:5$ ∴$OB_1=\frac{5}{3}$ ∴$\ell_1$：$y=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$

原点Oについての対称性により、$k_2=-\frac{5}{3}$であり、$\ell_2$：$y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$  答 $y=\frac{4}{3}x\pm\frac{5}{3}$

(カイ2) 直角三角形$T_1H_1O$の辺の比は$T_1H_1:H_1O:OT_1=3:4:5$ (∵(カイ1)より) $OT_1=1$(半径)だから

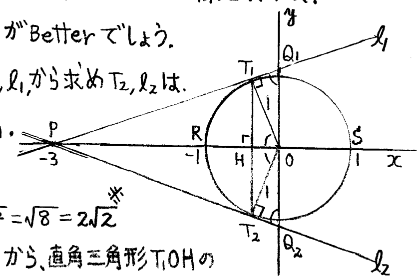
$H_1O=\frac{4}{5}$, $T_1H_1=\frac{3}{5}$ ∴接点$T_1\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ $\ell_1$の傾き$\frac{4}{3}$だから、$\ell_1$：$y=\frac{4}{3}\left(x-\left(-\frac{4}{5}\right)\right)+\frac{3}{5}=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$

対称性により$\ell_2$：$y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$

[類7] $xy$平面上に点$O'(2,0)$を中心とする半径1の円Cがある.点$P(1,2)$を通り,円Cに接する接線$l$の式と,接点の座標を求めよ

(考) 例 点$P(-3,0)$を通り,単位円(原点Oを中心とする半径1の円)に接する接線の式と接点の座標を求めよ.

(カイ1)は接点を先に求め,(カイ2)は接線を先に求めるということです.(カイ2)の方がBetterでしょう.




(カイ1)右図のように,接線は$l_1, l_2$ 2本あり,それぞれの接点を$T_1, T_2$とする.$T_1, l_1$,から求め$T_2, l_2$は,対称性を利用して求めることにする.直線$l_1(PT_1)$と$y$軸との交点$Q_1$.

$\angle OT_1P=90°$だから,2角相等により,直角三角形$POT_1$∽直角三角形$T_1OH$を利用して,$T_1$の座標を求める.三平方の定理より,$T_1P=\sqrt{PO^2-OT_1^2}=\sqrt{3^2-1^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ※

したがって,直角三角形$POT_1$の辺の比は,$1:2\sqrt{2}:3$ ($=OT_1:T_1P:PO$)であるから,直角三角形$T_1OH$の辺の比 $OH:HT_1:T_1O=1:2\sqrt{2}:3$, $T_1O=1$(円の半径)だから,$OH=\frac{1}{3}$, $HT_1=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

よって,$T_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, $l_1$の傾きは $\frac{HT_1}{PH}=\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{3-\frac{1}{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{9-1}=\frac{2\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ だから $l_1: y=\frac{\sqrt{2}}{4}(x-(-3))=\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{3\sqrt{2}}{4}$

対称性より,$T_2\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, $l_2: y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{3\sqrt{2}}{4}$

(カイ2) $l_1$の傾き$\frac{Q_1O}{OP}$を求め,$l_1$の式を求める.2角相等により,直角三角形$POT_1$∽直角三角形$PQ_1O$であるから,

$\frac{Q_1O}{OP}=\frac{OT_1}{T_1P}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ よって $l_1: y=\frac{\sqrt{2}}{4}(x-(-3))=\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ---①

$T_1$の座標を求める.直線$OT_1$の傾きは,$l_1$と$OT_1$は垂直に交わるから,($OT_1$の傾き)×($l_1$の傾き)$=-1$により

($OT_1$の傾き)$=-\frac{1}{(l_1\text{の傾き})}=-2\sqrt{2}$ したがって 直線$OT_1$の式は $y=-2\sqrt{2}x$ ---②

①,②の交点が$T_1$だから,連立して解いて,$-2\sqrt{2}x=\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{3\sqrt{2}}{4}$ 両辺に$\frac{4}{\sqrt{2}}$をかけて $-8x=x+3$ $-3=9x$

$x=-\frac{1}{3}$, ②に入れて $y=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ∴$T_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ 対称性より $T_2\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, $l_2$は$y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{3\sqrt{2}}{4}$

(補)※は,方べきの定理を用いて,$T_1P^2=PR\times PS=2\times4=8$ ∴$T_1P=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ のようにも求まります.

高校生による教科書的基礎解をしてみます.

接線が,$x$軸に垂直な直線になることは,明らかにない(接線は$x\neq-3$)

よって,接線$l$は,$y=m(x-(-3))=mx+3m$ すなわち $mx-y+3m=0$ ---① とおける.

原点Oから直線①までの距離が半径1に等しいから,$\frac{|3m|}{\sqrt{m^2+1}}=1$ $|3m|=\sqrt{m^2+1}$ $9m^2=m^2+1$

$8m^2=1$ $m=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$ よって求める接線は2本あり,$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}(x-(-3))=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}x\pm\frac{3\sqrt{2}}{4}$(複号同順)

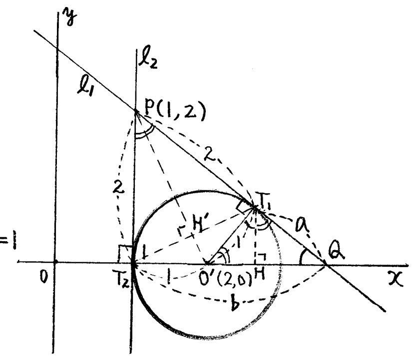
$y=\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{3\sqrt{2}}{4}$と単位円の接点を$T_1$とすると,直線$OT_1$は$y=-\frac{4}{\sqrt{2}}x=-2\sqrt{2}x$ 以下(カイ2)に同じ.

- 接点$T_1$を求めるもう1つの(カイ)は,接線$y=\frac{1}{2\sqrt{2}}(x+3)$と単位円$x^2+y^2=1$を連立して解けば,$x$は重解となる.$x^2+\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}(x+3)\right\}^2=1$ $x^2+\frac{(x+3)^2}{8}=1$ $8x^2+x^2+6x+9=8$ $9x^2+6x+1=0$

$(3x+1)^2=0$ ∴$x=-\frac{1}{3}$ $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{3}+3\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\times\frac{8}{3}=\frac{4}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ∴$T_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

こうなってくると,(カイ2)の解がよろしいようです.

さて,[類7]の(解)です.次頁P.15の(17)にかきました.




[類7]の解(実は、Best解?は、最下段にありますが、(解)もimportantです。)

(解) 接線は $l_1, l_2$ 2本あるが、$l_2: x=1$、接点 $T_2(1,0)$ は明らかである。

$l_1$ と円O'との接点を $T_1$ とし、$l_1$ と $x$ 軸との交点をQとする。

$l_1$ の傾き $\frac{PT_2}{T_2Q}$ を求め、$l_1$ の式を求める。$PT_1=PT_2=2$ (∵斜辺PO'共通、$O'T_1=O'T_2=1$ により、直角三角形 $PO'T_1$ ≡ 直角三角形 $PO'T_2$) 2角相当により、次の表にある直角三角形 $PT_2Q$ と直角三角形 $O'T_1Q$ は相似である。$T_1Q=a$, $T_2Q=b$ とおく。

| 直角三角形 $PT_2Q$ | 直角三角形 $O'T_1Q$ |
|---|---|
| $PT_2(=2)$ | $O'T_1(=1)$ |
| $T_2Q(=b)$ | $T_1Q(=a)$ |
| $QP(=a+2)$ | $QO'(=b-1)$ |

左表より $2:1=b:a$ ∴ $b=2a$ ---①

$2:1=(a+2):(b-1)$ $a+2=2(b-1)=2b-2$ ∴ $a=2b-4$ ---②

①を②に代入 $a=4a-4$ $4=3a$ $a=\frac{4}{3}$, $b=\frac{8}{3}$

よって、$l_1: y=-\frac{2}{b}(x-1)+2=-\frac{2}{\frac{8}{3}}(x-1)+2=-\frac{3}{4}(x-1)+2=-\frac{3}{4}x+\frac{11}{4}$ ---③

接点 $T_1$ を求める。($O'T_1$ の傾き)×($l_1$ の傾き)$=-1$ より $O'T_1$ の傾き$=\frac{4}{3}$ であるから、直線 $O'T_1$ は $y=\frac{4}{3}(x-2)=\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$ ---④

③,④を連立して解けば、$-\frac{3}{4}x+\frac{11}{4}=\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$ 12倍して $-9x+33=16x-32$ $65=25x$ $x=\frac{65}{25}=\frac{13}{5}$

$y=\frac{4}{3}\times\frac{13}{5}-\frac{8}{3}=\frac{52}{15}-\frac{40}{15}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$ ∴接点 $T_1\left(\frac{13}{5},\frac{4}{5}\right)$

| 答 | 接線 $x=1$ のとき接点 $(1,0)$<br>接線 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{11}{4}$ のとき接点 $\left(\frac{13}{5},\frac{4}{5}\right)$ |
|---|---|

(補) 更に、直角三角形 $O'HT_1$、直角三角形 $T_1HQ$ も全て相似を加えると、$\triangle O'T_1Q \backsim \triangle O'HT_1$ により、$O'T_1:O'H=QO':T_1O'$

$1:O'H=(b-1):1=\left(\frac{8}{3}-1\right):1=\frac{5}{3}:1=5:3$ $5\times O'H=3$ ∴ $O'H=\frac{3}{5}$ $T_1$ の $x$ 座標$=OO'+O'H=2+\frac{3}{5}=\frac{13}{5}$

$O'T_1:O'H=T_1Q:HT_1$ $1:\frac{3}{5}=\frac{4}{3}:HT_1$ ∴ $HT_1=\frac{3}{5}\times\frac{4}{3}=\frac{4}{5}$ よって $T_1\left(\frac{13}{5},\frac{4}{5}\right)$ のように、$l_1$ より先に接点 $T_1$ が求まります。

相似比でキチンとかけば、上のようにtroublesomeです。これを、$\triangle O'T_1Q \backsim \triangle O'HT_1$ より $O'T_1:T_1Q:QO'=O'H:HT_1:T_1O'$

$1:a:b-1=O'H:HT_1:1$ のようにかいて、どれか2つの比を用いれば、$O'H$, $HT_1$ が求めやすくなります。----⑪

- $a, b$ を求める方法として、三平方の定理を2つ用いればよいことですが、具体的数字だから、わりとeasyに求まるものの、これが一般的な文字になっていれば、これは大変です。三平方の定理は、用いても1つぐらいにしましょう。

三平方の定理より、$(a+2)^2=2^2+b^2$ $a^2+4a=b^2$ ---① $(b-1)^2=a^2+1^2$ $b^2-2b=a^2$ ---②

①より $b^2=a^2+4a$ を②に代入 $a^2+4a-2b=a^2$ $4a=2b$ $b=2a$ これを①に代入 $a^2+4a=(2a)^2=4a^2$ $a>0$ だから $a$ でわって $a+4=4a$ $4=3a$ ∴ $a=\frac{4}{3}$, $b=2a=2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$ のように求まります。これが文字だったら大変です。

- 直角絡みの直線には、面積を等式で結ぶ方法も有効なときがあります。$\triangle PT_2Q=\triangle PT_2O'\times2+\triangle O'T_1Q$ だから

$b\times2\times\frac{1}{2}=1\times2\times\frac{1}{2}\times2+a\times1\times\frac{1}{2}$ $b=2+\frac{a}{2}$ $2b=4+a$ のような式も得られます。$\triangle O'T_1Q=\frac{1}{2}\times T_1Q\times T_1O'=\frac{1}{2}\times O'Q\times HT_1$ だから $a\times1=(b-1)\times HT_1$ なども得られ、$a, b$ が求まれば、$HT_1$ も求まります。

- ⑪を用いると $\triangle PT_2Q \backsim \triangle O'TQ$ だから $PT_2:T_2Q:QP=O'T:TQ:QO'$ とかいて $2:b:a+2=1:a:b-1$ となりますが、式では正しくても、相似比ではないので、$\backsim$ とかいた以上、本質的には、よいかき方ではありませんが、一般的には、これでも通じます。$x:y=A:B \Leftrightarrow Bx=Ay \Leftrightarrow x:A=y:B$ だからです。例えば、$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$ のとき、相似比2:3ならば、$AB:DE=BC:EF=CA:FD=2:3$ であり、$AB:BC:CA=DE:EF:FD=?:?:?$ のようなかき方はできない。辺の比としてOKです。

- もう1つ、$T_1$ を求める方法に気付きましたが、円の性質から、$T_1T_2$ と $PO'$ は垂直に交わります。$PO': y=-2(x-2)=-2x+4$ ①ですから、$T_1T_2$ の傾き $\frac{1}{2}$ だから $T_1T_2: y=\frac{1}{2}(x-1)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ ---② ①,②を連立して解けば、(解)の図にある、点H'の座標 $H'\left(\frac{9}{5},\frac{2}{5}\right)$ が得られ、$T_1(s,t)$, $T_2(1,0)$ の中点がH'だから $\frac{s+1}{2}=\frac{9}{5}$, $\frac{t+0}{2}=\frac{2}{5}$ ∴ $s=\frac{13}{5}$, $t=\frac{4}{5}$ ∴ $T_1\left(\frac{13}{5},\frac{4}{5}\right)$

したがって $l_1: y=\frac{2-\frac{4}{5}}{1-\frac{13}{5}}(x-1)+2=\frac{10-4}{5-13}(x-1)+2=\frac{6}{-8}(x-1)+2=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}+2=-\frac{3}{4}x+\frac{11}{4}$ のように求まります。

しかし、これは、$T_2(1,0)$ が求まったので、すぐに求まるにすぎませんが、図の特徴を捉えた、Best解です。

[類3] 円Oに内接する六角形ABCDEFは、AB＝CD＝EF＝2，BC＝DE＝FA＝4をみたしている。

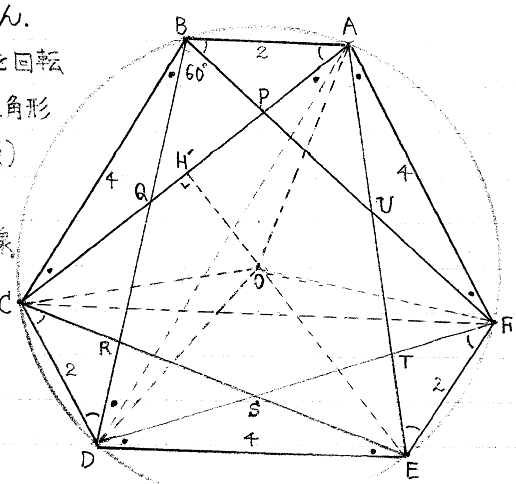
(1) 2,4の長さに注意しながら、おおよその図を描け。

(2) ∠ABC＝□° (3) △ABCの面積＝□ (4) AC＝□ (5) 円Oの半径＝□

(6) 六角形ABCDEFの面積＝□ (7) △ACEと△BDFの共通部分の面積S＝□

(考) 弧$\overset{\frown}{AB}$≒2，弧$\overset{\frown}{BC}$≒4，弦の長さAB＝2，BC＝4です。図は、できるだけ正確にかきます。大学入試には、図がかいてない設問も多いです。定規はよいとしてもコンパスは使えません。

円に内接する線対称性が見られる図形は、ある図形を回転させた図形であることが多々あります。この設問では、正三角形です。回転角に関する設問も多いです。(Vol. I. P.156参照)




(2)円周角と中心角

(3),(4) 定三角定規の辺の比と三平方の定理，Aから垂線。

(5) 正三角形に着目

(6) 正三角形＋3×△？

(7) 四角形ABCDにトレミーの定理，相似を用いて

CQ：QAは？ すると△BCQは？，同様に，△BPAは？

S＝正三角形−3×△BQP

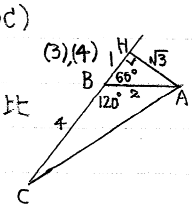
穴埋め設問ですから、証明をキチンとする必要はなく、道理がわかって、いかに速く解を得られるかです。高校生になると、三角を用いることもできますが、その基礎となる平面幾何をおろそかにすることはできません。中学生のときに、平面幾何を、できるだけ多く習得しておきなさい。相似、合同などの直線だけに加えて円とからみあった設問を多くやっておくです。

(解) (1) (考)参照 まず円をかきますが、次に正三角形ACEをかいて、弦AB：弦BC＝2：4＝1：2となるような点Bをとる。

(∠AOB≒40°，∠AOBが40°より、ちょっとだけ小さいことを実際に円をかいて確かめなさい)

(2) $\underline{\angle ABC}=\angle ABF+\angle FBD+\angle DBC=\frac{1}{2}\angle AOF+\frac{1}{2}\angle FOD+\frac{1}{2}\angle DOC=\frac{1}{2}(\angle AOF+\angle FOD+\angle DOC)$

$=\frac{1}{2}\angle AOC$ (但し、優弧$\overset{\frown}{AC}$の中心角)$=\frac{1}{2}\times240^\circ=\underline{120^\circ}$ (∵円周角＝中心角×$\frac{1}{2}$)




(3),(4) 右図のように半直線CBに点Aから垂線AHをおろす。定三角定規(90°,60°,30°)の辺の比

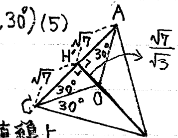
1：√3：2 により、AB＝2であることから、BH＝1，AH＝√3，

したがって $\underline{\triangle ABC}=\triangle AHC-\triangle AHB=\frac{5\sqrt3}{2}-\frac{1\cdot\sqrt3}{2}=\frac{4\sqrt3}{2}=\underline{2\sqrt3}$

三平方の定理より，$AC^2=AH^2+HC^2=(\sqrt3)^2+5^2=3+25=28=2^2\cdot7$ $AC>0$ ∴$\underline{AC}=\sqrt{2^2\cdot7}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt7=\underline{2\sqrt7}$

(5) 円Oの半径はAOである。正三角形ACEの辺ACに点Oから垂線OH′をおろす。定三角定規(90°,60°,30°)の辺の比 $AO:AH'=2:\sqrt3$ $AO:\sqrt7=2:\sqrt3$ $\sqrt3\times AO=2\sqrt7$ ∴$\underline{AO}=\frac{2\sqrt7}{\sqrt3}=\frac{2\sqrt7\cdot\sqrt3}{\sqrt3\cdot\sqrt3}=\underline{\frac{2\sqrt{21}}{3}}$

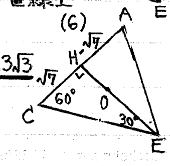
($OH':AO=1:2$ ∴$OH'=\frac{1}{2}\times AO=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt7}{\sqrt3}=\frac{\sqrt7}{\sqrt3}$ これは(7)で用います)




E,O,H′は一直線上

(6) $\underline{六角形ABCDEF}$＝正三角形ACE＋△ABC＋△CDE＋△EFA＝正三角形ACE＋3×△ABC

$=AC\times EH'\times\frac{1}{2}+3\times2\sqrt3=2\sqrt7\times\sqrt7\times\sqrt3\times\frac{1}{2}+6\sqrt3=\sqrt7\cdot\sqrt7\cdot\sqrt3+6\sqrt3=7\sqrt3+6\sqrt3=\underline{13\sqrt3}$




(∵右図 90°,60°,30°の直角三角形CEH′ $CH':EH'=1:\sqrt3$ $\sqrt7:EH'=1:\sqrt3$ ∴$EH'=\sqrt7\times\sqrt3$)

(7) $S$ = 六角形PQRSTU である.((その1).(その2) 2つ方法をかきましたが,(その1)の方が応用が効きます.)

(その1) 対称性から,$\triangle OPQ \equiv \triangle OQR \equiv \triangle ORS \equiv \triangle OST \equiv \triangle OTU \equiv \triangle OUP$ だから $S = 6\triangle OPQ$

$\triangle OPQ$の高さ $= OH' = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ ((5)の図参照,底辺PQをかけるのだから,最終stageで有理化します.)

$\triangle OPQ$の底辺 PQの長さを求める.

円Oに内接する四角形ABCDは,$BC /\!/ AD$ である等脚台形であると同時に,$\triangle BCQ \backsim \triangle DAQ$ を示す.

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ だから,円周角について,$\angle ACB = \angle ADB = \angle CBD = \angle CAD$,錯角が等しいことにより,$BC /\!/ AD$,と同時に

二等辺三角形BCQ$\backsim$二等辺三角形DAQ,$AB = CD = 2$ より 四角形ABCDは等脚台形

円Oに内接する等脚台形ABCDに,トレミーの定理を用いると,$BC \times AD + AB \times CD = AC \times BD$

$BC = 4$, $AB = CD = 2$, $AC = BD = 2\sqrt{7}$ ($\because$ (4)から) $\therefore 4 \times AD + 2 \times 2 = 2\sqrt{7} \times 2\sqrt{7} = 28$, $4 \times AD = 24$ $\therefore AD = 6$

$\triangle BCQ \backsim \triangle DAQ$ の相似比 $BC : DA(AD) = CQ : AQ = 4 : 6 = 2 : 3$ $\therefore CQ = AC \times \dfrac{CQ}{CQ + AQ} = 2\sqrt{7} \times \dfrac{2}{2+3} = \dfrac{4\sqrt{7}}{5}$

同様に,等脚台形ABCF,$CF = AD (= BE) = 6$. $\triangle ABP \backsim \triangle CFP$ 相似比 $AB : CF = AP : CP = 2 : 6 = 1 : 3$

$AP = AC \times \dfrac{AP}{AP + CP} = 2\sqrt{7} \times \dfrac{1}{1+3} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ $\therefore PQ = AC - AP - CQ = 2\sqrt{7} - \dfrac{\sqrt{7}}{2} - \dfrac{4\sqrt{7}}{5} = \dfrac{20\sqrt{7} - 5\sqrt{7} - 8\sqrt{7}}{10} = \dfrac{7\sqrt{7}}{10}$

したがって $\triangle OPQ = \dfrac{1}{2} \times PQ \times OH' = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{7\sqrt{7}}{10} \times \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \dfrac{49}{20\sqrt{3}} = \dfrac{49\sqrt{3}}{20(\sqrt{3})^2} = \dfrac{49\sqrt{3}}{60}$

$\therefore$ 求める面積 $S = 6 \times \dfrac{49\sqrt{3}}{60} = \dfrac{49\sqrt{3}}{10}$

(その2) $\triangle BPQ \equiv \triangle DRS \equiv \triangle FTU$ だから.$S$ = 正三角形BDF $- 3 \times \triangle BPQ$

右図より.正三角形BDF $= BD \times FH'' \times \dfrac{1}{2} = 2\sqrt{7} \times \sqrt{7} \times \sqrt{3} \times \dfrac{1}{2} = (\sqrt{7})^2 \times \sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

$\triangle BPQ = \triangle ABC - \triangle BCQ - \triangle BAP$ として求める.

$\triangle BCQ$ について.$\triangle BCQ : \triangle ABC = CQ : AC = 2 : 2+3 = 2 : 5$ ($\because$ (その1) $CQ : AQ = 2 : 3$ より)

$\triangle BCQ : 2\sqrt{3} = 2 : 5$ $5 \times \triangle BCQ = 2\sqrt{3} \times 2 = 4\sqrt{3}$ $\therefore \triangle BCQ = \dfrac{4\sqrt{3}}{5}$

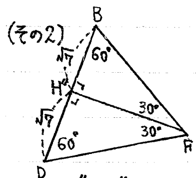
$\triangle BAP$ について $\triangle BAP : \triangle ABC = AP : AC = 1 : 1+3 = 1 : 4$ ($\because$ (その1) $AP : CP = 1 : 3$ より)

$\triangle BAP : 2\sqrt{3} = 1 : 4$ $4 \times \triangle BAP = 2\sqrt{3} \times 1$ $\therefore \triangle BAP = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって $\triangle BPQ = 2\sqrt{3} - \dfrac{4\sqrt{3}}{5} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{20\sqrt{3} - 8\sqrt{3} - 5\sqrt{3}}{10} = \dfrac{7\sqrt{3}}{10}$

$\therefore$ 求める面積 $S = 7\sqrt{3} - 3 \times \dfrac{7\sqrt{3}}{10} = \dfrac{70\sqrt{3} - 21\sqrt{3}}{10} = \dfrac{49\sqrt{3}}{10}$

(その2)




$BH'' : FH'' = 1 : \sqrt{3}$

$\sqrt{7} : FH'' = 1 : \sqrt{3}$

$FH'' = \sqrt{7} \times \sqrt{3}$

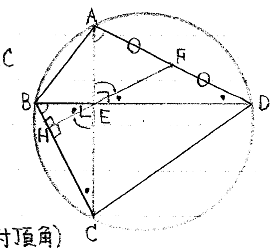
((6)の $EH' = FH''$ でした 悪しからず)

(補) 正三角形ACEを,円の中心Oのまわりに,$\angle AOB$だけ回転させると正三角形BDFとなっています.回転させると,必ず線対称になります.共通部分は,合同な三角形に分けることができるので,これを利用して,上の(その1)のように,面積を求めることができます.回転角 $\angle AOB = \angle AQB$ にも注意して下さい.$AC = AP + PQ + QC = BP + PQ + QB$ なので $AC = \triangle BPQ$の周の長さ となっています.六角形PQRSTUは,$PQ = QR = RS = ST = TU = UP$ ですが,中心Oから,各頂点までの距離,$\{OP = OR = OT\} \neq \{OQ = OS = OU\}$ ので,6つの頂点,P,Q,R,S,T,U 全てを通る外接円は.かけません.しかし,点Oを中心として,各辺に接する内接円はかけます.接点の1つは,点H′です.残りの5つの接点をかいて,内接円をかいてみて下さい.内接円の半径は,OH′です.高校生では,三角の設問として出題されますが,以上のような図形的考察ができないと,解を得ることがdifficultyです.(7)の(その1)は.importanceです.

| 答 | |
|---|---|
| 答 | (1)(考)参照 (2) 120° |
| | (3) $2\sqrt{3}$ (4) $2\sqrt{7}$ (5) $\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$ |
| | (6) $13\sqrt{3}$ (7) $\dfrac{49\sqrt{3}}{10}$ |

[類] 四角形ABCDは次の2つの条件[I][II]をみたしている。条件[I]円に内接している。条件[II]対角線ACと対角線BDは、点Eで垂直に交わる。このとき (1)点Eを通るBCに垂直な直線と辺ADの交点をFとすれば、AF=FDであることを示せ。
(2)辺ADの中点Fと点Eを結ぶ直線は辺BCと垂直に交わることを示せ。

(考)(1)直線EFと辺BCの交点をHとします。条件[I]から、円周角の移動がまず考えられます。角を考えると、条件[II]から、皆さん御存知の  (3つの直角三角形は相似)が思い浮かびます。結論は、AF=FD。これは、直角三角形AEDの斜辺の中点がFということです。AF=FD=FEとつなぐことを考えます。




(2) (1)とは逆に、ADの中点FとEを結ぶ直線は、BCと直角に交わるということです。∠BHE=∠EHCがいえれば、∠BHE=∠EHC=90°ということになります。または、直角三角形BEC∽ΔBHEを示しても、∠BEC=90°だから、∠BHE=90°がいえます。直角三角形BCE∽ΔECHを示してもOK。

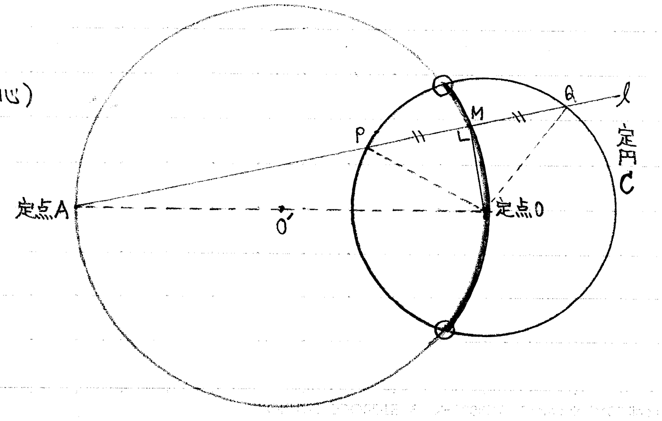
(解)(1)直線EFと辺BCの交点をHとする。∠CHE=90°だから、CEを直径とする円がかけて
CE⊥BDだから、BDはこの円の接線。したがって接弦定理より、∠HCE=∠BEH※=∠FED(対頂角)
弧$\overset{\frown}{AB}$の上にたつ円周角 ∠ACB=∠ADB ∴∠HCE=∠FDE よって ∠FED=∠FDE
ΔFEDは二等辺三角形となるから、FE=FD ---①
∠BHE=90°だから、BEを直径とする円がかけて、BE⊥ACだから、ACはこの円の接線。したがって、接弦定理より、
∠HBE=∠CEH※=∠AEF(対頂角) 弧$\overset{\frown}{CD}$の上にたつ円周角 ∠CBD=∠CAD ∴∠HBE=∠EAF よって ∠AEF=∠EAF
ΔFEAは二等辺三角形となるから FE=AF ---② ①,②より AF=FD
(補)※3つの直角三角形 ΔEBC∽ΔHBE∽ΔHEC からも ∠HCE=∠BEH, ∠HBE=∠CEH がいえます。

(2)直線FEと辺BCの交点をHとする。
∠AED=90°だから、直角三角形AEDは、斜辺ADの中点Fを外心とする外接円がかける。∴FA=FD=FE
よって、ΔFEDは、二等辺三角形であり、∠FDE=∠FED=∠BEH(対頂角) 弧$\overset{\frown}{AB}$の上にたつ円周角∠ADB=∠ACBだから
∠FDE=∠ECH ∴∠BEH=∠ECH(=∠BCE) ΔBHEと直角三角形BECにおいて、∠B共通であり、∠BEH=∠BCEであったから、2角が等しいことにことにより、ΔBHE∽直角三角形BEC ∴∠BHE=∠BEC=90°となり、示された。
(補)ΔBHE∽ΔEHCを示しても∠BHE=∠EHCとなり、∠BHE+∠EHC=180°だから、∠BHE=∠EHC=90°となり示されます。

---

問、定点Oを中心とする定円Cの外側に定点Aがある。定点Aを通る直線$\ell$と定円Cの交点を点P,点Qとする。
線分PQの中点Mの軌跡を作図せよ。(軌跡は動くところという意味です)

(解)弦PQの中点がMだから、常に∠OMP=90°。
したがって、求める軌跡は、OAを直径(右図O'が中心)とする円のうち、定円Cの内部にある円弧である。
(右図、太線部、白丸を除く)

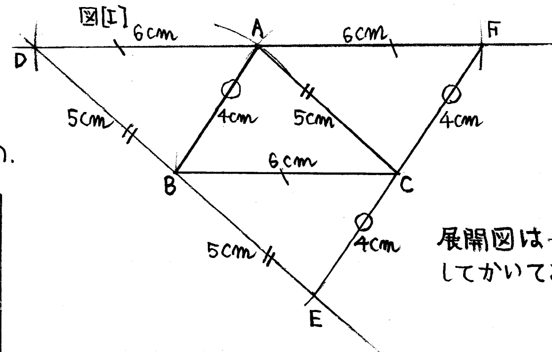


32.(1) AB=4cm, BC=6cm, CA=5cm である△ABCを、B4の大きさの用紙の真ん中あたりに作図せよ.

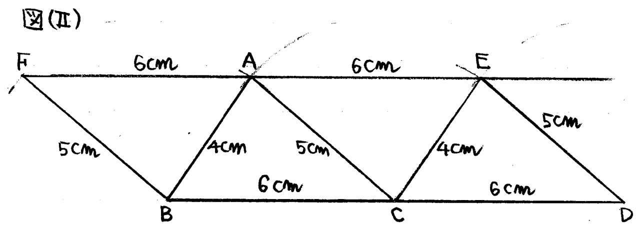
(2). (1)でかいた鋭角三角形(全ての角が90°より小さい三角形)を4つ用いると、四面体ができる. この四面体を等面四面体という. (1)でかいた△ABCを4つ用いて等面四面体を作るとき、そのときの展開図を(1)に作図せよ.

[解](2)展開図は、2種類あります. 図[I]は、AB//FE, BC//DF, AC//DEであり、3つの四辺形ABCF, ABEC, ADBCは、全て平行四辺形, 図[II]は、AB//EC, BD//FE, AC//FB//EDであり、4つの四辺形ABCE, ACDE, AFBC, BDEF, は、全て平行四辺形です.

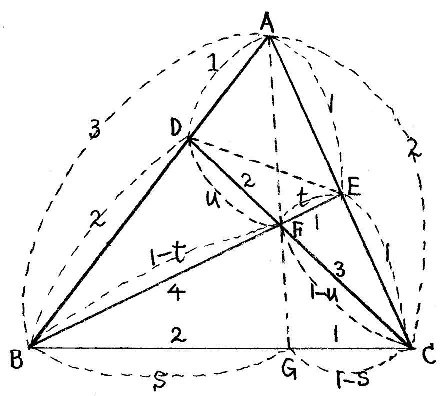
[補](2)でかいた展開図を切りぬいて、等面四面体ができることを確かめよ.
意欲ある人は、高校生用の索引を調べて下さい.




展開図は$\frac{1}{2}$に縮小してかいてあります.




P.32の(2)の[類]の続きです.




(解2) チェバの定理より、$1\times s\times 1=2\times(1-s)\times 1$　$s=2-2s$　$s=\frac{2}{3}$　∴$BG:GC=\frac{2}{3}:1-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=2:1=\boxed{エ}:\boxed{オ}$

メネラウスの定理より、$2\times t\times 2=1\times(1-t)\times 1$　$4t=1-t$　$t=\frac{1}{5}$　∴$EF:FB=\frac{1}{5}:\frac{4}{5}=1:4$

△DFE=1(面積)とすると、EF:FB=1:4より△BFD=4　△BED=△BFD+△DFE=4+1=5

BD:DA=2:1より、△ADE$=\frac{1}{2}\times$△BED$=\frac{1}{2}\times 5=\frac{5}{2}$　AE:EC=1:1より△ADE=△CED$=\frac{5}{2}$

△CEF=△CED−△DFE$=\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$, 四角形ADFE=△DFE+△ADE$=1+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$

よって、$\boxed{ア}:\boxed{イ}:\boxed{ウ}=\frac{7}{2}:4:\frac{3}{2}=7:8:3$

(補) もう1つメネラウスの定理を用いて、DF:FCを求めると、$3\times u\times 1=2\times(1-u)\times 1$　$3u=2-2u$　$5u=2$　$u=\frac{2}{5}$

∴$DF:FC=\frac{2}{5}:\frac{3}{5}=2:3$　△DFE=1とすると、△CEF$=\frac{3}{2}\times 1=\frac{3}{2}$　AE:EC=1:1より△ADE=△CED=△DFE+△CEF$=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$, EF:FB=1:4より△BFD=△DFE×4=1×4=4　以下上(解2)と同様.

・チェバの定理を利用すると(Best), BG:GC=2:1だから、△ABF:△ACF=2:1, △ADF=1とおくとAD:DB=1:2より△BFD=2, △ABF=△ADF+△BFD=1+2=3　したがって、△ACF=△ABF$\times\frac{1}{2}=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$　AE:EC=1:1より、△AFE=△CEF=△ACF$\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

よって $\boxed{ア}:\boxed{イ}:\boxed{ウ}$=△ADF+△AFE:△BFD:△CEF$=1+\frac{3}{4}:2:\frac{3}{4}=\frac{7}{4}:2:\frac{3}{4}=7:8:3$ (Best)

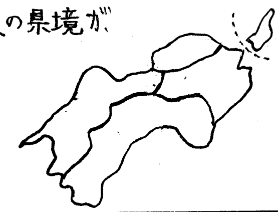
かけはし

## 塗り分け問題

[類] 次は、四国4県を色で塗り分ける数学としての設問です。右図に、四国4県の県境が書いてある。今、4色の異なる色を用意する。

(1) 異なる4色全てを用いて塗り分ける方法は、何通りあるか。

(2) 塗り分ける方法は何通りあるか。隣りあう色が異なればよい。



[考] (2) 始めに、4色が用意してあるから、このうちの3色を用いてもOKです。

模式化

| ① | ④ / ③ |
|---|---|
| ② | |

[解] 模式化すると右図、各県を①,②,③,④，用意してある4色をA,B,C,Dとする。

(1) 異なる4色全てを用いるから、①,②,③,④の順に4色A,B,C,Dを入れる。

①は4通りの選び方、例えばAを入れると②は、B,C,Dの3通りの選び方、例えば、Bを入れると、③は、C,Dの2通りの選び方、④は、③で選ぶと自動的に決まってしまう。よって $4\times3\times2=\underline{24}$ 通り $(4!=24)$

(補) Black Vol. I $\boxed{\text{中学から高校へのかけはし}}$ P.26を復習する。

| 答 | (1) 24通り<br>(2) 48通り |
|---|---|

(2) 用意してある異なる4色のうち、1色 or 異なる2色を用いて、塗り分けることはできない。

3色を用いる場合 (A,B,C) (A,B,D), (A,C,D), (B,C,D) の4通りの色の選び方ができる。$({}_4C_3=4)$

例えば、(A,B,C)の場合、3色で4つの部分①,②,③,④を塗り分けるのだから、3色のうち、いずれか1色は、2度用いることになる。2度用いる色で3通りある。例えば、Aを2度用いてA,A,B,Cとする。A,Aは、必ず②,④でなければならず、①,③には、(①,③)≡(B,C),(C,B)の2通りの塗り方がある。

よって、3色を用いる場合は $4\times3\times2=24$ (通り)

求める塗り分ける方法の数は、(1)で求めた異なる4色全てを用いる場合との和であり、$24+24=\underline{48通り}$

(補) $\boxed{\text{かけはし}}$ P.26の(6)にもあります。

---

P.26の(4)の[類] AABBCCの6文字を全て用いてできる順列の個数Nを求めよ。

(考) A,B,Cをそれぞれ1,2,3とすると「1,1,2,2,3,3,の6つの数字を全て用いてできる6桁の整数の個数Nを求めよ。」あるいは、「$\boxed{A}\boxed{A}\boxed{B}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{C}$とかいてある6枚のカードを全て並べると何通り(N通り)の並べ方があるか」ということです。

(解1) 全ての順列がN通りあるとすると、AABBCCと並ぶpro.は、$\frac{1}{N}$である。一方、1枚ずつ並べるとすると、そのpro.は $\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{90}$ である。(C,Cは、pro.1で自動的に決まる) したがって $\frac{1}{N}=\frac{1}{90}$ $\therefore \underline{N=90}$

(解2) 6つの桁目 □□□□□□ を作っておき、6つの桁目から2つの桁目を選び $({}_6C_2)$、2つのAを入れ、残り4つの桁目から2つの桁目を選び $({}_4C_2)$ 2つのBを入れる。残り2つの桁目は自動的に2つのCに決まる。

したがって $\underline{N}={}_6C_2\times{}_4C_2=\frac{6!}{\cancel{4!}2!}\times\frac{\cancel{4!}}{2!2!}=\frac{6\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot3\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}}=\underline{90}$

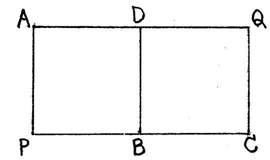
(解3) treeをかく。対称性から、A,B,Cから始まるものは、それぞれ同数個あるから、Aから始まるものを求めて3倍する。更に、Aから始まるものについて、残りは、A,B,B,C,Cであるから、A−A<$^B_C$ は同数個，その他、同数個になるものも考えながら、数える。

A−A < B < B−C−C / C < B−C, C−B ③ ; C ------ ③

A−B < A < B−C−C / C < B−C, C−B ③ ; B ------ ③ ; C < A < B−C, C−B ② ; B ------ ② ; C ------ ②

A−C は左A−Bに同じ　したがって $\underline{N}=\{3+3+(3+3+2+2+2)\times2\}\times3=\underline{90}$

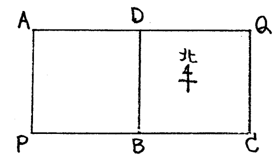
37. [1] 最短距離でP町からQ町まで向かう路線バスがある。バスは等確率で路線を走る。バス停は、A, B, C, Dの4ヶ所ある。今、どのバス停を通るかもわからず「Q町行き」とだけかいてある1台のバスに跳び乗り、P町からQ町へ向かった。




(1) 路線は、何本あるか

(2) 終点Q町に、おりることができる確率とバス停A, B, C, Dでおりることができる確率をそれぞれ求めよ。

[2] 最短距離でP町からQ町まで、バイクで行くことにする。分岐点では、コインを1回なげ、表が出たら東(右)へ、裏が出たら北(上)へ向かうことにする。今、コインをなげてP町を出発し、Q町へ向かう。(分岐点で留まるようなことはない)




(1) P町からQ町まで行く方法の数は、何通りあるか。

(2) Q町に着く確率と、地点A, B, C, Dを通る確率をそれぞれ求めよ。

[考] [1]と[2]の違いは、何でしょう。バスは、等確率で走行路線が決まっている。バイクはまず出発点Pでコインをなげて、A方向かB方向かを決めなければなりません。バイクは、地点Dでは、分岐点ではあるが、最短距離を進むので、Q方向に行くしかなく、コインをなげる必要はありません。確率の問題で確率が1より大きいことはありません。確率0はあります。本問でD→A, D→Bなどは、確率0です。

| 答 | |
|---|---|
| | [1] (1) 3本 (2) Q:1, A: $\frac{1}{3}$, B: $\frac{2}{3}$, C: $\frac{1}{3}$, D: $\frac{2}{3}$ |
| | [2] (1) 3通り (2) Q:1, A: $\frac{1}{2}$, B $\frac{1}{2}$, C: $\frac{1}{4}$, D: $\frac{3}{4}$ |

[解] [1] (1)

P — A — D — Q …①
P — B — D → Q …②
P — B — C — Q …③

①, ②, ③の路線 3本

(2) Q町におりることができるpro.(probability 確率の略)は、必ず、3本の全ての路線でQに着くから求めるpro.は 1

(別解1) ①, ②, ③の3本の路線全てでQに着くから $\frac{3本}{3本}=1$ $\left(\frac{Qに着く路線の数}{全ての路線の数}ということ\right)$

(別解2) ① or ② or ③の路線を選ぶpro.はそれぞれ $\frac{1}{3}$、よって、$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$ (①, ②, ③はQにつく路線)

A停におりることができるpro.は、①の路線のみで、$\frac{1本}{3本}=\frac{1}{3}$ ((別解) ①の路線を選ぶpro.は、Pの時点で $\frac{1}{3}$)

B停におりることができるpro.は、②, ③の2つの路線で、$\frac{2本}{3本}=\frac{2}{3}$ $\left(\frac{Bを通る路線の数}{全ての路線の数}ということ\right)$

(別解) ② or ③の路線を選ぶpro.は、それぞれ $\frac{1}{3}$ よって $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

C停におりることができるpro.は、③の路線のみで、$\frac{1本}{3本}=\frac{1}{3}$ ((別解) ③の路線を選ぶpro.は、Pの時点で $\frac{1}{3}$)

D停におりることができるpro.は、①, ②の2つの路線で、$\frac{2本}{3本}=\frac{2}{3}$

(別解) ① or ②の路線を選ぶpro.は、それぞれ $\frac{1}{3}$ よって $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

[2] (1) 最短距離で行くのは[1]の(1)と同じで 3通り

(2) Qに着くpro.は、①, ②, ③どのコースも必ずQに着くのだから、求めるpro.は 1

(別解) 表は㋐、裏は㋒とする。

(ア) ①のコースでQに着く場合　Pで㋒(pro. $\frac{1}{2}$)が出れば、Aに向かい、Aではコインはなげずに Dに向かう。Dでは、引き返すことはなく、最短でQに行くのだから、Dでコインはなげずに、必ずQに向かう。したがって、Pで㋒が出れば、必ず①のコースでQに着く。したがって $\frac{1}{2}$

次頁に続く

(イ) ②のコースでQに着く場合　Pで㋑$(pro. \frac{1}{2})$が出て、Bに向かい、Bで㋒$(pro. \frac{1}{2})$が出てDに向かう。
Dで引き返したり、留まったりすることもなく、最短でQに行くのだから、
コインをなげることなくQに向かう。したがって $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(ウ) ③のコースでQに着く場合　Pで㋑$(pro. \frac{1}{2})$が出て、Bに向かい、Bで㋑$(pro. \frac{1}{2})$が出て、Cに向かう。
Cでコインをなげる必要はなくQに向かう。したがって $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(ア)+(イ)+(ウ)がQに着くpro.であり $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\underline{1}$

Aを通るpro. ①のコースでQに着く場合だから、上述の(ア)より $\underline{\frac{1}{2}}$
(別解) Pで㋒が出ればよいので $\underline{\frac{1}{2}}$

Bを通るpro. ② or ③のコースでQに着く場合だから、上述の(イ)、(ウ)より $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\underline{\frac{1}{2}}$
(別解) Pで㋑が出ればよいので $\underline{\frac{1}{2}}$

Cを通るpro. ③のコースでQに着く場合だから 上述の(ウ)より $\underline{\frac{1}{4}}$
(別解) Pで㋑ and Bで㋑が出ればよいので $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\underline{\frac{1}{4}}$

Dを通るpro. ① or ②のコースでQに着く場合だから $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\underline{\frac{3}{4}}$
(別解) (Pで㋒が出て、$P\xrightarrow{\frac{1}{2}}A\xrightarrow{1}D$) or ((Pで㋑) and (Bで㋒)が出て $P\xrightarrow{\frac{1}{2}}B\xrightarrow{\frac{1}{2}}D$)
したがって $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\underline{\frac{3}{4}}$

[類1] サイコロ3個を同時に1回なげる。(1) 4,5,6の目が出るpro.を求めよ。(2) 5と6の目が必ず出て、5,6以外の目は出ていないpro.を求めよ。

(考1) サイコロは、全て異なるものとして考え、Ⓐ,Ⓑ,Ⓒのサイコロをなげるとします。全ての目の出方として $6\times6\times6$ 通りあります。

(1) (4,5,6)の目の出方は何通りありますか。全部かき出せば、どうなりますか。かき出さなくても、4,5,6を並びかえるだけ。すなわち(4,5,6)の順列です。※補 $\dfrac{(4,5,6)\text{の目の出方の数}}{\text{全ての目の出方の数}}$

(2) 例えば、(5,6,2)はダメ、(5,5,5)もダメ、(5,6,6)はOK、--- (5が1つと6が2つ) or (5が2つと6が1つ)
次のように考えることもできます。Ⓐ Ⓑ Ⓒ (各々5か6) $2\times2\times2$ 通りから、5だけの(5,5,5)と6だけの(6,6,6)の2通りを引く。----①

| Ⓐ | Ⓑ | Ⓒ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 3 |
| 4 | 4 | 4 |
| 5 | 5 | 5 |
| 6 | 6 | 6 |

上の表を用いて考えなさい

(解1) 全ての目の出方は $6\times6\times6$ 通り

(1) (4,5,6)の目の出方は、$3!=3\times2\times1=6$ 通り したがって $\frac{6}{6\times6\times6}=\underline{\frac{1}{36}}$
(別解) (4,5,6)を全て並べてかき出すと (4,5,6)(4,6,5)(5,4,6)(5,6,4)(6,4,5)(6,5,4)の6通り
したがって $\frac{6}{6\times6\times6}=\frac{1}{36}$
※補

(2) 題意の目の出方は $2\times2\times2-2=8-2=6$ 通り したがって $\frac{6}{6\times6\times6}=\underline{\frac{1}{36}}$ ----①からです。
(別解) (ア) 5が1つ、6が2つの場合 (5,6,6)(6,5,6)(6,6,5) 3通り
(イ) 5が2つ、6が1つの場合 (5,5,6)(5,6,5)(6,5,5) 3通り
} 6通り したがって $\frac{6}{6\times6\times6}=\underline{\frac{1}{36}}$

※補 順列については、P.26の(1)~(6)参照、「題意の目の出方」とは、問題文の「5と6の目が必ず出て、5,6以外の目は出ていない」ということです。数学には、独特の言い廻しがあります。そのうちに慣れてくるでしょう。

(考2) サイコロを3個同時になげても止まるときは、同時には止まりません。0.0001秒の差がある？とすれば、1個のサイコロを、3回順になげても同じことです。しかし、これには、順番があることに注意です。

(解2) 1個のサイコロを3回なげると考える。1,2,3,4,5,6の目が出るpro.は、サイコロ1個を1回なげるときは、それぞれ$\frac{1}{6}$である。

(1) 4,5,6の順に目が出るとき、そのpro.は$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$、(4,5,6)の並びかえ(順列)は$3!=6$通り よって$\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\right)\times 6=\underline{\frac{1}{36}}$

(2) (ア) 5,5,6の順に目が出るとき、そのpro.は$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$　(5,5,6)の順列は$\frac{3!}{2!}=3$通り《(5,5,6),(5,6,5),(6,5,5)の3通り》

(イ) 5,6,6も(ア)と同様

したがって、求めるpro.は (ア)+(イ)　$\left\{\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\right)\times 3\right\}\times 2=\underline{\frac{1}{36}}$

(補) pro.の求め方には、上の(解1)全ての場合を利用する、(解2)1回毎を利用をする の2つの方法があります。2つの方法をミックスしても、勿論OK。高校生になると、もっと沢山の方法を学びます。今、根本となるものを学習しています。

[類2] サイコロ3個を同時に1回なげる。(1) 5の目が出ている(5の目が少なくとも1つは出ている)pro.を求めよ。

(2) 5,6の目が少なくとも1つは出ているpro.を求めよ。

(考) [類1]の(解1)、(解2)どちらで解くか、(1) 5の目が1個でも出ていればOKです。目の出方には、5の目でわけると次の(ア)、(イ) 2通りしかありません。(ア) 5の目が全く出ていない、つまり(1,2,3,4,6)の目だけが出ている、という事。(イ) 5の目が、1つか、2つか、3つか知らないが、とにかく5の目が出ている。「(イ)のpro.を求めよ」ということです。(ア)のpro.+(イ)のpro.=1です。

(2) (ア)、(イ)の2通りあります。(ア) 5,6の目は1つも出ていない (イ) どれか1つには、5 or 6の目が出ている。1個でも5の目が出ていればよい《例えば、(5,1,1),(5,1,2),(5,5,3),(5,5,5)》あるいは、1個でも6の目が出ていればよい《(6,1,1),(6,1,2)など》勿論(5,6,6),(5,6,1),(5,6,6)など5と6がまじっていてもよい。「5,6の目が少なくとも1つでている」を否定すると、「5,6の目が全く出ていない」《(1,2,3,4)の目だけが出ている》ということになります。

(解) 全ての目の出方は、6×6×6通り。

(1) 5の目が1つも出ていないのは、(1,2,3,4,6)の目だけが出ているということであり、この方法の数は、5×5×5通り。したがって5の目が1つも出ていないpro.は$\frac{5\times5\times5}{6\times6\times6}=\frac{125}{216}$ ($\fallingdotseq 0.58$)

したがって、求めるpro.は$1-\frac{125}{216}=\underline{\frac{91}{216}}$ ($\fallingdotseq 0.42$)

(1)の表

| Ⓐ | Ⓑ | Ⓒ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 3 |
| 4 | 4 | 4 |
| ~~5~~ | ~~5~~ | ~~5~~ |
| 6 | 6 | 6 |

5×5×5=125通りは、重複を許して3つとる順列ということです。組合せではありません。

(2) 5,6の目が全く出ていないのは、(1,2,3,4)の目だけが出ている場合だから4×4×4通り。したがって、5,6の目が全く出ていないpro.は、$\frac{4\times4\times4}{6\times6\times6}=\frac{2\times2\times2}{3\times3\times3}=\frac{8}{27}$

したがって、求めるpro.は$1-\frac{8}{27}=\underline{\frac{19}{27}}$　((2)の表は、自分でかいてね)

(補) (1) 5の目が少なくとも1つは出ている場合の数は、$6\times6\times6-5\times5\times5=216-125=91$通り。よって求めるpro.は$\underline{\frac{91}{216}}$

5の目が少なくとも1つは出ている場合の数をdirectに数えると、次の(ア),(イ),(ウ)の和です。よって75+15+1=91通り

(ア)

| Ⓐ | Ⓑ | Ⓒ | Ⓐ | Ⓑ | Ⓒ | Ⓐ | Ⓑ | Ⓒ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | | 2 | | 2 | | 2 | 2 |
| 3 | 3 | | 3 | | 3 | | 3 | 3 |
| 4 | 4 | | 4 | | 4 | | 4 | 4 |
| 6 | 6 | | 6 | | 6 | | 6 | 6 |

5×5通り　5×5通り　5×5通り

(5×5)×3=75通り

(イ)

| Ⓐ | Ⓑ | Ⓒ | Ⓐ | Ⓑ | Ⓒ | Ⓐ | Ⓑ | Ⓒ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 5 |
| 2 | | | | 2 | | 2 | | |
| 3 | | | | 3 | | 3 | | |
| 4 | | | | 4 | | 4 | | |
| 6 | | | | 6 | | 6 | | |

5通り　5通り　5通り

5×3=15通り

(ウ)

| Ⓐ | Ⓑ | Ⓒ |
|---|---|---|
| 5 | 5 | 5 |

1通り

かけさし



[類3] サイコロ4個を同時に1回なげるとき、次の問いに答えよ.(勿論、1～6の各目は、同じ確率で出ることとします.)

(1) 6の目が、1つでも出ていれば、君の勝ち.6以外の目が出ていれば、先生の勝ちです.君と先生のどちらが勝つpro.(確率の略)が高いだろうか

(2) 全ての目の積が、偶数ならば、君の勝ち.奇数ならば、先生の勝ちです.君と先生のどちらが勝つpro.が高い?

(3) 全ての目の和が、偶数ならば、君の勝ち.奇数ならば、先生の勝ちです.君と先生のどちらが勝つpro.が高い?

(解)は、P.27の(6)にあります.

(考) 例1「サイコロ2個を同時になげるとき、上の(1),(2),(3)はどうなるか」2つの方法でやってみます.どちらの方法でも、できるようにしておきましょう.

説明.サイコロ2個を同時になげるといっても、実際には、同時に止まることはなく、0.01秒の差で止まる?.

それならば、「サイコロ1個を2回なげる」としても、同じことです.以下、これを用います.

(1)の「6の目が1つでも出ている」というのを数学では、「6の目が少なくとも1つ出ている」といいます.

これの反対は「6の目が全く出ていない」すなわち、「1 or 2 or 3 or 4 or 5 の目が出ている」ということです.

(1) (その1)「6以外の目が出ている」とは「1 or 2 or 3 or 4 or 5 の目が出ている」ということであり、1回目 $\frac{5}{6}$,2回目 $\frac{5}{6}$ のpro.

だから $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{36}$ のpro.で6以外の目が出ている.したがって「6の目が1つでも出ている」pro.は

$1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$ (6以外の目が出ている⇔6の目が全く出ていない⇔1 or 2 or 3 or 4 or 5 の目が出ている)

(その2) 全ての目の出方は、1回目6通り、2回目6通りだから、$6\times 6=6^2=36$ 通り、そのうち6以外の目が出ているのは $5\times 5=25$ 通り.したがって、6以外の目が出ているpro.は $\frac{25}{36}$,6の目が1つでも出ているpro.は $1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$

(その1)でpro.を求めると、6以外の目が出ている場合の数は、全ての場合の数 $\times\frac{25}{36}=6^2\times\frac{25}{36}=25$ 通りです.

(2),(3)は、サイコロの6面にグ(偶数)が3つとキ(奇数)が3つかいてある.すなわち、1回なげるときグが出るpro.は $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,キが出るpro.は $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ です.

(2) (その1) 全ての目の積は、グかキかの2種類.積がキとなるのは、1回目,2回目ともにキのときだから、そのpro.は、

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,積がグとなるPro.は $1-$(積がキとなるpro.)$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

tree(樹形図)をかけば下

| 1回目 | 2回目 | 積 | 和 |
|---|---|---|---|
| グ | グ | グ | グ |
| | キ | グ | キ |
| キ | グ | グ | キ |
| | キ | キ | グ |

(その2) 全ての目の出方は(1回目,2回目)=(グ,グ)(グ,キ)(キ,グ)(キ,キ)の4通り

そのうち積がグとなるのは、3通り.よってそのpro.は $\frac{3}{4}$

積がキとなるのは、1通り.よってそのpro.は $\frac{1}{4}$

(3) (その1) 和がグとなるのは、(1回目,2回目)=(グ,グ) or (キ,キ)のとき.したがって

そのpro.は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

和がキとなるのは、(1回目,2回目)=(グ,キ) or (キ,グ)のとき.したがって

そのpro.は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

(その2) 全ての目の出方は $2\times 2=4$ 通り.そのうち和がグとなるのは(グ,グ),(キ,キ)の2通り.したがって和がグとなるpro.は $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$,和がキとなるのは(グ,キ),(キ,グ)の2通り.したがって、そのpro.は $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

treeが、かけるのは、せいぜい3回ぐらいまでで、それ以上になると大変です.ただし、規則性とか対称性に着目すると、うまくいく場合もあります.次に、サイコロ3個の場合をやってみましょう.

積がキとなるのは、全ての出た目がキの場合しかなく、積がグとなるのは、全ての出た目の中に、1つでもグがあればよいということです.和については、対称性を考えると、グ,キ,どちらのpro.も $\frac{1}{2}$ であるのは当然のことでしょう.

例2 「サイコロ3個を同時になげるとき」はどうなるか---1個を順に3回なげるとして考えてみます.

(1)(その1) 全ての場合を2つに分けると(i)6の目が少なくも1つは出ている.(6の目が1つでも出ている)と(ii)6の目が1つも出ていない.(1,2,3,4,5の目だけが出ている)である. 2つの場合のpro.の和は1であることを利用する.

(ii)は、1,2,3回目の全てで1,2,3,4,5の目が出ているのだから、そのpro.は $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$

したがって(i)のpro.は $1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$

(その2) 全ての目の出方は $6\times6\times6=6^3=216$ 通り、そのうち「6以外の目が出ている」すなわち「1,2,3,4,5の目だけが出ている」のは、$5\times5\times5=5^3=125$ 通り. よって「6以外の目が出ている」pro.は $\frac{125}{216}$

「6の目が1つでも出ている」pro.は $1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$

(その1)

(2) 積は、グとなるかキとなるかの2種類しかない. 積がキとなるのは、1,2,3回目全てで1,3,5の目だけが出るときであるから、積がキとなるpro.は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$, 積がグとなるpro.は $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

(その2) 全ての目の出方は $6^3=216$ 通り. 積がキとなるのは、各回とも1,3,5の目が出るときだから、$3\times3\times3=3^3=27$ 通り

したがって、積がキとなるpro.は $\frac{27}{216}=\frac{1}{8}$ $\left(\frac{3\times3\times3}{6\times6\times6}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\right.$ とすれば、計算がeasy.)

積がグとなるpro.は、$1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ (サイコロに、グ,グ,グ,キ,キ,キとかいてあれば、全ての目の出方は $2^3=8$ 通り、積がキとなるのは、$1^3=1$ 通りとして、積がキとなるpro.は $\frac{1}{8}$ です.)

(3)(その1)(サイコロ2個を同時になげるときのpro.を利用してみます. 高校で習う確率漸化式の基本の考え方です.)

サイコロ2個をなげる(サイコロ1個を2回なげる)とき、グのpro.は $\frac{1}{2}$, キのpro.は $\frac{1}{2}$ であった.

次にもう1回、サイコロをなげる(3回目をなげる)とき、和がグとなるpro.は、次の(i),(ii)のpro.の和である.

(i) 2回なげたとき和がグ and 3回目グの目が出る. $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(ii) 2回なげたとき和がキ and 3回目キの目が出る. $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

したがって、求めるpro.は $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

(その2) サイコロにグ,グ,グ,キ,キ,キとかいてあるとして、和がグになるのは、(1回目,2回目,3回目)=(グ,グ,グ)(グ,キ,キ)(キ,グ,キ)(キ,キ,グ)の4通り. 全ての場合は $2^3=8$ 通りだから、和がグのpro.は $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

和がキのpro.は 1-(和がグのpro.) $=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(補) 目の出方についてはtree(樹形図)をかけば、わかりますが、次のように考える方法も大切です.

(i)グが3回の場合(グ,グ,グ)の1通り. (ii)グが2回、キが1回の場合、並べかえを考えて(グ,グ,キ)(グ,キ,グ)(キ,グ,グ)の3通り

(iii)グが1回、キが2回の場合(グ,キ,キ)(キ,グ,キ)(キ,キ,グ)の3通り (iv)グが0回、キが3回の場合(キ,キ,キ)の1通り

全ての場合は、(i)+(ii)+(iii)+(iv)=1+3+3+1=8通り.

6が少なくとも1つは出ている(6の目が1つでも出ている)場合の数をdirectに数えてみます.

1 or 2 or 3 or 4 or 5 の目が出ることをAとしておきます. Aは5通りあります.

(i) 6が1コの場合 (6,A,A)(A,6,A)(A,A,6)---$(1\times5\times5)\times3=75$ 通り

(ii) 6が2コの場合 (6,6,A)(6,A,6)(A,6,6)---$(1\times1\times5)\times3=15$ 通り

(iii) 6が3コの場合 (6,6,6)の1通り

よって (i)+(ii)+(iii)=75+15+1=91通り

さて[類3]の(解)です.

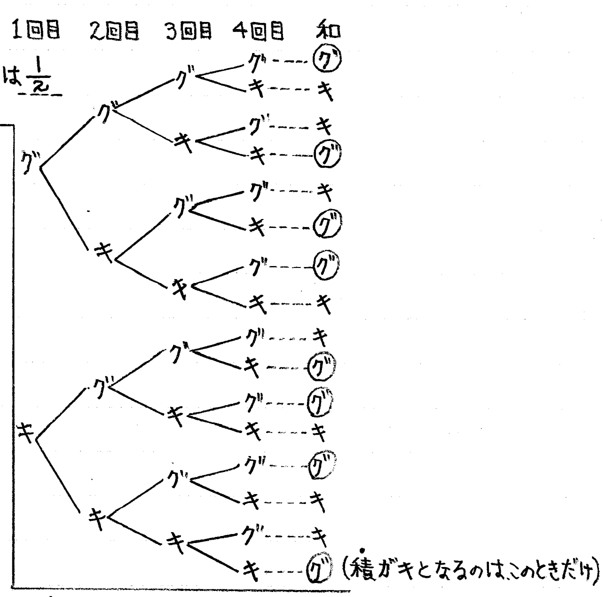
[類3]の(解) 1個のサイコロを4回なげて,その目を順に考えることとする.(グは偶数,キは奇数を表す.)

(1) A:6の目が1つでも出ている.(6の目が少なくとも1つ出ている.), B:6以外の目が出ている.(1 or 2 or 3 or 4 or 5の目が出ている.)
全ての場合は,A or Bのいずれかである.したがって Aのpro.(確率の略)を$P_A$, Bのpro.を$P_B$とすれば,$P_A+P_B=1$を利用する.
$P_B$は,1回目〜4回目,全ての回で1 or 2 or 3 or 4 or 5の目が出ればよいから,$P_B=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25\times25}{36\times36}=\frac{625}{1296}$ ($\fallingdotseq 0.482$)
$P_A=1-P_B=1-\frac{625}{1296}=\frac{671}{1296}$ ($\fallingdotseq 0.518$) (君の勝つpro.の方が少しだけ高い)

(2) 4回なげたとき積はグ or キのいずれかである.(サイコロの6面に1,1,1,2,2,2とかいてある,あるいは,グ,グ,グ,キ,キ,キとかいてあるサイコロをなげると考えても同じこと) 積がキとなるpro.+積がグとなるpro.=1.を利用する.
積がキとなるpro.は,1回目〜4回目全ての回でキが出るときだから,積がキとなるpro.$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$
積がグとなるpro.は,1−積がキとなるpro.$=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$ (君の勝つpro.の方が断然高い)

(3) 和は,グ or キのいずれかである.サイコロの6面のうち,3面にグ,グ,グ,残りの3面にキ,キ,キ(あるいは,3面に1,1,1,残りの3面に2,2,2,)とかいてあるサイコロを考える.4回なげたとき,出た目のグ,キの個数で場合分けをすると,(ア) 4回全てグの目 (イ) 3回グの目,1回キの目 (ウ) 2回グの目,2回キの目 (エ) 1回グの目,3回キの目 (オ) 4回全てキの目 のいずれかである.
(ア)〜(オ)のうち,和がキとなるのは,(イ) or (エ) の場合である.(イ)のpro.はサイコロ1個を順に4回なげるのだから,
(1回目,2回目,3回目,4回目,)=(グ,グ,グ,キ)(グ,グ,キ,グ)(グ,キ,グ,グ)(キ,グ,グ,グ)の4通りある.グ,グ,グ,キの順に出るpro.は,
$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$,残りの3通りも同じpro.だから,(イ)のpro.は$\frac{1}{16}\times4=\frac{1}{4}$, (エ)のpro.も同じように$\frac{1}{4}$
したがって,和がキとなるpro.は(イ)+(エ)$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ 和がグとなるpro.は$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ (君と先生,引き分けでした.)

(別解1) 1〜6でやったら大変です.グ,キでtreeをかきます.
右.treeより,和がグのpro.は$\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$,和がキのpro.は$\frac{1}{2}$




(別解2)
- 1回目グのpro.$\frac{1}{2}$, 1回目キのpro.$\frac{1}{2}$
- 2回なげたときの和がグのpro.
  =(1回目グand 2回目グの目) or (1回目キ and 2回目キの目)
  $=(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$
  2回なげたときの和がキのpro.$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
- 3回なげたときの和がグのpro.
  =(前2回の和がグ and 3回目グの目) or (前2回の和がキ and 3回目キの目)$=(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$
  3回なげたときの和がキのpro.$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
- 4回なげたときの和がグのpro.
  =(前3回の和がグ and 4回目グの目) or (前3回の和がキ and 4回目キの目)
  $=(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$
  4回なげたときの和がキのpro.$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

38. 次を計算せよ. $(n=1,2,3,\cdots)$

(1) $(-2)^7-(-2^7)$ (2) $(-2)^7+(-2^7)$ (3) $(-2)^{2n+1}-(-2^{2n+1})$ (4) $(-2)^{2n+1}+3\times2^{2n}-(-2)^{2n}$ (5) $\dfrac{3+\sqrt3}{3-\sqrt3}-\dfrac{3-\sqrt3}{3+\sqrt3}$

(6) $\angle C=90^\circ$ の直角三角形ABCにおいて、$AB=\sqrt3+\sqrt2-1$, $BC=\sqrt3-\sqrt2+1$, のとき $CA=\square\sqrt{\sqrt{\square}-\sqrt{\square}}$ (□は正の整数)

[考] (1) $(-2)^{キスウ}=-2^{キスウ}$ です. (4) $2^{2n}$ をくくり出す. (5) 高校では、有理化を習いますが、ここでは通分すると考えます.
更に、分母を $3-\sqrt3=\sqrt3(\sqrt3-1)$ などと考えると、----。$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ を利用する計算は大切です.[補]参照.
(6) ルートの中にルート?, 高校ですが、計算は君にもできます.

[解] (1) $(-2)^7-(-2^7)=-2^7+2^7=\underline{0}$ (2) $(-2)^7+(-2^7)=-2^7-2^7=-(2^7+2^7)=-(2\times2^7)=-2^8=-2^3\times2^3\times2^2=-8\times8\times4=\underline{-256}$

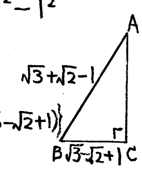
(補) $2^7=2^3\times2^3\times2=8\times8\times2=128$ と簡単に求まりますが---。$2^8=2^4\times2^4=16\times16=256$ のようにもできます.

(3) $2n+1$ は奇数だから $(-2)^{2n+1}-(-2^{2n+1})=-2^{2n+1}+2^{2n+1}=\underline{0}$

(4) $(-2)^{2n+1}+3\times2^{2n}-(-2)^{2n}=-2^{2n+1}+3\times2^{2n}-2^{2n}=2^{2n}(-2+3-1)=2^{2n}\times0=\underline{0}$ (補) $(-2)^{グウスウ}=2^{グウスウ}$ です.

(5) $\dfrac{3+\sqrt3}{3-\sqrt3}-\dfrac{3-\sqrt3}{3+\sqrt3}=\dfrac{\sqrt3(\sqrt3+1)}{\sqrt3(\sqrt3-1)}-\dfrac{\sqrt3(\sqrt3-1)}{\sqrt3(\sqrt3+1)}=\dfrac{\sqrt3+1}{\sqrt3-1}-\dfrac{\sqrt3-1}{\sqrt3+1}=\dfrac{(\sqrt3+1)^2-(\sqrt3-1)^2}{(\sqrt3-1)(\sqrt3+1)}=\dfrac{\{(\sqrt3+1)+(\sqrt3-1)\}\{(\sqrt3+1)-(\sqrt3-1)\}}{(\sqrt3)^2-1^2}$

$=\dfrac{2\sqrt3\times2}{2}=\underline{2\sqrt3}$




(6) 三平方の定理より、$CA^2=AB^2-BC^2=(AB+BC)(AB-BC)=\{(\sqrt3+\sqrt2-1)+(\sqrt3-\sqrt2+1)\}\{(\sqrt3+\sqrt2-1)-(\sqrt3-\sqrt2+1)\}$

$=2\sqrt3\times(2\sqrt2-2)=2^2(\sqrt6-\sqrt3)$ $\therefore CA=\underline{2\sqrt{\sqrt6-\sqrt3}}$

[補] 高校数学を先取りした人で、$\dfrac{3+\sqrt3}{3-\sqrt3}=\dfrac{(3+\sqrt3)^2}{(3-\sqrt3)(3+\sqrt3)}=\dfrac{9+6\sqrt3+3}{9-3}=\dfrac{12+6\sqrt3}{6}=2+\sqrt3$ のように、すぐに有理化をしてしまう人がいます.勿論、それはそれで悪くはないのですが、もう少しは、式をよく見て、上の[解]のように、分母、分子から、$\sqrt3$ を出して、有理化というより、通分したら、分母が $(\sqrt3-1)(\sqrt3+1)=3-1=2$ のように、自然と有理化の形になってしまう、と考えて計算をすすめて欲しいものです.大学入試では、$\dfrac{1}{\sqrt2}$, $\dfrac{1}{\sqrt3}$ などは、特別な事情がない限り、立派な答ですが----
$(\sqrt3-\sqrt2+1)^2=(\sqrt3)^2+(-\sqrt2)^2+1^2+2\times\sqrt3\times(-\sqrt2)+2\times(-\sqrt2)\times1+2\times1\times\sqrt3=$ ---- などと計算をすすめて(6)の[解]を得られた人は、高校数学要注意です.一般の高校教科書が全てできる(基礎が完了?)ようになったからといって、大学入試での基本ができているとは言いません.少なくとも、傍用問題集を全てマスターすることが、基本としては必要でしょう.大学入試問題は、基本ができていても、簡単に、時間内に、全問解くことなどできないのが普通です.(基本ができて3割程できるか?)

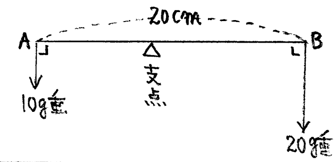
[類] (1) $(-\frac12)^3\times(-2^2)-(-\frac12)^2\div\frac12=(-\frac{1}{2^3})\times(-2^2)-\frac{1}{2^2}\times2=\frac{2^2}{2^3}-\frac{2}{2^2}=\frac12-\frac12=\underline{0}$

(2) $-2^2\div(-3)^3\times(-\frac34)^2\div(\frac12-1)^3=\dfrac{-2^2}{-3^3}\times\dfrac{3^2}{4^2}\div(-\frac12)^3=\dfrac{2^2\times3^2}{3^3\times2^4}\div(-\frac{1}{2^3})=-\dfrac{2^2\times3^2\times2^3}{3^3\times2^4}=\underline{-\dfrac23}$

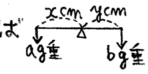
(3) $\dfrac{12\{1-(-\frac12)^4\}}{1-(-\frac12)}=\dfrac{12(1-\frac{1}{2^4})}{1+\frac12}=\dfrac{12(1-\frac{1}{2^4})\times2^4}{(1+\frac12)\times2^4}=\dfrac{12(2^4-1)}{(2+1)\times2^3}=\dfrac{3\times2^2\times15}{3\times2^3}=\underline{\dfrac{15}{2}}$

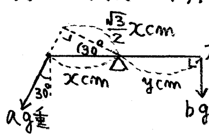
(4) $2\times\{(-0.25)^2-\frac{1}{16}\}-2^2\div0.125\times(-\frac12)^3=2\times\{(\frac14)^2-\frac{1}{16}\}-2^2\times\frac{1000}{125}\times(-\frac{1}{2^3})=2\times0+\dfrac{2^2\times8}{2^3}=\dfrac82=\underline{4}$

39. 長さ20cm,重さ20g重の均一な棒ABがある.右図のように,点A,点Bに,それぞれ10g重,20g重のおもりをつけたとき,支点を点Aから何cmのところにおいたら,つり合うか.(物理です.)

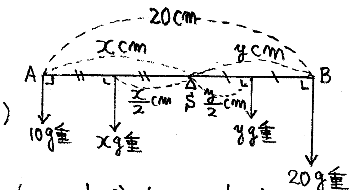



[考] 物理,モーメントについて.

モーメントとは,うでの長さ×力(重さ)です.うでの長さは常に正.力は,左回り(時計と反対回り)を正とし,右回りを負として扱います.例えば   が,つり合っているとき $x\times(+a)+y\times(-b)=0$ となります.一般に $ax=by$ として立式しますが,左回り,右回りのモーメントを考えて立式しましょう.




左が,つり合っているときは,ag重の方向を延長した直線に,支点からおろした垂線の長さがうでの長さ(この図では $\frac{\sqrt{3}}{2}x$ cm)となります.左回りのモーメントは $\frac{\sqrt{3}}{2}x\times a$ となります.したがって $\frac{\sqrt{3}}{2}x\times a+y\times(-b)=0$ が成り立ちます.モーメントの和≠0ときは,回転を始めることになり,高校物理へと移行します.




[解] 点Aから $x$cmのところに,支点Sをおいて,つり合ったとする.$0<x<20$,BS=$y$cm

棒ABは,1cmが1g重であり,AS(xcm)の重さは,$x$g重,この重さが,ASの中点(ASの重心)にかかっている.BS(ycm)の$y$g重も同様.$x+y=20$と次のモーメントでの式を連立して解く.

したがって,モーメントは,左回りは $x\times10+\frac{x}{2}\times x$,右回りは $y\times(-20)+\frac{y}{2}\times(-y)$ となり,$(10x+\frac{1}{2}x^2)+(-20y-\frac{1}{2}y^2)=0$

すなわち,両辺を2倍して,$20x+x^2-40y-y^2=0$ ---① $x+y=20$ (cm) ($(y=20-x)$※) ---②

①より,$20x-40y+(x+y)(x-y)=0$ に②を代入すると $20x-40(20-x)+20(x-20+x)=0$

$100x=1200$ $x=12$ これは $0<x<20$ をみたす.

| 答 | 12cm |
|---|---|

[※補] ①に $y=20-x$ を代入して,$(20-x)^2=400-40x+x^2$ を利用してもよいですが,$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ を用いる方が楽!

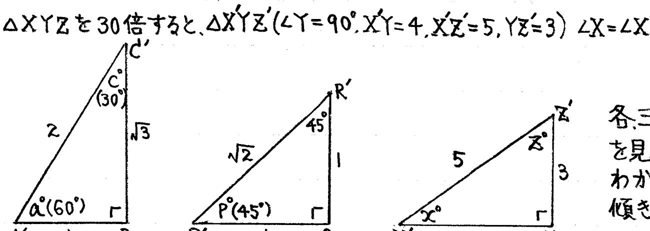
40. 直角三角形ABC($\angle B=90°$, $AB=\frac{5}{4}$, $AC=\frac{5}{2}$),直角三角形PQR($\angle Q=90°$, $PQ=\frac{8}{3}$, $QR=\frac{8}{3}$),直角三角形XYZ($\angle Y=90°$, $XY=\frac{2}{15}$, $XZ=\frac{1}{6}$)のとき,$\angle A=a°$, $\angle C=c°$, $\angle P=p°$, $\angle X=x°$, $\angle Z=z°$ とする.$a°, c°, p°, x°, z°$ を小さい順に不等号を用いて表せ.

[考] 角度の大小ですから,三角形は,拡大,縮小してもかまいません.直線の傾きと結びつけて考える.

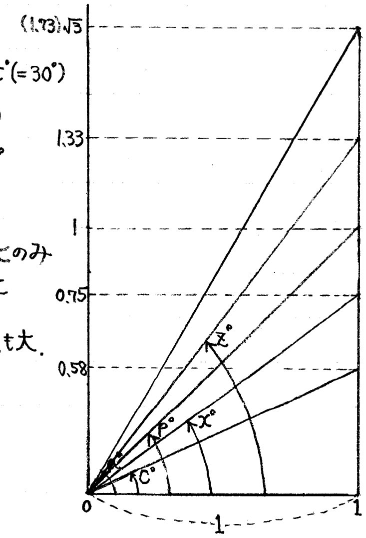
[解] △ABCを$\frac{4}{5}$倍すると,△A'BC'($\angle B=90°$, $A'B=1$, $A'C'=2$, $BC'=\sqrt{3}$) $\angle A=\angle A'=a°(=60°)$, $\angle C=\angle C'=c°(=30°)$

△PQRを$\frac{3}{8}$倍すると,△P'QR'($\angle Q=90°$, $P'Q=1$, $QR'=1$) $\angle P=\angle P'=p°(=45°)$ ($\angle R=\angle R'=45°$)

△XYZを30倍すると,△X'YZ'($\angle Y=90°$, $X'Y=4$, $X'Z'=5$, $YZ'=3$) $\angle X=\angle X'=x°$, $\angle Z=\angle Z'=z°$




各三角形は,辺の比のみを見る.小数にするとわかりやすい.傾きが大きい程,角度も大.




A'C'の傾き $\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{1.73}{1}$ --- $a°$,P'Q'の傾き $\frac{1}{1}$ --- $p°$ X'Z'の傾き $\frac{3}{4}=\frac{0.75}{1}$ --- $x°$

C'A'の傾き $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1.73}{3}=\frac{0.58}{1}$ --- $c°$ Z'X'の傾き $\frac{4}{3}=\frac{1.33}{1}$ --- $z°$

右図より,

| 答 | $c°(=30°)<x°<p°(=45°)<z°<a°(=60°)$ |
|---|---|

高1.一学期の内容です.

① $A=\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{8}+\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ , $B=\dfrac{\sqrt{8}+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{8}-\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ のとき AとBの大,小を調べよ.

[考1] $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ , 勿論,有理化は考えますが,式を良く見て, $B=\dfrac{1}{A}$ です. AとBの大小のとき,一般に $A-B$ を計算して,もしも $A-B=\cdots=\cdots=\cdots>0$ ならば $A>B$ がわかります. $A-B=\cdots=\cdots<0$ ならば $A<B$ です.[解2]も覚える.

[解1] $A=\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{\sqrt{3}(3-2\sqrt{3}+1)}{3-1}=\dfrac{2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2}=2\sqrt{3}-3$

$B=\dfrac{1}{A}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}-3}$ $\quad A-B=2\sqrt{3}-3-\dfrac{1}{2\sqrt{3}-3}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}-3}\{(2\sqrt{3}-3)^2-1\}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}-3}(12-12\sqrt{3}+9-1)=\dfrac{20-12\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3}=\dfrac{4(5-3\sqrt{3})}{2\sqrt{3}-3}$

$2\sqrt{3}-3>0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}>3 \overset{※}{\Leftrightarrow} (2\sqrt{3})^2>3^2 \Leftrightarrow 12>9$ よって $2\sqrt{3}-3>0$ は正しい. $5-3\sqrt{3}<0 \Leftrightarrow 5<3\sqrt{3} \Leftrightarrow 5^2<(3\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow 25<27$

よって $5-3\sqrt{3}<0$ は正しい. したがって. $A-B<0$ $\therefore \underline{A<B}$

[補] ※の記号 $\Leftrightarrow$ は,同値変形ということ. $\sqrt{3}=1.732\cdots$ から見当をつけて. $2\sqrt{3}-3>0$ , $5-3\sqrt{3}<0$ としました. とすれば,
$5-3\sqrt{3}=5-3\times1.732\cdots=5-5.1\cdots<0$ , $2\sqrt{3}-3=2\times1.732\cdots-3=3.4\cdots-3>0$ とかいてしまうのが実戦的か?
更に有理化を続けて, $A-B=\dfrac{4\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{3}<0$ は当然の方法です.(<u>記号 $\Leftrightarrow$ の使い方がわかったでしょうか</u>)

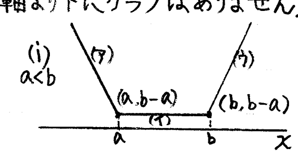
[考2] 特に, $A>0$ , $B>0$ のとき $\dfrac{A}{B}>1$ ならば $B(>0)$ をかけて $A>B$ , $\dfrac{A}{B}<1$ ならば $A<B$ がいえます.

[解2] [解1]の途中より, $A=2\sqrt{3}-3>0$ , $B=\dfrac{1}{A}>0$ $\quad \dfrac{A}{B}=\dfrac{A}{\frac{1}{A}}=A^2=(2\sqrt{3}-3)^2=12-12\sqrt{3}+9=21-12\sqrt{3}<1$ を示す.
( $12\sqrt{3}=12\times1.73\cdots=20.76\cdots$ から $21-12\sqrt{3}<1$ と見当をつけて) $21-12\sqrt{3}<1 \Leftrightarrow 20<12\sqrt{3} \Leftrightarrow 5<3\sqrt{3} \overset{2乗して}{\Leftrightarrow} 25<27$ (正しい)
よって $\dfrac{A}{B}<1$ $B(>0)$ をかけて $\underline{A<B}$ (<u>記号 $\Leftrightarrow$ の使い方がわかったでしょうか</u>) (補) $2\sqrt{3}-3=0.46\cdots<1$ だから2乗しても1より小

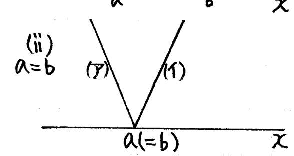
② $a,b$ が実数の定数のとき, $a,b$ で場合分けをして, $y=|x-a|+|x-b|$ の絶対値をはずし,グラフを考えることによって, $y$ の最小値とそのときの $x$ の値( $x$ の範囲)を求めよ.

[考] 高校数学は,場合分けが大切になります. $a$ と $b$ の大小(例えば, $a=-1$ , $b=2$ などとして,実験してみる)を考えます.
グラフは,連続な折れ線です. $y$ 軸は,どこにかくのかよくわかりません. $y\geqq0$ だから, $x$ 軸より下にグラフはありません.

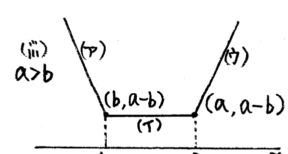
[解] (i) $a<b$ の場合 (ア) $x\leqq a$ ならば, $y=-(x-a)-(x-b)=-2x+a+b$
(イ) $a\leqq x\leqq b$ ならば $y=x-a-(x-b)=b-a$
(ウ) $b\leqq x$ ならば, $y=x-a+x-b=2x-a-b$




(ii) $a=b$ の場合 $y=2|x-a|(=2|x-b|)$ (ア) $x\leqq a(=b)$ ならば $y=-2(x-a)=-2x+2a$
(イ) $a\leqq x$ ならば $y=2(x-a)=2x-2a$




(iii) $a>b$ の場合 (ア) $x\leqq b$ ならば $y=-(x-a)-(x-b)=-2x+a+b$
(イ) $b\leqq x\leqq a$ ならば, $y=-(x-a)+(x-b)=a-b$
(ウ) $a\leqq x$ ならば, $y=x-a+x-b=2x-a-b$




以上(i),(ii),(iii)より,求める<u>$y$ の最小値は,(i) $a<b$ の場合 $b-a$ ( $a\leqq x\leqq b$ のとき)</u>
<u>(ii) $a=b$ の場合 $0$ ( $x=a(=b)$ のとき) (iii) $a>b$ の場合 $a-b$ ( $b\leqq x\leqq a$ のとき)</u>

[補] (ii) $a=b$ のときは,(i) or (iii)に入れてしまっても,間違いではありません.

物理

41. 1 atm（アトム）(気圧)は、正確に101325 Pa(パスカル)と決められているが、ここでは、1 atm = 1013 hPa(ヘクトパスカル)であることを次のことを用いて、示してみる。トリチェリーの実験によると、面積1 $cm^2$，高さ76 cmの水銀柱を1 atmとするということである。水銀Hgの密度を13.6 $g/cm^3$，1 Pa = 1 $N/m^2$，重力加速度（ジー）$g = 9.8\ m/s^2$として、1 atm = 1013 hPaであること示せ。

[解]は、P.31の(8)にありますが、次の[考]を理解、暗記して下さい。

[考] ここでは、高校内容も少し加えて、さまざまな内容を勉強する。最後の問1～問11に答えられる様、理解、暗記して下さい。
特に、単位の換算は、できるようにしておこう。g(グラム)と重力加速度（ジー）$g$を区別します。

例1 参考書でトリチェリーの実験を確かめる。

例2 ・2cm, 3cm, 4cmの直方体の体積 $= 2cm \times 3cm \times 4cm = 2\times3\times4\times cm\times cm\times cm = 24(cm)^3 = 24cm^3$

・速さ $4.2\ km/時 = \dfrac{4.2\,km}{1時間} = \dfrac{4.2\times1\,km}{60分} = \dfrac{4.2\times1000\,m}{60分} = \dfrac{4.2\times1000}{60}\cdot\dfrac{m}{分} = 70\ m/分$ (単位の換算です。)

$= \dfrac{70\,m}{1分} = \dfrac{70\,m}{60秒} = 1.166\cdots m/秒 = 1.17\ m/秒$ (有効数字3桁として、上から4つ目を四捨五入した。)

・速度 = 速さ + 方向 (vectorベクトルという)であり、速さとは異なります。速さと速度は区別する必要があります。

・毎秒7.70 kmは毎時何mか、また、単位をマッハ(音速)(1マッハ=1224 km/時とせよ)に換算せよ。

7.70とあるのは、有効数字3桁(上から3つとる。ここでは小数点第3位を四捨五入したということ) すなわちもともとは、7.695以上7.705より小さい数である。したがって、求めた数値も上から3つとって答えとする。

$$7.70\ km/s = \frac{7.7\times10^3\,m}{\frac{1}{36\times10^2}時間} = \frac{7.7\times10^3\times36\times10^2}{\frac{1}{36\times10^2}\times36\times10^2}\cdot\frac{m}{時間} = 7.7\times36\times10^5\ m/時 = 277.2\times10^5\ m/時 = 277\times10^5\ m/時 = 2.77\times10^7\ m/時$$

$$7.70\ km/s = \frac{7.70\ km}{\frac{1}{36\times10^2}時間} = 7.7\times36\times10^2\ km/時 = 7.7\times36\times10^2\times\frac{1}{1224}マッハ \quad \left(1マッハ = 1224\ km/時 \quad \frac{1}{1224}マッハ = 1\ km/時\right)$$

$$= \frac{277.2\times10^2}{1224}マッハ = \frac{27720}{1224}マッハ = 22.64\cdots マッハ = 22.6マッハ$$

例3 質量と重量

質量 ・宇宙(地球を含む)のどこにあっても重力の影響を受けない物質そのものの量　単位 kg, gなど
・物質の動きにくさを表す量
・慣性の大きさを表す量
慣性とはニュートンの慣性の法則では「物質は静止しているものは静止している状態を保ち、動いているものは動いている状態を保つ」とある。このような物質の性質のことを慣性という。
これに対して、慣性力とは、慣性を続けようとする力である。
・質量を計る器械は、てんびん(天秤)

重量 ・質量×重力加速度で表わされる力　単位 kg重, g重, N(ニュートン)など　重量と力の単位は同じ
・万有引力によってもたらされる力
・重量を計る器械は、バネ計り

次頁に続く

重力加速度$\overset{ジー}{g}$について　$1\overset{ジー}{g} = 9.8\,{}^{m}/_{s^2}$，$1\,kg重 = 1\,kg \times 1\overset{ジー}{g} = 1\,kg \times 9.8\,{}^{m}/_{s^2} = 9.8\,\frac{kg\cdot m}{s^2} = 9.8\,\overset{ニュートン}{N}$，$\frac{kg\cdot m}{s^2} = \overset{ニュートン}{N}$

万有引力について．詳しくは，あとでのべます．「全ての物体(質点)の間には，互いに引きあう力が存在する．この力を万有引力という．」上述の重力加速度$\overset{ジー}{g}$にも関係します．

$1\,kg重 = 9.8\,\frac{kg\cdot m}{s^2} = 9.8\,N$ をしっかり覚える．$\frac{kg\cdot m}{s^2} = kg\cdot m\cdot s^{-2}$ とかくこともあります．

例4
密度：単位体積の物体の質量，$\frac{質量}{体積}$なので，単位は，${}^{g}/_{cm^3}$，${}^{kg}/_{m^3}$，などとなります．水の密度 $= \frac{1g}{1cm^3} = 1\,{}^{g}/_{cm^3}$

比重：$\frac{物体の密度}{水の密度}$なので，水の密度 $= 1\,{}^{g}/_{cm^3}$ ですから，単位はありません．同体積の水の質量との比較です．

$$水の密度 = 1\,{}^{g}/_{cm^3} = \frac{1g}{1\,cm^3} = \frac{\frac{1}{10^3}kg}{\frac{1}{10^2}m \times \frac{1}{10^2}m \times \frac{1}{10^2}m} = \frac{\frac{1}{10^3}kg}{\frac{1}{10^6}m^3} = \frac{\frac{1}{10^3}\times 10^6}{\frac{1}{10^6}\times 10^6}\,{}^{kg}/_{m^3} = 10^3\,{}^{kg}/_{m^3}$$

密度から単位をとった値が比重

例5
全圧力：力であり，単位は，g重，kg重，N，などです．

圧力：$\frac{全圧力^{※}}{面積}$であり，単位は，${}^{g重}/_{cm^2}$，${}^{kg重}/_{m^2}$，${}^{N}/_{m^2}$，などです．　※は$\frac{重量}{面積}$のようにも言えます．圧力は力ではない．

例6
大気：惑星，衛星などをとりまく気体，地球の大気は，特に空気と呼ばれます．金星は二酸化炭素$CO_2$，土星は$H_2$．

空気：地球をとりまく大気．成分は，窒素$N_2$：酸素$O_2$ = 4：1（体積比）ですが，水蒸気$H_2O$，アルゴン$Ar$，二酸化炭素$CO_2$，メタン$CH_4$なども微小ながら含まれます．

（温室効果ガス）水蒸気$H_2O$，二酸化炭素$CO_2$（0.04%），メタン$CH_4$… 特に，人間活動による$CO_2$，$CH_4$が大切．
$CO_2$が増加すると，太陽からの赤外線を吸収する割合が多くなり，地球温暖化をまねくことになりますが，逆に$CO_2$が減少すると，赤外線吸収量が少なくなり（放射量が多くなる），地球寒冷化をまねき，作物が育たなくなり，凶作をまねくことになります．メタン$CH_4$は，$CO_2$の約25倍の温室効果をもたらします．
$CO_2$は，化石燃料（石油，石炭，天然ガスなど）によるものが多く，メタン$CH_4$は，ゴミの埋立て，下水処理，家畜（豚，牛，羊など…）のゲップ，ふんなどから生じます．

地球温暖化をまねく，温室効果ガス（$CO_2$，$CH_4$など）について，今，各国が対策を考えています．

例7 気圧（大気の圧力）：地球の気圧は，空気（対流圏と呼ばれる地上およそ10Km～18kmの高さ迄ある）の圧力のことです．
気圧の単位は，一般にヘクトパスカル$hPa$が用いられます．$1\,Pa = 1\,{}^{N}/_{m^2}$，$100\,Pa = 1\,hPa$，$1\,Pa = \frac{1}{100}hPa = 10^{-2}hPa$
$1気圧\,\overset{アトム}{atm} = 1013\,hPa = 1013 \times 1\,hPa = 1013 \times 100\,Pa = 1.013 \times 10^3 \times 10^2\,Pa = 1.013 \times 10^5\,Pa = 1.013 \times 10^5\,{}^{N}/_{m^2}$

---

問 音速 1マッハ $= 1224\,{}^{km}/_{h}$ を単位${}^{m}/_{s}$に換算せよ．　hはhour(時間)の略，sはsecond(秒)の略．

(カイ) $$1224\,{}^{km}/_{h} = \frac{1224 \times 1\,km}{1\,h} = \frac{1224 \times 10^3\,m}{60 \times 60\,s} = \frac{1224 \times 10^3}{36 \times 10^2}\,{}^{m}/_{s} = \frac{306 \times 10}{9}\,{}^{m}/_{s} = \underline{340\,{}^{m}/_{s}}$$

問1. 毎時50.0kmの速さ=50.0 km/h=毎秒□mの速さ=□ m/s　　h(時間hourの略), s(秒secondの略)

カイ. $50\,\mathrm{km/h} = 50\times\frac{1000\,m}{60\times60\,s} = \frac{500}{36}\,m/s = \frac{125}{9}\,m/s = 13.88\cdots m/s = \underline{13.9\,m/s}$

問2. 地球の重力加速度1g, 月の重力加速度$\frac{1}{6}g$である. 地球上で54kg重の人は、月面上では、何kg重となるか. また、質量はどうか. 質量を計る器械は何か.

カイ. 地球上 $54\,kg\text{重} = 54\,kg\times1g\ (=54\times9.8\,kg\cdot m/s^2)$　　質量は、地球上も月面上も同じで54kg

月面上 $54\,kg\times\frac{1}{6}g = \frac{54}{6}\,kg\times1g = 9\,kg\times1g = \underline{9\,kg\text{重}}$　　質量を計る器械はてんびん(天秤)

問3. 月面上で、鉄球と羽毛を同じ高さから同時に落としたら、どのように落ちていくか.(実際に、1971年アポロ計画で、アポロ15号のクルーが実験しました. 月面には、1961年から1972年にかけて、全6回の月面着陸に成功. アポロ13号の「成功した失敗」は有名.)

カイ. 月面上は大気がないので、大気による抵抗がなく、$\frac{1}{6}g=1.63\,m/s^2$の重力加速度で落下し、同時に月面に落ちる.

地球上, 月面上同じ距離 $l$ m をそれぞれ$t_e$秒, $t_m$秒かかって落下したとすると、$l=\frac{1}{2}g t_e^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}g\right)\cdot t_m^2$ が成立し、

$6t_e^2 = t_m^2$ ∴ $t_m = \sqrt{6}\,t_e = 2.45\,t_e$ 月面上で、物体が落ちる時間は、地球のそれの2.5倍である. $1g=9.8\,m/s^2$

※重力加速度を$\alpha$(アルファ)とすると、t秒間に自然落下する距離 $l(m) = \frac{1}{2}\alpha t^2$ (大気による抵抗がないとき)です. (P.31の(9))

問4. 重量とは何か.

カイ. 宇宙どこにあっても同じである質量と重力加速度の積である. 単位は、kg重, N(ニュートン)($kg\cdot m/s^2$)などが用いられ、力と同じ単位.

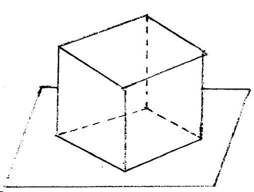
$1\,kg\text{重} = 9.8\,kg\cdot m/s^2 = 9.8\,N$　　重量=質量×重力加速度

問5. 万有引力とは何か

カイ. 物体と物体が引きあう力. (P.31の(9)に詳しくあります.)

問6. 一辺の長さ10.0cm、質量2kgの立方体が、地上においてある.

(ア)密度と比重を求めよ. (イ)全圧力と圧力を求めよ. 単位は、kg, m, s(秒), N(ニュートン)で表せ.



カイ. (ア) 密度 $\frac{2\,kg}{10.0\,cm\times10.0\,cm\times10.0\,cm} = \frac{2\,kg}{\frac{10}{100}m\times\frac{10}{100}m\times\frac{10}{100}m} = \frac{2\,kg}{\frac{1}{10^3}m^3} = \underline{2.00\times10^3\,kg/m^3}$

比重 水の密度 $= \frac{1\,g}{1\,cm^3} = \frac{\frac{1}{10^3}kg}{\frac{1}{10^2}m\times\frac{1}{10^2}m\times\frac{1}{10^2}m} = \frac{\frac{1}{10^3}kg}{\frac{1}{10^6}m^3} = 10^3\,kg/m^3$ だから、$\frac{2\times10^3\,kg/m^3}{10^3\,kg/m^3} = \underline{2.00}$

勿論 $\frac{2\,kg}{10\,cm\times10\,cm\times10\,cm} = \frac{2\times10^3\,g}{10^3\,cm^3} = 2\,g/cm^3$ ですから、水の密度$1\,g/cm^3$として比重は2.00です.

(イ) 全圧力 $2\,kg\text{重} = 2\,kg\times1g = 2\,kg\times9.8\,m/s^2 = \underline{19.6\,kg\cdot m/s^2} = \underline{19.6\,N}$ (重力加速度の有効数字を3桁で算出)

圧力 $\frac{2\,kg\text{重}}{10\,cm\times10\,cm} = \frac{2\,kg\times1g}{\frac{10}{100}m\times\frac{10}{100}m} = \frac{19.6\,N}{\frac{1}{10^2}m^2} = \underline{19.6\times10^2\,N/m^2}$

(補) 単位をg, cmだけで表すと、密度 $\frac{2\,kg}{10\,cm\times10\,cm\times10\,cm} = \frac{2\times10^3\,g}{10^3\,cm^3} = \underline{2\,g/cm^3}$, 比重2

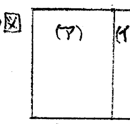
全圧力 $2\,kg\text{重} = \underline{2\times10^3\,g\text{重}}$, 圧力 $\frac{2\times10^3\,g\text{重}}{10\,cm\times10\,cm} = \frac{2\times10^3\,g\text{重}}{10^2\,cm^2} = \underline{20\,g\text{重}/cm^2}$ となり、easyですが……

問.7. 空気は、大部分が、［ア］と［イ］で占められている。微小ではあるが、不活性ガス［ウ］も含まれ、近年では、地球温暖化の原因となる［エ］や［オ］も含まれていて、各国でその対策がなされている。

(1) ［ア］～［オ］をかき、その化学式も答えよ。体積比は［ア］>［イ］とする。［ウ］～［オ］は気体名である。実際には、水蒸気も含まれている。

(2) 絶対温度273°K(ケルビン)(0°C)、1atmを標準状態という。［ア］は、標準状態で、体積22.4lが、28gであり、［イ］は、標準状態で、体積22.4lが32gである。体積比で［ア］:［イ］=［カ］:［キ］であるから、標準状態で、22.4lの空気の質量は、［ク］gとなる。

(3) ［エ］,［オ］は［ケ］ガスといわれる。［ケ］ガスについて説明し、地球温暖化を論ぜよ。

(2)の図


空気22.4l
273°K, 1atm,
1mol

カイ. (1), (3)は P.31の(2)参照

(2) $N_2:O_2=4:1$ だから、空気22.4lのうち $N_2$ は、$22.4l\times\frac{4}{5}=\frac{22.4\times4}{5}l$ を占める。

$N_2$ は22.4lが28gだから、$N_2$ が $\frac{22.4\times4}{5}l$ の質量 $x$g は、$28g:xg=22.4l:\frac{22.4\times4}{5}l=1:\frac{4}{5}=5:4$

$5x=4\times28$　$x=\frac{4\times28}{5}g$

空気22.4lのうち $O_2$ は $22.4l\times\frac{1}{5}=\frac{22.4}{5}l$ を占める。$O_2$ は、22.4lが32gだから、$O_2$ が $\frac{22.4}{5}l$ の質量 $y$g は、

$32g:yg=22.4l:\frac{22.4}{5}l=1:\frac{1}{5}=5:1$　$5y=32\times1$　$y=\frac{32}{5}g$

したがって、空気22.4lの質量 $x+y(g)=\frac{4\times28}{5}+\frac{32}{5}=\frac{4\times28+32}{5}=\frac{16\times(7+2)}{5}=\frac{144}{5}=\underline{28.8g}$

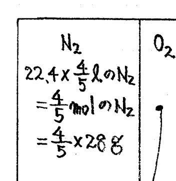
(補) 高校化学の導入(高1.1学期に習います。)

標準状態(273°K(0°C), 1atm)で22.4lの気体の質量(単位g)から単位gを取り除いた無名数が、その気体の分子量といわれるものです。逆に、ある気体の分子量に単位gをつけた質量が、その気体22.4l(標準状態)の質量ということになり、この質量をその気体の1mol(モル)の質量とします。この設問では、気体 $N_2$ 1mol=28g、気体 $O_2$ 1mol=32g ということです。空気を混合気体ではなく、1つの気体として考えたとき、空気1molは、何gか、すなわち空気の見かけの分子量を求めよ、というのが、この設問の本来の目的です。更に、標準状態22.4l中には、$6.02\times10^{23}$ 個の分子が存在します。アボガドロ数 $N_A=6.02\times10^{23}$ といわれるものです。

空気の見かけ上の1mol中の分子数 $=O_2$ 分子 $\frac{1}{5}\times6.02\times10^{23}$ 個 $+N_2$ 分子 $\frac{4}{5}\times6.02\times10^{23}$ 個 $=6.02\times10^{23}$ 個ということです。

(2)の(別解) 空気を混合気体ではなく、1つの気体と見て、22.4lの空気1molの質量を求める。

空気1mol $=N_2\frac{4}{5}$mol $+O_2\frac{1}{5}$mol $=\frac{4}{5}\times28g+\frac{1}{5}\times32g=\underline{28.8g}$



22.4lの空気1mol

$22.4\times\frac{1}{5}l$ の $O_2$
$=\frac{1}{5}$mol の $O_2$
$=\frac{1}{5}\times32g$

22.4lの空気中には
$6.02\times10^{23}\times\frac{1}{5}$
$=1.20\times10^{23}$ 個
の $O_2$ 分子が存在

空気の平均分子量28.8を利用すると、水素 $H_2$ の分子量は、$1+1=2$、二酸化炭素 $CO_2$ の分子量は $12+16\times2=44$、メタン $CH_4$ の分子量は $12+1\times4=16$ ですから、分子量の大小を比べて、水素、メタンは空気より軽く、二酸化炭素は空気より重いことがわかります。(H, C, O の原子量はそれぞれ1, 12, 16、ついでに、窒素Nは14、硫黄Sは32)

---

問.8 ある数Aを、小数第3位を四捨五入したところ、5.50となった。ある数Aの範囲を不等号で表せ。

(カイ) ある数Aを100倍して、小数第一位を四捨五入したら550となるということである。

$549.5\leqq100A<550.5$ だから $\underline{5.495\leqq A<5.505}$

($5.50-0.005\leqq A<5.50+0.005$ ということ → P.34の(2))

問.9 (1) 問.7の $\boxed{ア}$ g を利用して、空気 $1\,m^3$ の質量を kg の単位で求めよ。(空気の密度を $kg/m^3$ の単位で求めよ、という事)

(2) 空気は、下にある程密度が大きいが、地上 10km〜18km 迄あるといわれている。平均 8km の高さ迄 (1)で求めた空気があるとして、地上の圧力1気圧をヘクトパスカル hPa の単位で求めよ。(8kmの高さ迄、標準状態で、平均分子量 28.8 の空気 すなわち 22.4l が $\boxed{ア}$ g (1mol) の空気があるという前提で、1気圧を求めよ、ということ。→(補)参照

(カイ.) (1) $1l = 10cm \times 10cm \times 10cm = \frac{10}{100}m \times \frac{10}{100}m \times \frac{10}{100}m = \frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}m^3 = \frac{1}{10^3}m^3 = 10^{-3}m^3$

$1g = \frac{1}{1000}kg = \frac{1}{10^3}kg = 10^{-3}kg$

$\frac{28.8\,g}{22.4\,l} = \frac{28.8\times10^{-3}kg}{22.4\times10^{-3}m^3} = \frac{28.8}{22.4}\,kg/m^3 = \frac{288}{224}\,kg/m^3 = \frac{72}{56}\,kg/m^3 = \frac{18}{14}\,kg/m^3 = \frac{9}{7}\,kg/m^3 = 1.285\cdots kg/m^3 = 1.29\,kg/m^3$

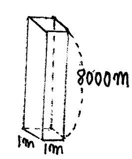
よって、求める質量は <u>1.29 kg</u>

(2). (1)で求めた質量 1.29 kg を用いずに精度を増すために、質量 $\frac{9}{7}$ kg を用いることにする。

$1m^3$ が、質量 $\frac{9}{7}$ kg だから重量は、$\frac{9}{7}\times9.8$ N、底面積 $1m^2$、高さ 8km $= 8000m = 8\times10^3 m$ の

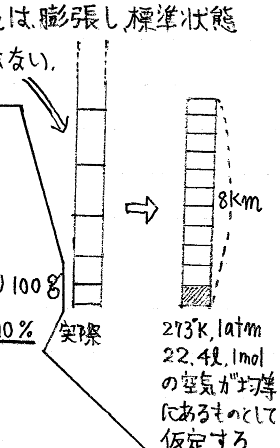
重量は、$\frac{9}{7}\times9.8\times8\times10^3$ N (すなわち、面積 $1m^2$ にかかる全圧力が $\frac{9}{7}\times9.8\times8\times10^3$ N ということ)

したがって、圧力(1気圧)は、$\frac{9}{7}\times9.8\times8\times10^3\,N \div 1m^2 = \frac{9\times9.8\times8\times10}{7}\times10^2\,N/m^2 = 72\times14\,hPa = \underline{1008\,hPa}$




(補) 1atm = 1013.25 hPa に近い値が得られました。空気 $1m^3$ が 1kg重 (この問いでは 1.29 kg重となった) もあるとは、何か不思議ですねぇ〜。

空気は、対流圏 (地上 10km〜18km迄) に、存在する。上空では、気温も下がり、空気は、膨張し、標準状態 (273°K (0°C), 1atm) では、なく、22.4l 中に、1 mol のみかけ上の空気がある訳では無い。




問.10. A: 濃度15%, 密度 2.2 $g/cm^3$ の食塩水 $100\,cm^3$, B: 密度 1 $g/cm^3$ の水 $100\,cm^3$

AとBを混合したときの濃度を有効数字2桁で求めよ。(濃度は、質量パーセント濃度です。)

(カイ) Aは、密度 2.2 $g/cm^3$, $100\,cm^3$ より、質量 $100\,cm^3\times2.2\,g/cm^3 = 220\,g$, Bは、密度 1 $g/cm^3$, $100\,cm^3$ より $100\,g$

Aの塩の質量は、$220\,g\times\frac{15}{100} = \frac{22\times15}{10}\,g = 33\,g$、求める濃度は $\frac{33}{220+100}\times100\,\% = \frac{330}{32}\,\% = \underline{10\,\%}$

問.11 A: 濃度15%, 密度 2.2 $g/cm^3$ の食塩水 (多量ある), B: 密度 1 $g/cm^3$ の水 $100\,cm^3$

Aから何 $cm^3$ かをとり出し、Bに混ぜて、10% の食塩水を作りたい。Aから、何 $cm^3$ をとり出せばよいか。有効数字2桁とする。

(カイ) Aから $x\,cm^3$ をとり出すと、質量は $2.2x\,g$ ($\because$ 密度 2.2 $g/cm^3$)、このうちの食塩の質量は、$2.2x\,g\times\frac{15}{100} = \frac{15\times2.2x}{100}\,g$ ($\because$ 15%)

B $100\,cm^3 = 100\,g$ ($\because$ 1 $g/cm^3$) したがって、Aを $x\,cm^3$ とBを $100\,cm^3$ を混ぜたときの濃度は、$\frac{\frac{15\times2.2x}{100}}{2.2x+100}\times100\,\% = 10\,\%$

$\frac{15\times2.2x}{2.2x+100} = 10$ $\quad 15\times2.2x = 10(2.2x+100)$ $\quad 3\times2.2x = 2(2.2x+100) = 2\times2.2x+200$ $\quad 3\times2.2x-2\times2.2x = 200$

$(3-2)\times2.2x = 200$ $\quad 2.2x = 200$ $\quad 1.1x = 100$ $\quad x = \frac{100}{1.1} = \frac{1000}{11} = \underline{91\,cm^3}$

(補) 問.10、問.11、を見て、不思議なことに気付きませんか?。問.12でもっとくわしく、やります。問.12以降にかいてあることは、高校生内容を多分に含みますので、意欲ある人、興味ある人、のためのものです。

数学と化学実験のコラボです。一般に濃度とは、質量%濃度です。

問12. A：非常に精密な濃度15.0%、密度2.20 $g/cm^3$ の食塩水200 $cm^3$、B：非常に精密な密度1.00 $g/cm^3$ の水100 $cm^3$ がある。
今、Aから、$x$ $cm^3$ $(50 \leqq x \leqq 150)$ の食塩水をとり出し、Bの水100 $cm^3$ と混合する。体積は $x+100$ $cm^3$ になったとする。

(1) 混合してできた食塩水の濃度を $y$% とするとき、$y$ を $x$ で表すと、$y=\dfrac{\Box x}{\Box x+\Box}$ となる。有効数字3桁。□は正の整数。

(2) 下の表を作れ。電卓を用いて計算せよ。$(50 \leqq x \leqq 150)$

| $x$ | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | |

(3) (1)のグラフは、反比例のグラフを平行移動してできるグラフの曲線(双曲線)の一部である。$50 \leqq x \leqq 150$ の範囲でわかりやすいグラフを実際に、グラフ用紙にかいてみよ。(2)の表を用いて、なめらかにつなげ。

(4) $y=10.0$ (%) となる $x$ の範囲を不等号を用いて表せ。(有効数字3桁)

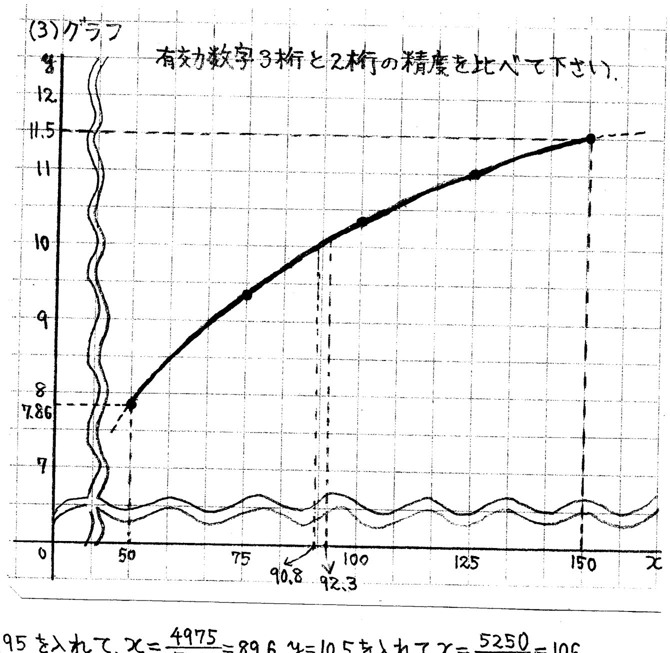
(5) 有効数字2桁で求めた $y=10$ (%) の $x$ の範囲を求め、(4)の場合と比較せよ。

(カイ) (1) Aからとり出した $x$ $cm^3$ の食塩水の質量は、$2.2x$ g (∵密度2.20 $g/cm^3$)、Bの水100 $cm^3$ の質量は100 g (∵密度1.00 $g/cm^3$)
Aからの $2.2x$ g中の食塩の質量は、濃度15.0%より $2.2x\,\text{g} \times \dfrac{15}{100} = \dfrac{15 \times 2.2x}{100}$ g この食塩が、$2.2x+100$ g の食塩水の中に含まれるから、$y\% = \dfrac{\frac{15 \times 2.2x}{100}}{2.2x+100} \times 100\%$ 　$y = \dfrac{15 \times 2.2x}{2.2x+100} = \dfrac{2 \times 15 \times 1.1x}{2(1.1x+50)} = \dfrac{15 \times 1.1x}{1.1x+50} = \dfrac{165x}{11x+500}$

(このグラフの数学的考察については、P.31の(8)にあります。)

(2)

| $x$ | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 7.86 | 9.34 | 10.3 | 11.0 | 11.5 |




(4) 有効数字3桁 $y=10.0$ となる $y$ の範囲は、
$9.995 \leqq y < 10.05$ である。(1)の式を変形すると、$165x = y(11x+500) = 11xy + 500y$
$165x - 11xy = 500y$ 　$(165-11y)x = 500y$
$x = \dfrac{500y}{165-11y}$ ……①
$y=9.995$ を入れて $x=\dfrac{4997.5}{55.055}=90.77$
$y=10.05$ を入れて $x=\dfrac{5025}{54.45}=92.29$
よって求める $x$ の範囲は $90.8 \leqq x < 92.3$
(等号は無意味とはなりますが---)

(5) 有効数字2桁 $y=10$ となる $y$ の範囲は
$9.95 \leqq y < 10.5$ である。①に代入する。$y=9.95$ を入れて、$x=\dfrac{4975}{55.55}=89.6$、$y=10.5$ を入れて $x=\dfrac{5250}{49.5}=106$
よって、求める $x$ の範囲は、$90 \leqq x < 110$ (等号は、実験では、無意味なものとはなるでしょうが---)
問10では、$x=100$ $cm^3$、問11では $x=91$ $cm^3$ いずれのときでも $y=10$% でした。
有効数字を3桁にしないと、実際の実験では、面白味がないということにもなります。

グラフの平行移動などについて、

$x$軸方向に$a$, $y$軸方向に$b$平行移動したグラフの式は$x$に$x-a$, $y$に$y-b$を入れて、$y=$($x$の式)にすればよい。
$x$軸対称は$y$に$-y$を入れる。$y$軸対称は$x$に$-x$を入れる。原点対称は$x$に$-x$, $y$に$-y$を同時に入れる。
直線$y=x$に対称は、$x$に$y$, $y$に$x$を入れる。($x$と$y$を入れかえる。求めた$y=$($x$の式)は、元の式の逆関数という)

例1 直線$x=-1$ ($y$は全ての実数)を$x$軸方向に$-3$平行移動すると$x=-1$の$x$に$x-(-3)=x+3$を入れて、
$x+3=-1$ ∴$x=-4$ (グラフをかけば、当然のことですが)

例2 $y=-2x+1$ (1) $x$軸方向に$-1$, $y$軸方向に3平行移動 (2) $x$軸対称 (3) $y$軸対称 (4) 原点対称 (5) 直線$y=x$対称
(1) $x$に$x-(-1)=x+1$, $y$に$y-3$を入れて、$y-3=-2(x+1)+1=-2x-1$ ∴$y=-2x+2$
(2) $y$に$-y$を入れて$-y=-2x+1$ ∴$y=2x-1$ (3) $x$に$-x$を入れて$y=-2(-x)+1$ ∴$y=2x+1$
(4) $x$に$-x$, $y$に$-y$を入れて$-y=-2(-x)+1=2x+1$ ∴$y=-2x-1$
(5) $x$に$y$, $y$に$x$を入れて($x$と$y$を入れかえて) $x=2y+1$ $x-1=2y$ $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ (この関数と$y=-2x+1$は互いに逆関数)
直線については、2つの点を考えるとすむことです。実際にグラフをかいて、確かめて下さい。
どのような関数でも上のようにできます。

例3 $y=-2x+1$を$x$軸方向に1平行移動し、$y$軸方向に$\square$平行移動すると、元の関数$y=-2x+1$と同じになる。
(カイ) $x$軸方向に1, $y$軸方向に$t$平行移動すると、$x$に$x-1$, $y$に$y-t$を入れて $y-t=-2(x-1)+1$ ∴$y=-2x+3+t$
この式が$y=-2x+1$と同じになるから $3+t=1$ ∴$t=-2$

例4 $y=ax+b$を$x$軸方向に$a$, $y$軸方向に$\square$平行移動すると元の関数$y=ax+b$と同じになる。
(カイ) $x$に$x-a$, $y$に$y-t$を入れて $y-t=a(x-a)+b=ax-a^2+b$ $y=ax-a^2+b+t$ この式が$y=ax+b$と同じ。
$-a^2+b+t=b$ ∴$t=a^2$

例5 $y=ax+b$を$x$軸方向に$-1$, $y$軸方向に2平行移動し、更に、$y$軸対称に移動し、更に、原点対称にしたところ
$y=-2x+1$になったという。このとき$a$, $b$の値を求めよ。
(カイ) 反対方向から考えると、$y=-2x+1$を原点対称にして、$y$軸対称にして、$x$軸方向に$+1$, $y$軸方向に$-2$平行移動
すると$y=ax+b$となる。$x$に$-x$, $y$に$-y$を入れて $-y=-2(-x)+1=2x+1$ $x$に$-x$を入れて $-y=-2x+1$
$x$に$x-1$, $y$に$y+2$を入れて $-(y+2)=-2(x-1)+1$ $-y-2=-2x+3$ $y=2x-5$ ∴$a=2$, $b=-5$

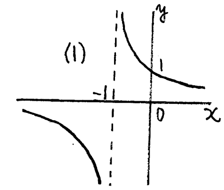
例6 $y=-2x^2+4x+1$を$x$軸方向に$-2$, $y$軸方向に2平行移動すると $y=\square(x+\square)^2+\square$ となる。(高1)
(カイ1) $y=-2x^2+4x+1=-2(x^2-2x)+1=-2\{(x-1)^2-1\}+1=-2(x-1)^2+3$ だから頂点は$(1,3)$ この頂点が$x$軸方向に$-2$,
$y$軸方向に2平行移動するから、頂点は$(1-2, 3+2)=(-1,5)$となる。よって $y=-2(x+1)^2+5$
(カイ2) $x$に$x+2$, $y$に$y-2$を入れて $y-2=-2(x+2)^2+4(x+2)+1=-2(x^2+4x+4)+4x+8+1=-2x^2-4x+1$
$y=-2x^2-4x+1+2=-2(x^2+2x)+3=-2\{(x+1)^2-1\}+3=-2(x+1)^2+5$
注、$x^2$の係数$-2$は変わりません。$x^2$の係数の絶対値が大きくなると、グラフのとんがりが鋭くなります。

例7 次のグラフを平行移動を利用してかけ。 (1) $y=\frac{1}{x+1}$ (2) $y=\frac{x+1}{x}$ (3) $y=\frac{x}{x+1}$ (4) $y=\frac{3-x}{x-1}$ (5) $y=\frac{2x-5}{1-x}$

全て、$y=\frac{a}{x}$ ($a>0$ ならば I, III 象限, $a<0$ ならば II, IV 象限にある反比例のグラフ。漸近線は、直線 $x=0$ と直線 $y=0$ です。) を平行移動して得られます。

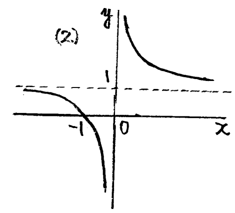
(カイ) (1) $y=\frac{1}{x}$ の $x$ に $x+1$ を入れると $y=\frac{1}{x+1}$ だから、$y=\frac{1}{x}$ を $x$ 軸方向に $-1$ 平行移動

漸近線は、直線 $x=-1$ と直線 $y=0$




(2) $y=\frac{x}{x}+\frac{1}{x}=1+\frac{1}{x}$ $y-1=\frac{1}{x}$ だから $y=\frac{1}{x}$ を $y$ 軸方向に 1 平行移動

漸近線は、直線 $x=0$ と直線 $y=1$

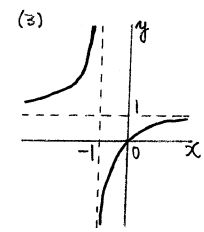



(3) $y=\frac{x}{x+1}=\frac{x+1-1}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}-\frac{1}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$ $y-1=-\frac{1}{x+1}$ $y=-\frac{1}{x}$ を $x$ 軸方向に $-1$, $y$ 軸方向に 1 平行移動。漸近線は、直線 $x=-1$ と直線 $y=1$

(4) $y=\frac{3-x}{x-1}=-\frac{x-3}{x-1}=-\frac{x-1-2}{x-1}=-\left(\frac{x-1}{x-1}-\frac{2}{x-1}\right)=-\left(1-\frac{2}{x-1}\right)=-1+\frac{2}{x-1}$

$y=\frac{2}{x}$ を $x$ 軸方向に 1, $y$ 軸方向に $-1$ 平行移動

漸近線は、直線 $x=1$ と直線 $y=-1$




(5) $y=\frac{2x-5}{1-x}=-\frac{2x-5}{x-1}=-\frac{2(x-1)+2-5}{x-1}=-\left\{\frac{2(x-1)}{x-1}-\frac{3}{x-1}\right\}=-2+\frac{3}{x-1}$

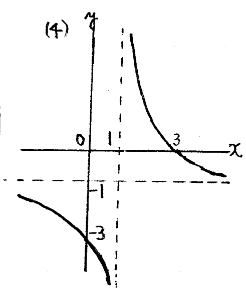
$y=\frac{3}{x}$ を $x$ 軸方向に 1, $y$ 軸方向に $-2$ 平行移動

漸近線は、直線 $x=1$ と直線 $y=-2$

(補) 分母 $=0$ となる $x$ が漸近線, $x\to\infty$ にしたときの $y$ が漸近線

(2), (3), (4), (5) などは、$y=0$ のとき分子 $=0$ から (2) は $(-1, 0)$, (3) は $(0, 0)$, (4) は $(3, 0)$,

(5) は $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ を通ります。

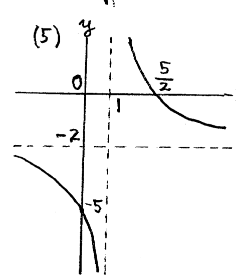



例8 $y=\frac{165x}{11x+500}=\frac{165\left(x+\frac{500}{11}\right)-\frac{165\times500}{11}}{11\left(x+\frac{500}{11}\right)}=\frac{165}{11}-\frac{\frac{165\times500}{11^2}}{x+\frac{500}{11}}$

漸近線は $x=-\frac{500}{11}$, $y=\frac{165}{11}$

したがって、問12のグラフは上のグラフの一部分です。

Aの食塩水が非常にたくさん作ってあったとして、Bの水 $100\,cm^3$ に、Aをたくさん加えていくと、$y=\frac{165}{11}\%=15\%$ に近付くことがわかります。($x\to+\infty$ のとき分母 $x+\frac{500}{11}\to+\infty$)

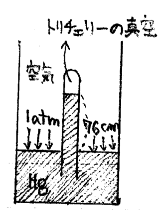



P.31の(1)本問の[解]にようやく辿り着きました。悪しからず。Pardon me!

$1\,cm^2$, $76\,cm$ の水銀柱の体積は $76\,cm^3$, 水銀の密度 $13.6\,g/cm^3$ より、

質量は $76\,cm^3\times13.6\,g/cm^3=76\times13.6\,g$ 重力加速度を $g=9.8\,m/s^2$ として

重量は $\frac{76\times13.6}{10^3}\,kg\times9.8\,m/s^2=76\times13.6\times9.8\times10^{-3}\,N$



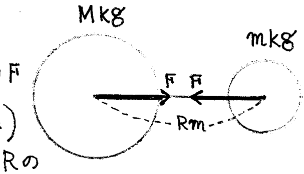

$1\,cm^2=\frac{1}{100}\times\frac{1}{100}\,m^2=10^{-4}\,m^2$

したがって $1\,atm=\frac{76\times13.6\times9.8\times10^{-3}}{10^{-4}}\,N/m^2=76\times13.6\times9.8\times10^{-3}\times10^{4}\,Pa$

$=76\times13.6\times9.8\times10\,Pa=76\times13.6\times9.8\times10\times10^{-2}\,hPa$ ($\because$ $100\,Pa=1\,hPa$ $1\,Pa=\frac{1}{100}\,hPa=10^{-2}\,hPa$)

$=\frac{76\times13.6\times9.8}{10}\,hPa=1012.928\,hPa=1013\,hPa$ (有効数字4桁とした。)

万有引力について.

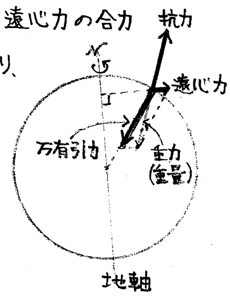



質点(質量の中心)間の距離が $R$ m(メートル)である2つの物体(質量 $M$ kg, $m$ kg)は、互いに次の力 $F$ で引きあう. $F=G\cdot\frac{Mm}{R^2}$ 　$G$ は万有引力定数 $G=6.6740\times10^{-11}\,m^3/kg\cdot s^2\,(=N\cdot m^2/kg^2)$

これを言いかえると、万有引力 $F$ は、2つの質量の積 $Mm$ に比例し、2つの質点間の距離 $R$ の2乗に反比例する. 定数は、万有引力定数 $G$ となります.

地球の質量 $M$ kg を求める.

地球を球体とみなして、地上の質量 $m$ kg の物体は、重量(重力) $m\alpha$ であり、これは、万有引力と遠心力の合力であり、抗力とつりあっている. 自転による遠心加速度は、赤道の最大値が※ $3.4\times10^{-2}\,m/s^2$ であり、重力加速度の $\frac{1}{300}$ であるから、特別な場合を除いて考える必要はなく、重量(重力) $m\alpha$ の加速度 $\alpha$ = 重力加速度 $g$ とみなしてよい.(遠心力 = 0 としてよい). すなわち 重量 = 万有引力




$mg=G\cdot\frac{Mm}{R^2}$ 　$g=G\cdot\frac{M}{R^2}$ 　$M=\frac{gR^2}{G}$ 　(※遠心加速度 $=R\omega^2=6.38\times10^6\times\left(\frac{2\pi}{24\times60\times60}\right)^2=3.4\times10^{-2}\,m/s^2$)

$\overrightarrow{万有引力}+\overrightarrow{遠心力}+\overrightarrow{抗力}=\vec{0}$

$\overrightarrow{重力(重量)}+\overrightarrow{抗力}=\vec{0}$

$\overrightarrow{万有引力}+\overrightarrow{遠心力}=\overrightarrow{重力(重量)}$

$g$ の測定：真空に近い(空気抵抗がない)実験室で、物体を自由落下させる.

自由落下距離 $=\frac{1}{2}g\times$(かかった時間)$^2$ を用いて $g$ を求めると $g=9.8\,m/s^2$ となった.

地球半径 $R$ の測定：古くは、エラトステネス(紀元前200年頃)が測定しました.

今、君達が求めようとすれば、GPSで緯度を測定し、緯度間の距離 $l$ を求めると、

$l=2\pi R\times\frac{\theta^\circ}{360^\circ}$ 　$R=\frac{l\times360^\circ}{2\pi\times\theta^\circ}$ を用いて、求めることができるでしょう. $l$ m(メートル)は、実際に南北に長い道路などを利用.

遠心力などの作用により、赤道半径 > 極半径 ですが、$R=6380\,Km=6380\times10^3\,m=6.38\times10^6\,m$ とします.

万有引力定数 $G=6.674\times10^{-11}\,m^3/kg\cdot s^2$ とする.

$$M\,kg=\frac{9.8\,m/s^2\times(6.38\times10^6\,m)^2}{6.674\times10^{-11}\,m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}=\frac{9.8\times6.38^2\times10^{12}}{6.674\times10^{-11}}\cdot\frac{m\cdot s^{-2}\cdot m^2}{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}=\frac{9.8\times40.7044}{6.674}\times10^{23}\,kg=\frac{398.90312}{6.674}\times10^{23}\,kg$$

$$=59.7697213\times10^{23}\,kg=59.8\times10^{23}\,kg=\underline{5.98\times10^{24}\,kg}$$ (調べてみたら $5.9724\times10^{24}\,kg$ とありました.)

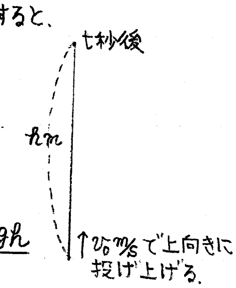
ついでに、$M=5.9724\times10^{24}\,kg$, $R=6.38\times10^6\,m$, $G=6.674\times10^{-11}\,m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}$ として $g$ を求めてみます.

$$g=G\cdot\frac{M}{R^2}=6.674\times10^{-11}\,m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}\times\frac{5.9724\times10^{24}\,kg}{(6.38\times10^6\,m)^2}=\frac{6.674\times5.9724\times10^{13}}{6.38^2\times10^{12}}\ \frac{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}\cdot kg}{m^2}=\frac{39.8597976}{40.7044}\times10\,m\cdot s^{-2}$$

$$=0.97925034\times10\,m/s^2=\underline{9.8\,m/s^2}$$ となってメデタシ、メデタシ.

地上から、重力加速度 $g$ に逆らって真上に初速度 $v_0\,m/s$ で、投げ上げる. 空気による抵抗などがないとすると、$t$ 秒後の速度 $v\,m/s$ は、$\underline{v=v_0-gt}(\fallingdotseq v_0-9.8t)\,m/s$, $t$ 秒後の地上からの高さ $h$ m は

$\underline{h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2}(\fallingdotseq v_0t-4.9t^2)$ 　物体の質量の大小には関係しません.




- $v_0^2-v^2$ を $g$ と $h$ で表せ.(下線部の2つの式から $t$ を消去する)

$h=v_0t-\frac{1}{2}gt\cdot t=v_0t-\frac{1}{2}(v_0-v)t=\frac{v_0+v}{2}t$ 　($\because v=v_0-gt$ より $gt=v_0-v$)

$v=v_0-gt$ より $t=\frac{v_0-v}{g}$ を上式に代入 $h=\frac{v_0+v}{2}\cdot\frac{v_0-v}{g}$ 　$(v_0+v)(v_0-v)=2gh$ $\therefore\underline{v_0^2-v^2=2gh}$

($t=\frac{v_0-v}{g}$ を $h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$ の $t$ に代入しても、勿論求まります. try!)

- 最高高度を求めよ.

(カイ.1) 最高高度では、$v=0$. $v_0^2-v^2=2gh$ より $v_0^2-0^2=2gh$ $\therefore\overline{h=\frac{v_0^2}{2g}}$ 　($v=v_0-gt$ より $0=v_0-gt$ $\therefore t=\frac{v_0}{g}$ を $h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$ に代入してもよい)

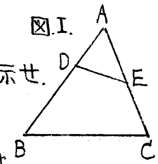
(カイ.2) $h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2=-\frac{g}{2}t^2+v_0t=-\frac{g}{2}\left(t^2-\frac{2v_0}{g}t\right)=-\frac{g}{2}\left\{\left(t-\frac{v_0}{g}\right)^2-\frac{v_0^2}{g^2}\right\}=-\frac{g}{2}\left(t-\frac{v_0}{g}\right)^2+\frac{v_0^2}{2g}$

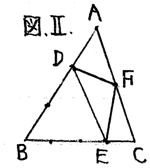
よって $t=\frac{v_0}{g}$ のとき $h$ は最大 $\frac{v_0^2}{2g}$ となる.

- 自由落下のときには、下向きを正にして、$v_0=0$, $v=gt$, $l=\frac{1}{2}gt^2$ ということになります.

42.(1) 右図I. AB＝$a$, AC＝$b$ の△ABCの辺AB, 辺AC上に, AD＝$x$, AE＝$y$ となるように, 点D, 点Eをとる. △ABCの面積：△ADEの面積＝$ab$：$xy$ であることを示せ.

(2) 右図II, AD：DB＝1：2, BE：EC＝3：1, CF：FA＝1：1 のとき, △ABCの内部にある4つの三角形の面積比を(1)を利用して小さい順に整数の比で表せ.

図I.



図II.



[考] (1) 点B, 点DからACに垂線をおろし, その長さをそれぞれ $h_1$, $h_2$ とする. 相似を利用し, $h_2(h_1)$ を $h_1(h_2)$ で表す.

(2) 4つの三角形の面積を $a, b, c, d$ とおいて, (1)を利用すると, $a, b, c, d$ についての3つの関係式が得られる. $a$ を定数と見て, 連立方程式を解けば, $b, c, d$ は全て $a$ の式で表すことができる. (代数学に持ち込む…しかし)

例1 $\begin{cases} 2x-y+z=1 \cdots ① \\ x+2y-z=2 \cdots ② \\ x-3y-2z=3 \cdots ③ \end{cases}$ 代入法, 加減法を用いて, 2文字の連立方程式にします. 代入法がわかりやすいです.

①から $z=1-2x+y \cdots ①'$ を②, ③に代入して, $x, y$ の連立方程式にします.

②に代入 $x+2y-(1-2x+y)=2$ $3x+y=3 \cdots ②'$

③に代入 $x-3y-2(1-2x+y)=3$ $5x-5y=5$ $x-y=1 \cdots ③'$

答 $(x, y, z)=(1, 0, -1)$

②'+③' $4x=4$ $x=1$ ②'より $y=3-3x=3-3=0$, $x=1, y=0$ を①'に代入 $z=1-2\cdot1+0=-1$

(補) ①と②, ①と③, ②と③, のいずれか2つを用いて, 一文字を消去し, 2文字にします. (加減法です.)

①+② より $3x+y=3 \cdots ④$

①×2+③ より
$$\begin{array}{rr} & 4x-2y+2z=2 \\ +) & x-3y-2z=3 \\ \hline & 5x-5y=5 \end{array}$$
$x-y=1 \cdots ⑤$

④+⑤より $4x=4$ $x=1$ ④に代入 $y=3-3x=3-3\cdot1=0$

$x=1, y=0$ を①に代入 $z=1-2x+y=1-2\cdot1+0=-1$

例2 $\begin{cases} a+b+c=1 \cdots\cdots ① \\ 2a-3b-c=2 \cdots ② \end{cases}$ を $a$ を定数と見て, $b, c$ を $a$ の式で表せ.

答 $(b, c)=\left(\dfrac{3a-3}{2}, \dfrac{-5a+5}{2}\right)$

$b=x$, $c=y$ とおきかえるとわかりやすいですが, そのままの文字で解きます. ($b, c$ の連立方程式を解けと同じ)

①より $c=1-a-b \cdots ①'$ を②に代入 $2a-3b-(1-a-b)=2$ $3a-2b=3$ $3a-3=2b$ $b=\dfrac{3a-3}{2}$

①'に代入 $c=1-a-\dfrac{3a-3}{2}=\dfrac{2-2a-(3a-3)}{2}=\dfrac{-5a+5}{2}$

例3 $\begin{cases} a+b+c+d=1 \cdots\cdots ① \\ a-2b+c-d=2 \cdots\cdots ② \\ 2a-b-2c+2d=0 \cdots ③ \end{cases}$ を $a$ を定数と見て, $b, c, d$ を $a$ の式で表せ.

「$b, c, d$ についての連立方程式を解け」と同じことです. 代入法でも勿論解けますが, 加減法と, 代入法を用いてみましょう. ($b=x$, $c=y$, $d=z$ とおいて解けばわかりやすいでしょう.) $d$を消去する.

①+② より $2a-b+2c=3 \cdots ④$

①×2−③
$$\begin{array}{rr} & 2a+2b+2c+2d=2 \\ -) & 2a-b-2c+2d=0 \\ \hline & 3b+4c=2 \cdots ⑤ \end{array}$$

④より $b=2a+2c-3 \cdots ④'$ を⑤に代入,

$3(2a+2c-3)+4c=2$

$6a+10c-9=2$

$10c=-6a+11$ $c=\dfrac{-6a+11}{10} \cdots ⑥$

⑥を④'に代入 $b=2a+\dfrac{2(-6a+11)}{10}-3=\dfrac{10a+(-6a+11)-15}{5}=\dfrac{4a-4}{5} \cdots ⑦$

⑥, ⑦を①に代入 $d=1-a-b-c=1-a-\dfrac{4a-4}{5}-\dfrac{-6a+11}{10}=\dfrac{1}{10}\{10-10a-2(4a-4)-(-6a+11)\}$

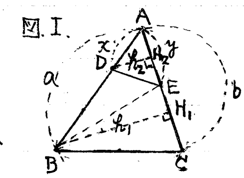
$d=\dfrac{1}{10}(10-10a-8a+8+6a-11)=\dfrac{1}{10}(-12a+7)=\dfrac{-12a+7}{10}$

答 $(b, c, d)=\left(\dfrac{4a-4}{5}, \dfrac{-6a+11}{10}, \dfrac{-12a+7}{10}\right)$

以上, 連立方程式の演習でした.
幾何の設問を, 数式化して求めることができます.

[解] (1) 点B，点DからACに，それぞれ垂線$BH_1$，$DH_2$をおろし，$BH_1=h_1$，$DH_2=h_2$，とする．

図.I



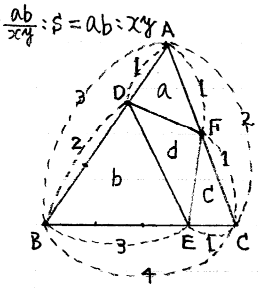

$\triangle ABC:\triangle ADE=\frac{1}{2}bh_1:\frac{1}{2}yh_2=bh_1:yh_2$ ---①

一方 $\triangle ABH_1 \backsim \triangle ADH_2$ により，$a:x=h_1:h_2$　$ah_2=xh_1$　$h_2=\frac{xh_1}{a}$ を①に代入

$\triangle ABC:\triangle ADE=bh_1:yh_2=bh_1:y\cdot\frac{xh_1}{a}=b:\frac{xy}{a}=ab:xy$

(別解) $\triangle ADE=S$とおく．$\triangle ABE=S\times\frac{a}{x}$，$\triangle ABC=\triangle ABE\times\frac{b}{y}=S\times\frac{ab}{xy}$　よって．$\triangle ABC:\triangle ADE=S\times\frac{ab}{xy}:S=ab:xy$

(2) $\triangle ADF=a$，$\triangle BED=b$，$\triangle CFE=c$，$\triangle DEF=d$ とする．




(1)より．$\triangle ABC:\triangle ADF=a+b+c+d:a=3\times2:1\times1$　※(補)　$a+b+c+d=6a$ ----①

$\triangle ABC:\triangle BED=a+b+c+d:b=3\times4:2\times3=2:1$　$a+b+c+d=2b$ ---②

$\triangle ABC:\triangle CFE=a+b+c+d:c=4\times2:1\times1=8:1$　$a+b+c+d=8c$ ---③

①，②より $6a=2b$　$b=3a$ ---④　①，③より $6a=8c$　$3a=4c$　$c=\frac{3}{4}a$ ---⑤

④，⑤を①に代入　$d=6a-a-b-c=6a-a-3a-\frac{3}{4}a=2a-\frac{3}{4}a=\frac{5}{4}a$

よって $\triangle ADF:\triangle BED:\triangle CFE:\triangle DEF=a:b:c:d=a:3a:\frac{3}{4}a:\frac{5}{4}a=1:3:\frac{3}{4}:\frac{5}{4}=4:12:3:5$

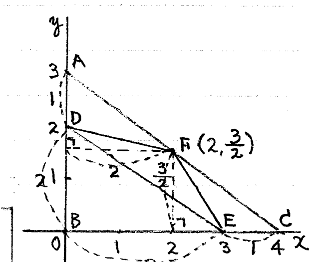
小さい順に．$\triangle CFE:\triangle ADF:\triangle DEF:\triangle BED=3:4:5:12$．答

(別解) $\triangle ABC$の面積$=6$とおくと．$\triangle ADF=\frac{1\times1}{3\times2}\times\triangle ABC=1$，$\triangle BED=\frac{2\times3}{3\times4}\times6=3$，$\triangle CFE=\frac{1\times1}{4\times2}\times6=\frac{3}{4}$，$\triangle DEF=6-1-3-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$

(補) 実際には，$AD:DB=1:2$ などは，等式化して$AD=t$，$DB=2t$ などとおかなければなりません．$AB=3t$，

$AF:FC=1:1$　$AF=S$，$FC=S$，$AC=2S$ ですから $a+b+c+d:a=3t\times2S:t\times S=6:1$ となって．S，tは消えてしまいます．①などを$-5a+b+c+d=0$ と変形して．(例1.3)のように，解けますが，目的は，b，c，dをaで表すことであり，①，②，③をよく見てから，解きましょう．方程式を単に解くだけでも，考えて解く．これが，数学力です．

更に，(1)を利用しないで，求めるとすれば，直交座標を利用して，次のように，easyです．穴うめ形式には，使えます．どんどん利用しましょう．右図より．$\triangle ADF=1\times2\times\frac{1}{2}=1$




$\triangle BED=3\times2\times\frac{1}{2}=3$，$\triangle CFE=1\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$，$\triangle ABC=4\times3\times\frac{1}{2}=6$

$\triangle DEF=\triangle ABC-\triangle ADF-\triangle BED-\triangle CFE=6-1-3-\frac{3}{4}=2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$　以下略

この設問を，この方法で，解くのは．outですね．検算には，使えます．

A(0,3)，B(0,0)，C(4,0)

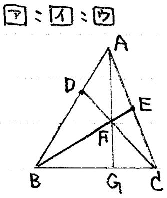
D(0,2)，E(3,0)，F$(2,\frac{3}{2})$

FはA(0,3)とC(4,0)の中点だからF$(\frac{0+4}{2},\frac{3+0}{2})=(2,\frac{3}{2})$

---

[類] 右図 $AD:DB=1:2$，$AE:EC=1:1$，のとき 四角形$ADFE:\triangle BFD:\triangle CEF=$㋐:㋑:㋒

更に$BG:GC=$㋓:㋔ である．




(解1) 右下のグラフを考える．直線BE：$y=-\frac{1}{3}x+1$，直線CD：$y=-2x+2$

点Fの座標を求める．$-\frac{1}{3}x+1=-2x+2$　$-x+3=-6x+6$　$5x=3$

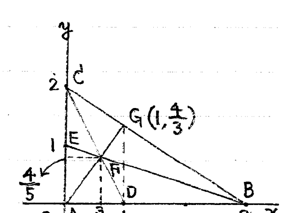
$x=\frac{3}{5}$，$y=-2\times\frac{3}{5}+2=-\frac{6}{5}+\frac{10}{5}=\frac{4}{5}$　$\therefore F(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$　$\triangle BFD=2\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{5}$

$\triangle CEF=1\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$，四角形$ADFE=\triangle ABE-\triangle BFD=3\times1\times\frac{1}{2}-\frac{4}{5}=\frac{15}{10}-\frac{8}{10}=\frac{7}{10}$

よって ㋐:㋑:㋒$=\frac{7}{10}:\frac{4}{5}:\frac{3}{10}=7:8:3$　直線AF：$y=\frac{4}{3}x$　直線BC：$y=-\frac{2}{3}x+2$

点Gの座標を求める．$\frac{4}{3}x=-\frac{2}{3}x+2$　$4x=-2x+6$　$6x=6$　$x=1$，$y=\frac{4}{3}$　$\therefore G(1,\frac{4}{3})$

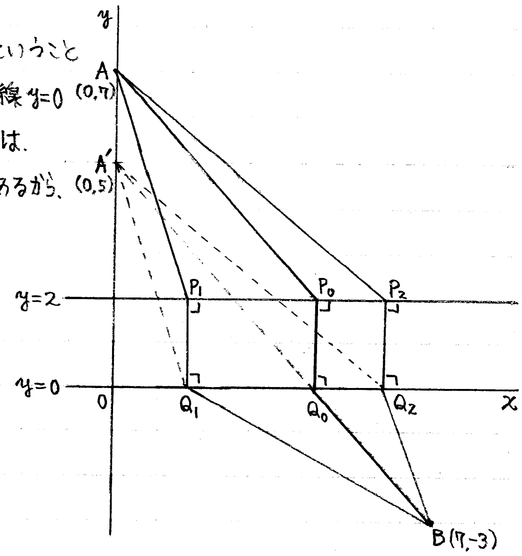
$BG:GC=BD:DA=2:1$(=㋓:㋔)




(解2) メネラウスの定理，チェバの定理を用います．P.22にあります．Best解は，チェバの定理の利用ですが--------

43. (1) 2つの定点をA(0,7), B(7,−3)とする。2つの直線 $y=2$, $y=0$ 上に、それぞれ点P,点Qを線分PQが、2つの直線に垂直になるようにとる。$l=AP+PQ+QB$ が最小になるときの $l$ の値とそのときの点P,点Qの座標を求めよ。
(2) (1)で求めた、$l$ が最小になるときの状態をグラフに図示し、最小となる理由を説明せよ。

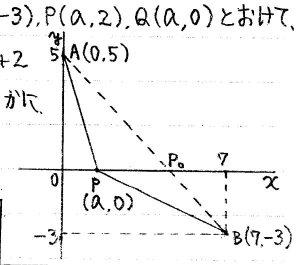
(考)「三角形の2辺の長さの和は、他の1辺の長さより大きい」を用います。(2)の説明には、これをかき込むことにします。
(1)については、有名な方法ですから、知っておられる方も多いでしょう。(2)の説明が大切です。



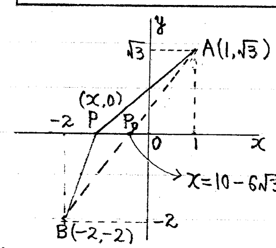

(解) (1) AからBまで、A→P→Q→B と行くときの最短距離を求めよということである。右図、AからPQ=2だけ下の点A′(0,5)をとり、A′Bと直線 $y=0$ との交点を $Q_0$ とし、図のように $P_0$ をとれば、求める最小の $l$ は、
$l_0=AP_0+P_0Q_0+Q_0B$ である。直線A′Bは $y=-\frac{8}{7}x+5$ であるから、
$y=0$ とおいて、$Q_0\left(\frac{35}{8},0\right)$ したがって $P_0\left(\frac{35}{8},2\right)$
$l_0=AP_0+P_0Q_0+Q_0B=A'Q_0+2+Q_0B=(A'Q_0+Q_0B)+2=A'B+2$
$=\sqrt{(7-0)^2+(-3-5)^2}+2=\sqrt{49+64}+2=\sqrt{113}+2$

(2) (1)の $P_0, Q_0$ 以外の点 $P_1, Q_1$ をとったとする。(右図)
四角形 $AA'Q_1P_1$ は、平行四辺形だから、(平行な2本の線分の長さが等しい。) $AP_1=A'Q_1$, $P_1Q_1=AA'$,
$$\begin{cases} l_1=AP_1+P_1Q_1+Q_1B=A'Q_1+2+Q_1B=A'Q_1+Q_1B+2 \\ l_0=AP_0+P_0Q_0+Q_0B=A'Q_0+2+Q_0B=A'Q_0+Q_0B+2=A'B+2 \end{cases}$$
三角形の二辺の長さの和は、他の一辺の長さより大きいから、$\triangle A'Q_1B$ を見ると、$A'Q_1+Q_1B>A'B$
したがって $l_1 \geqq l_0$ ($Q_1 \equiv Q_0$ のとき、等号が成立する。)。例えば、$P_2, Q_2$ の位置にあっても同様のことである。

(補) もしも、線分PQの傾きが1 ($PQ=2\sqrt{2}$ となる)を保ちながら、P,Qが動くときであれば、この設問の(解)は、どのようにしますか。これは、君達、美男美女にお任せです。
大学入試の話になりますが、次の様なことが理解できると思います。A(0,7), B(7,−3), P(a,2), Q(a,0)とおけて、
$l=AP+PQ+QB=\sqrt{(0-a)^2+(7-2)^2}+2+\sqrt{(a-7)^2+(0-(-3))^2}=\underline{\sqrt{a^2+5^2}+\sqrt{(a-7)^2+(-3)^2}}+2$
あらためて、P(a,0), A(0,5), B(7,−3)とおけば、下線部 $=AP+BP=m$ の最小値は、明らかに、ABのときであり、$m$ の最小値は、$AB=\sqrt{7^2+8^2}=\sqrt{49+64}=\sqrt{113}$ ∴ $l_0=\sqrt{113}+2$




(問) $T=\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2+4x+8}$ の最小値とそのときの $x$ の値を求めよ。
(カイ.) $T=\sqrt{(x-1)^2+3}+\sqrt{(x+2)^2+4}$ P(x,0), A(1,√3), B(−2,−2) ※下 とおけば、(右図)
$T=AP+PB \geqq AB=\sqrt{(1+2)^2+(\sqrt{3}+2)^2}=\sqrt{9+3+4\sqrt{3}+4}=\sqrt{16+4\sqrt{3}}=2\sqrt{4+\sqrt{3}}$
ABの式は、$y=\frac{\sqrt{3}-(-2)}{1-(-2)}(x-1)+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}+2}{3}(x-1)+\sqrt{3}$ $y=0$ とおいて、
$0=\frac{\sqrt{3}+2}{3}(x-1)+\sqrt{3}$ $(\sqrt{3}+2)(x-1)=-3\sqrt{3}$ $x-1=\frac{-3\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=-3\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$
$x=-6\sqrt{3}+9+1=10-6\sqrt{3}$



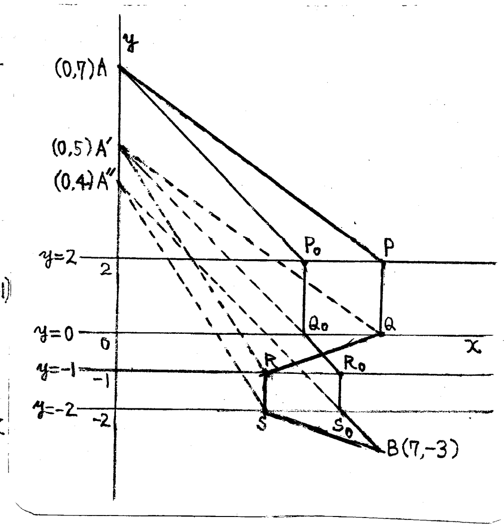

※Bの座標をB(−2,2)とおけば、x軸に対称な点B′をとってかくことになります。

[類1] A(0,7), B(7,-3), 直線 $y=2$, $y=0$ 上の動点をそれぞれ P, Q（但し線分PQは$x$軸に垂直）, 直線 $y=-1$, $y=-2$ 上の動点をそれぞれ R, S,（但し線分RSは$x$軸に垂直）とする. 図を大き目に,ていねいに描け.

(1) $l=AP+PQ+QR+RS+SB$ の最小値 $l_0$ とその値をとる P,Q,R,S の座標 $P_0, Q_0, R_0, S_0$ を求めよ.

(2) (1)で求めた $l_0$ となる理由を図を用いて説明せよ.

(解)(1) $PQ=AA'=2$ となる点$A'(0,5)$, $RS=A'A''=1$ となる点$A''(0,4)$をとる.




線分$A''B$と直線$y=-2$との交点を$S_0$とする. 直線$A''B$は $y=\frac{4-(-3)}{0-7}x+4$ $=-x+4$ だから, $y=-2$ のとき $x=6$ ∴$S_0(6,-2)$

線分$A''B$に平行(傾き$-1$)な点$A'(0,5)$を通る直線と直線$y=0$, 直線$y=-1$との交点をそれぞれ$Q_0, R_0$とする. 直線 $y=-x+5$ において, $y=0$のとき $x=5$ ∴$Q_0(5,0)$, $y=-1$のとき $x=6$ ∴$R_0(6,-1)$ 線分$A'R_0$(or 線分$A'Q_0$ or 線分$A''B$)に平行な(傾き$-1$)点A(0,7)を通る直線と直線$y=2$との交点を$P_0$とする.

直線 $y=-x+7$ において $y=2$ のとき $x=5$ ∴$P_0(5,2)$

最小値 $l_0=AP_0+P_0Q_0+Q_0R_0+R_0S_0+S_0B=AP_0+Q_0R_0+S_0B+3$ について,
四角形$AA'Q_0P_0$, 四角形$A'A''S_0R_0$ は,いずれも平行四辺形だから,
$AP_0=A'Q_0$, $A'R_0=A''S_0$

したがって $A''B=A''S_0+S_0B=A'R_0+S_0B=A'Q_0+Q_0R_0+S_0B=AP_0+Q_0R_0+S_0B$ ∴$l_0=A''B+3$

$A''B=\sqrt{(0-7)^2+(4-(-3))^2}=\sqrt{7^2+7^2}=\sqrt{2\times7^2}=7\sqrt{2}$ ∴$l_0=7\sqrt{2}+3$

| | |
|---|---|
| 答 | (1) $\begin{cases} l_0=7\sqrt{2}+3 \\ P_0(5,2), Q_0(5,0), R_0(6,-1), S_0(6,-2) \end{cases}$<br>(2) 左説明 |

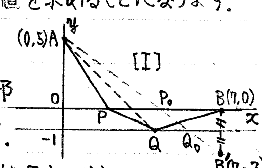
(2) $P_0, Q_0, R_0, S_0$ 以外の点 P,Q,R,S をとったとする. 四角形$AA'QP$, 四角形$A'A''SR$はいずれも平行四辺形だから, $AP=A'Q$, $A'R=A''S$
三角形の2辺の長さの和は,他の1辺の長さより大きいから, $\triangle A'RQ$について, $A'Q+QR>A'R$, $\triangle A''SB$について, $A''S+SB>A''B$
したがって, $l=AP+PQ+QR+RS+SB=A'Q+QR+SB+3>A'R+SB+3=A''S+SB+3>A''B+3=l_0$
P,Qが$P_0, Q_0$に一致し,かつR,Sが$R_0, S_0$に一致するときのみ $l=l_0$ となり, $l_0$が最小となる.

(補) この設問では, $A''B$の傾きが$-1$ですから, $P_0, Q_0, R_0, S_0$の座標, $A''B$の長さ($1,1,\sqrt{2}$の直角三角形の利用)は,図形を利用して,すぐに求まります. 点Bの座標を変えて,やってみて下さい。この設問は,(2)の説明をかくのが大切です.

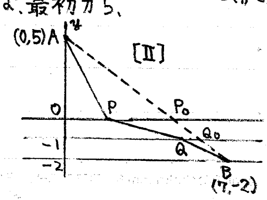
更に,もう少し考えてみます. P(a,2), Q(a,0), R(b,-1), S(b,-2) とおきます. $AP=\sqrt{a^2+5^2}$, $QR=\sqrt{(a-b)^2+1^2}$, $SB=\sqrt{(b-7)^2+1^2}$

$PQ=2$, $RS=1$ ですから, $l=\underline{\sqrt{a^2+5^2}+\sqrt{(a-b)^2+1^2}+\sqrt{(b-7)^2+1^2}}+3$ となって, 下線部($m$とする)の最小値を求めることになります.

改めて,点を設定します. A(0,5), P(a,0), Q(b,-1), B(7,0) とすると, $m=AP+PQ+QB$ となります.




P,Qどちらも動きますので,どちらか一方を固定すると,この場合Qを固定すると,右図[I]波線部のとき,最小であることがわかり,次に,Qを動かして,最小値の更に最小値を求めることになります.
すると,点Bの直線$x=-1$に対する対称点B'(7,-2)をとって, AB'を結ぶことになります. とすれば,最初から,
A(5,0), P(a,0), Q(b,-1), B(7,-2) とおいてしまうと, 右図[II]となり,明らかに,線分ABが最小であることがわかります. $AB=\sqrt{7^2+7^2}=\sqrt{2\times7^2}=7\sqrt{2}=m$の最小値 ∴$l_0=7\sqrt{2}+3$



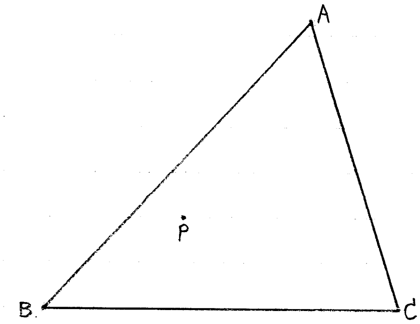

ABの式 $y=-x+5$ において, $y=0$ のとき $x=5$ ∴$P_0(5,0)$ (a=5, [類1]本題の点$P_0$の座標ではない)
$y=-1$ のとき $x=6$ ∴$Q_0(6,-1)$ (b=6, [類1]本題の点$Q_0$の座標ではない)

[類2] 右図, $\triangle ABC$の内部の点をPとする. $l = AP+BP+CP$ が最小となる点$P_0$を作図したい.($\triangle ABC$は鋭角三角形である)

(1) $\triangle ABC$の外側に線分ABを1辺とする正三角形ABDを描き, $\triangle ABC$の内部に適当な点Pをとって(右図,点Pはすでにとってある.)辺ABの側に正三角形APQを作図せよ.

(2) $l = AP+BP+CP$ の最小値は,線分DCであることを証明せよ.

(3) 点$P_0$を作図せよ.




(解)(1)下図

(2) $\triangle ABP$と$\triangle ADQ$において, $\triangle APQ$は正三角形なので $AP=AQ$ …①

$\triangle ABD$は正三角形なので $AB=AD$ …②

$\angle PAB = \angle PAQ - \angle BAQ = 60^\circ - \angle BAQ$, $\angle QAD = \angle BAD - \angle BAQ = 60^\circ - \angle BAQ$

$\therefore \angle PAB = \angle QAD$ …③ ①,②,③より,2辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABP \equiv \triangle ADQ$ $\therefore BP = DQ$, 正三角形APQより $AP = QP$

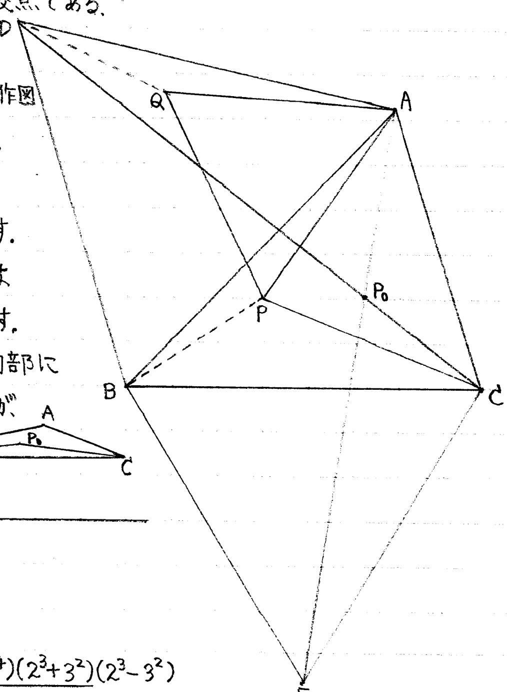
よって $AP+BP+CP = QP+DQ+CP = DQ+QP+PC$ これは,点Dと点Cを結ぶ折れ線なので, $AP+BP+CP \geqq DC$ 点PがDC上にあるとき(このとき点QもDC上にある)

$AP+BP+CP = DQ+QP+PC = DC$ となり,線分DCが最小である.

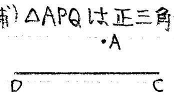
(3) $\triangle ABC$の外側に線分BCを1辺とする正三角形BCEを描き, EAとDCの交点を$P_0$とすればよい.

(辺BCの側に正三角形CPQ'を描けば,(2)と同様なことになり, EAが最小となる. DC=EAということでもある.

点$P_0$はDC上にあり,かつEA上にもあるから点$P_0$は,DCとEAの交点である.




補) $\triangle APQ$は正三角形だから$\triangle AP_0Q_0$も正三角形 $\therefore \angle AP_0D = 60^\circ$



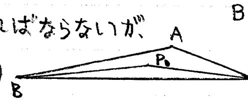

左図, DC上に$\angle AP_0D = 60^\circ$となる点$P_0$を作図してもよいです.できますね. P.33の(4)下の[類4]をする.

$\angle AP_0B = \angle BP_0C = \angle CP_0A = 120^\circ$も大切なことです.

補)点$P_0$をフェルマー点といいます.大学入試にも出題されて有名です.

$120^\circ$以上の内角をもつ鈍角三角形の内部にフェルマー点はとれません.丁度, $120^\circ$のときは,その頂点がフェルマー点?です.

どうしてとれないかというと, $\angle BAC$を$120^\circ$以上の鈍角としたとき,内部にフェルマー点$P_0$があるとすると, $\angle BP_0C = 120^\circ$でなければならないが, $\angle BP_0C > \angle BAC \geqq 120^\circ$となり矛盾するからです.(背理法)




---

問. $2^{48}$と$3^{32}$の大,小を調べよ.

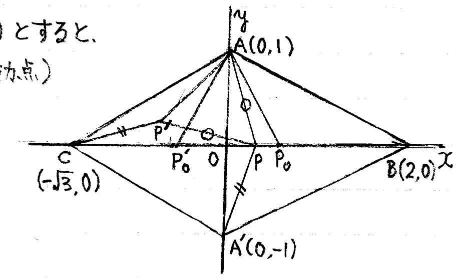
(カイ) $T = 2^{48} - 3^{32} = (2^{24}+3^{16})(2^{24}-3^{16}) = (2^{24}+3^{16})(2^{12}+3^{8})(2^{12}-3^{8})$

$= (2^{24}+3^{16})(2^{12}+3^{8})(2^{6}+3^{4})(2^{6}-3^{4}) = \underline{(2^{24}+3^{16})(2^{12}+3^{8})(2^{6}+3^{4})(2^{3}+3^{2})}(2^{3}-3^{2})$

下線部は正である. $2^3 - 3^2 = 8-9 = -1 < 0$ であるから $T<0$ $2^{48}-3^{32}<0$ $\therefore 2^{48} < 3^{32}$

[類3] $y=2\sqrt{x^2+1}+|x-2|$ の最小値とそのときの$x$の値を求めよ.

(解) $y=\sqrt{x^2+(-1)^2}+\sqrt{x^2+1^2}+|x-2|$　A(0, 1), A′(0, −1), B(2, 0), P($x$, 0) とすると,
右図で, $y=AP+A'P+BP$ の最小値を求めよということである.(点Pは動点)
正三角形AA′Cとなる点C($-\sqrt{3}$, 0)をとり,正三角形APP′を作る.(右図)
△APA′を右回りに60°回転させると△AP′Cに重なる.(△APA′≡△AP′C)
よって, A′P=CP′, 正三角形APP′により, AP=P′P.
したがって, $y=AP+A'P+BP=P'P+CP'+BP=CP'+P'P+PB \geqq CB$
等号は,点P′が, $x$軸上(線分CB上)にあるとき(図, $P_0'$のとき)成立し,
このときの点Pは点$P_0$となり,正三角形$AP_0P_0'$だから, $OP_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ($OA:OP_0=\sqrt{3}:1$)
求める最小値は, $CB=2+\sqrt{3}$ このとき $P_0\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ だから $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき.




△AOCは$1:\sqrt{3}:2$の直角三角形
∴$OC=\sqrt{3}$

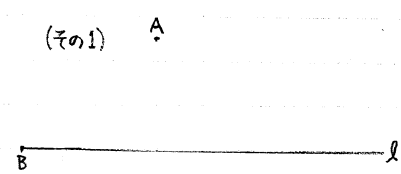
(補) 数III, 理系微積を用いると,次のようにできますが, $y=2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x-2)^2+1}$ となると,微分では,大変でしょう.
(別解) $x>2$ とき, $x$が増加すると$y$も増加する. よって, $x\leqq 2$ で $y=2\sqrt{x^2+1}-x+2$ の最小値を求める.
$$y'=2\times\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\times 2x-1=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{2x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$
分子=0 を解く. $2x=\sqrt{x^2+1}$　$x<0$のとき左辺<0, 右辺>0だから実数解はない. $0\leqq x\leqq 2$のとき
$4x^2=x^2+1$　$3x^2=1$　$x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ であるが, $0\leqq x\leqq 2$ をみたす $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$
$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ の前後で $y'$は負から正へ符号を変え, $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, $y$は極小値(最小値)をとり,
その値は, $y=2\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}+2=\frac{4}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+2=\frac{3}{\sqrt{3}}+2=\sqrt{3}+2$
しかしながら,この(別解)は,理系微積,基礎問題としては,最適ですね.普通は,うまくいきません. P.33の(1)下参照

---

[類4] (その1),(その2)にしたがって,半直線$\ell$上に∠APB=60°となる点Pを作図して,∠APB=60°となる理由を説明せよ.

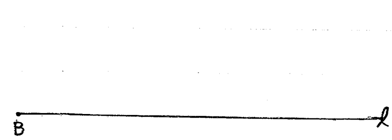
(その1) Aから半直線$\ell$に垂線AHをおろし,正三角形AHCをAHの右側にかく.
∠HACの2等分線$\ell'$と直線$\ell$の交点をPとすればよい.(Bの左側に作図するための円弧があってはならない.)

(その1)




(その2) Aを通り半直線$\ell$と交わる適当な直線$\ell'$を引き交点をCする.
但し,∠ACBは鋭角となる.正三角形ACDをACの右側にかき,△ACDの外心(重心,内心,垂心でもある.)Oをとる. OC(=OA=OD)を半径とする△ACDの外接円を描き,直線$\ell$との交点のうち,Cではない方をPとすればよい.直線$\ell'$をうまくかかないと,わかりにくくなります.

(その2)




(解) (その1)の説明
正三角形AHCなので, ∠HAC=60°,この角の2等分線がAPなので
∠HAP=30°, ∠APB(=∠APH)=180°−∠HAP−∠AHP=180°−30°−90°=60°
作図は,皆さんにお委せ,悪しからず.
(その2)の作図,説明は, P.24の(1)下にあります.

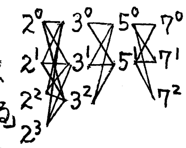
約数の個数と四捨五入

ことわりがない限り、負の約数も含めることにする.(一般に、約数とあれば、負の約数も含まれます.)

> 44. (1) 2028を素因数分解せよ. (2) 2028の約数の個数を求めよ. (3) 2028の正の約数の総和を求めよ.
> (4) 小数第2位を四捨五入して、45.0となる数$x$の範囲を不等号で表せ.(但し、$x=45$も含む)
> (5) 自然数Nの正の平方根の小数第2位を四捨五入したところ、45.0となった.自然数Nの個数を求めよ.
> 但し、平方根そのものが、整数になるものは除く.

[考] (1) $4=2^2$, $9=3^2$, $49=7^2$, $121=11^2$, $169=13^2$, $289=17^2$, $361=19^2$, ---などでわる.自然数$n$の素因数分解は$\sqrt{n}$まで調べる.

(2),(3) (例) $17640=2^3\times3^2\times5^1\times7^2=N$, $a^0=1$ (どのような数も0乗したら1になる.)




正の約数の個数は、「$2^0, 2^1, 2^2, 2^3$の4コから1コを選び、$3^0, 3^1, 3^2$の3コから1コを選び、$5^0, 5^1$の2コから1コを選び、$7^0, 7^1, 7^2$の3コから1コを選んで、かけたものが正の約数である」から、$4\times3\times2\times3=72$個ある.負の約数も加えると、約数の個数は、$72\times2=$ 144個

正の約数の総和は、$(2^0+2^1+2^2+2^3)(3^0+3^1+3^2)(5^0+5^1)(7^0+7^1+7^2)=15\times13\times6\times57=$ 66690

(4) (例)「正の数$x$の小数第2位を四捨五入したら$y$となった.$x$と$y$の関係を不等式で表せ.」

$x=1.345$のとき$y=1.3$です.$y$を10倍すると$10y=13$であり、必ず整数です.1.25以上1.35より小さい数の小数第2位を四捨五入すると$y=1.3$です.したがって$x$は、1.25$(=1.3-0.05)$以上1.35$(=1.3+0.05)$より小さい数でなければなりません.すなわち $y-0.05\leqq x<y+0.05$ ということになりますが、ここで大切なことは、$10y$は整数となるということです.このことを用いる問題も、次頁で設問にします.

(5) $45.0-0.05\leqq\sqrt{N}<45.0+0.05$ です.

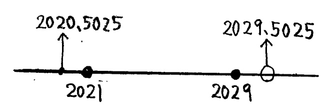
[解] (1) $2028=$ $2^2\times3\times13^2$　　(2) $(2+1)(1+1)(2+1)\times2=3\times2\times3\times2=$ 36個

(3) $(2^0+2^1+2^2)(3^0+3^1)(13^0+13^1+13^2)=7\times4\times183=$ 5124

(4) $45.0-0.05\leqq x<45.0+0.05$　　$44.95\leqq x<45.05$

(5) $44.95\leqq\sqrt{N}<45.05$　　$44.95^2\leqq N<45.05^2$　　$2020.5025\leqq N<2029.5025$

Nは2021以上2029以下の整数であるが、$\sqrt{2025}=45$は除くので 8個




[類1] 本題の続きとして、(6) 2028の正の約数のうち、奇数である約数の個数を求めよ.

(7) 2028の正の約数のうち、偶数である約数の総和を求めよ.

(解) (6) $2^1$, $2^2$を因数に持たない約数の個数だから $3^0, 3^1$ / $13^0, 13^1, 13^2$　$2\times3=$ 6個

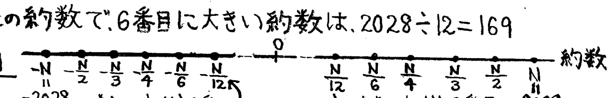
(7) 奇数の約数の総和は、$(3^0+3^1)(13^0+13^1+13^2)=4\times183=732$　求める偶数の約数の総和$=5124-732=$ 4392

(補) (7) $(2^1+2^2)(3^0+3^1)(13^0+13^1+13^2)=6\times4\times183=$ 4392 のようにもできます

[類2] (8) 2028の約数のうち、小さい方から6番目の約数を求めよ

(解) 正の約数は、小さい順に1, 2, 3, 4, 6, 12. したがって正の約数で、6番目に大きい約数は、$2028\div12=169$

したがって、求める約数は、負の約数を考えて、 $-169$



かけはし

四捨五入

[類3] 正の数$x$を7でわった数の小数第2位を四捨五入した数$y$に3をたした数が$3x$に等しい
(1) $x$と$y$についての関係を不等式で表せ.(等式は,(2)で利用する.)
(2) $10y$が整数$n$に等しいことを利用し,(1)の不等式を$n$の不等式で表せ
(3) (2)の不等式を解いて,整数$n$の値を全て求め,$x$の値と$y$の値を求めよ.

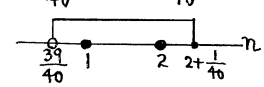
(考) (1) 前頁の[考]をしっかり理解してますか.(補)が(考)ですが,(解)を見ないで,(補)を参考に(解)にtry!

(解) (1) $\underline{y-0.05 \leqq \frac{x}{7} < y+0.05}$ ---① (但し,四捨五入した数$y=0.0$のとき$0<\frac{x}{7}<0.05$ではある.)

(2) $10y=n$(整数) ---②　$y+3=3x$ ---③
②より $y=\frac{n}{10}$ ---②′　②′を③に代入 $\frac{n}{10}+3=3x$ ∴ $x=\frac{n}{30}+1$ ---③′
②′,③′を①に代入 $\underline{\frac{n}{10}-\frac{1}{20} \leqq \frac{1}{7}\left(\frac{n}{30}+1\right) < \frac{n}{10}+\frac{1}{20}}$ ---④

| 答 | (1) ①　(2) ④<br>(3) $\begin{cases} n=1 \text{ のとき } (x,y)=\left(\frac{31}{30},\frac{1}{10}\right) \\ n=2 \text{ のとき } (x,y)=\left(\frac{16}{15},\frac{1}{5}\right) \end{cases}$ |
|---|---|

(3) ④×20　$2n-1 \leqq \frac{20}{7}\left(\frac{n}{30}+1\right) < 2n+1$　7倍して $14n-7 \leqq 20\left(\frac{n}{30}+1\right) < 14n+7$
$14n-7 \leqq \frac{2}{3}n+20 < 14n+7$　3倍して $42n-21 \leqq 2n+60 < 42n+21$
前の不等式より $40n \leqq 81$ ∴ $n \leqq \frac{81}{40} = 2+\frac{1}{40}$, 後の不等式より $39<40n$ ∴ $\frac{39}{40}<n$　∴ $\frac{39}{40} < n \leqq 2+\frac{1}{40}$ ---Ⓣ




Ⓣをみたす整数$n$は $\underline{n=1}$ or $\underline{n=2}$
(i) $n=1$のとき ③′に入れて $\underline{x}=\frac{1}{30}+1=\underline{\frac{31}{30}}$, ②′に入れて $\underline{y}=\underline{\frac{1}{10}}(=0.1)$
(ii) $n=2$のとき ③′に入れて $\underline{x}=\frac{2}{30}+1=\underline{\frac{16}{15}}$, ②′に入れて $\underline{y}=\frac{2}{10}=\underline{\frac{1}{5}}(=0.2)$

(補) $x=\frac{31}{30}$, $x=\frac{16}{15}$のとき,本当に題意にあっているか,実際に計算して確かめて下さい.
- $x,y,n$ 3文字の等式,不等式のまじった連立不等式です.制限があるのは,整数$n$ですから,2つの等式から,$y,x$を$n$の式で表し,不等式に入れ,整数$n$だけの不等式にします.この不等式から,まず整数$n$の値を求め,$y,x$を求めます.$\frac{x}{7}=x'$とおいて,$(x',y)$の階段状のグラフをかけば,おもしろいでしょう.P.34の(5)に大学入試問題あります.

[類4] $x$は整数でない正の数とする.$\frac{3x+1}{2}$の小数第1位を四捨五入した数が$2x-1$に等しいとき,$x$の値を求めよ.

(解) $\frac{3x+1}{2}$の小数第1位を四捨五入した数を整数$n$とする. $n-\frac{1}{2} \leqq \frac{3x+1}{2} < n+\frac{1}{2}$ ---①　$n=2x-1$ ---② である.
②より $x=\frac{n+1}{2}$ ---②′　②′を①に代入 $n-\frac{1}{2} \leqq \frac{3\left(\frac{n+1}{2}\right)+1}{2} < n+\frac{1}{2}$
2倍して　$2n-1 \leqq \frac{3}{2}(n+1)+1 < 2n+1$　更に2倍して, $4n-2 \leqq 3(n+1)+2 < 4n+2$
左の不等式より, $4n-3n \leqq 3+2+2$ ∴ $n \leqq 7$　右の不等式より, $3+2-2 < 4n-3n$ ∴ $3<n$　$3<n\leqq 7$ ---Ⓣ
Ⓣをみたす整数$n$は, $n=4,5,6,7$
(i) $n=4$のとき ②′に入れて $x=\frac{5}{2}$　(ii) $n=5$のとき ②′に入れて, $x=3$　(iii) $n=6$のとき ②′に入れて $x=\frac{7}{2}$
(iv) $n=7$のとき ②′に入れて $x=4$
求める解は,整数でない正の数だから $\underline{x=\frac{5}{2} \text{ or } x=\frac{7}{2}}$

[類5] 正の約数を18個もつ最小の自然数Nを求めよ. $\boxed{\text{答}\ N=180}$

(解) 18個 $=2\times3^2$個

(i) $18\times1$個のパターン $a^{17}\times b^0$ $a,b$は素数 最小は $2^{17}$

(ii) $9\times2$個のパターン $a^8\times b^1$ $a,b$は素数 最小は $2^8\times3^1$

(iii) $6\times3$個のパターン $a^5\times b^2$ $a,b$は素数 最小は $2^5\times3^2$

(iv) $3\times3\times2$個のパターン $a^2\times b^2\times c^1$ $a,b,c$は素数

(ア) $2^2\times3^2\times5^1=4\times9\times5=180$　(イ) $2^2\times5^2\times3=4\times25\times3=300$　(ウ) $3^2\times5^2\times2=9\times25\times2=450$

よって求める $N=\underline{180}$ ((イ),(ウ)が(ア)より大きいことは、明らかですが---)

[類6] 9個の正の約数をもつ300以下の自然数Nを小さい順に全て求めよ. $\boxed{\text{答}\ N=36,100,196,225,256,}$

(解) 9個 $=3^2$個

(i) $9\times1$個のパターン $a^8\times b^0$ $a,b$は素数 最小は $2^8=16^2=\underline{256}<300$ , $3^8=(3^4)^2=81^2>300$

(ii) $3\times3$個のパターン $a^2\times b^2$ $a,b$は素数 小さい順に調べる.

(ア) $2^2\times3^2=4\times9=\underline{36}<300$　(イ) $2^2\times5^2=4\times25=\underline{100}<300$　(ウ) $2^2\times7^2=4\times49=\underline{196}<300$

(エ) $2^2\times11^2=4\times121=484>300$　(オ) $3^2\times5^2=9\times25=\underline{225}<300$　(カ) $3^2\times7^2=9\times49=441>300$

したがって求める $N=\underline{36,100,196,225,256}$

(小さい順 $2^2\times3^2$, $2^2\times5^2$, $2^2\times7^2$, $2^2\times11^2$, ------
小さい順 $3^2\times5^2$, $3^2\times7^2$, $3^2\times11^2$, -----
小さい順 $5^2\times7^2$, $5^2\times11^2$, -----)

[類7] 63の倍数で正の約数が15個である自然数を全て求めよ. $\boxed{\text{答}\ 3969,21609,}$

(解) 15個 $=3\times5$個　$63=3^2\times7^1$であるから $3^2\times7^4=63\times7^3=63\times343=\underline{21609}$ or $3^4\times7^2=63\times3^2\times7=\underline{3969}$

[類8] $\dfrac{260}{2n-1}$が自然数となるような自然数$n$を全て求めよ. $\boxed{\text{答}\ n=1,3,7,33,}$

(解) $260=2^2\times5\times13$, $2n-1$は奇数であるから、$2n-1=1,5,13,5\times13$, の4つの場合である.

よって $\underline{n=1,3,7,33,}$

[類9] $x,y$が整数のとき $5x+y-xy-12=0$ をみたす$(x,y)$の組を全て求めよ $\boxed{\text{答}\ (x,y)=(8,4)(2,-2)(0,12)(-6,6)}$

(考) $x$ or $y$について、解く

(解) $5x-12=xy-y=(x-1)y$ $x=1$のとき $-7=0\cdot y$となり不合理 $\therefore x\neq1$ $\therefore y=\dfrac{5x-12}{x-1}=\dfrac{5(x-1)-7}{x-1}=5-\dfrac{7}{x-1}$

$x,y,5$は整数だから、分母$x-1$は、分子7の約数である. $\therefore x-1=7,1,-1,-7$ $\therefore x=8,2,0,-6$ の順に

$y=4,-2,12,6$　$\underline{(x,y)=(8,4)(2,-2)(0,12)(-6,6)}$

(別解) P.7の(6)下　[類10]がP.4の(3)下にあります.

素因数分解，$46 \leqq \sqrt{N} \leqq 46$をみたす自然数Nの個数，

[類10] (1) $46 \leqq \sqrt{N} \leqq 47$ をみたす自然数Nの個数を求めよ

(2) $n_1 < \sqrt{2021} < n_1+1$, $n_2 < \sqrt{2027} < n_2+1$, $n_3 < \sqrt{2029} < n_3+1$ をみたす整数 $n_1, n_2, n_3$ を求めよ.

(3) 自然数 $m$ が素数であることを調べるには，$\sqrt{m}$ より小さい(以下でもよい)素数で $m$ がわり切れるかを調べれば よいことがわかっている．$\sqrt{2029}$ より小さい素数を全て，小さい順にかき出し，その個数を求めよ.

(4) $\sqrt{2025}$ 以下の自然数から，1個をとり出したとき，とり出した数が素数でないpro.(確率の略)を求めよ.

(5)，(3)を利用すると，2027, 2029 はどちらも素数(双子素数)であることがわかる．しかし，素因数分解できることを示せる特殊な場合もある．2021 を素因数分解して，2021 が素数でないことを示せ.

(6) $M=\sqrt{2021k}$, $k$は自然数 のとき，Mが10000に最も近い整数となる整数$k$の値とそのときの整数Mの値を求めよ.

(考) (1) 例1 $6 \leqq n < 11$. をみたす整数$n$の個数 (カイ) $6 \leqq n \leqq 10$ $\underbrace{\overbrace{1,2,3,4,5}^{5コ},6,7,8,9,10}_{10コ}$ $\therefore 10-5=$ 5個

例2 $-3 < n < 4$ をみたす整数$n$の個数 (カイ) $-2 \leqq n \leqq 3$ $-\infty \cdots -5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3$ $3-(-3)=$ 6個

例3 $n \leqq M < n+k$ ($k=1,2,\cdots$, $n$は整数) をみたす整数Mの個数 $n \leqq M \leqq n+k-1$ $\therefore (n+k-1)-(n-1)=$ $k$個

例4 $n < M < 2n+k$ ($k=0,1,2,\cdots$, $n$は自然数)をみたす整数Mの個数 $n+1 \leqq M \leqq 2n+k-1$ $\therefore (2n+k-1)-n=$ $n+k-1$個

(2) 例 $\sqrt{4321}=n$ の整数部分は□　開閉法という方法がありますが，適当に整数を決めて平方します. $60^2=3600$, $70^2=4900$, $65^2=4225$, $66^2=4356$ $\therefore 65 < \sqrt{4321} < 66$ $\therefore$ □ $=65$

(3) 一番小さい素数であり，ただ1つの偶数である2(2以外の素数は全て奇数)から，順にかいていきます.

(4) 自然数の分類に次のような分け方もあります. (i)素数 (ii)合成数 (iii)1

(i) 素数 その数自身と1のちょうど2つの正の約数をもつ自然数。1は正の約数は1ただ1つなので素数ではない。
2は，1と2の2つの正の約数をもつので，素数の中では唯一の偶数である．このことは重要です.

(ii) 合成数 2つ以上の素数の積である自然数．その数自身と1以外に正の約数をもつ自然数。1は合成数でない.

(iii) 1　1だけが特別な数として，素数でも合成数でもない自然数.

(5) ヒントは(4)です. (6) 根号の中が$(整数)^2$となることが必要です. 10000より小さいではありません.

(解) (1) $46^2 \leqq N \leqq 47^2$　$2116 \leqq N \leqq 2209$ $\therefore 2209-2115=$ 94個

(2) $44^2=1936$, $45^2=2025$, $46^2=2116$　$44^2 < 2021 < 45^2(=2025) < 2027 < 2029 < 46^2$
$44 < \sqrt{2021} < 45(=\sqrt{2025}) < \sqrt{2027} < \sqrt{2029} < 46$　よって $n_1=44$, $n_2=45$, $n_3=45$

(3) $45 < \sqrt{2029} < 46$ だから、2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43, の 14個

(4) $\sqrt{2025}=\sqrt{45^2}=45$ だから，素数は，(3)と同じで，14個ある．したがって求めるpro.は $1-\frac{14}{45}=\frac{31}{45}$

| 答 | |
|---|---|
| | (1) 94個 |
| | (2) $n_1=44$, $n_2=45$, $n_3=45$, |
| | (3) 14個，素数は左参照 |
| | (4) $\frac{31}{45}$ |
| | (5) $43 \times 47$ |
| | (6) $k=50525$, $M=10105$ |

P.34の(5)に続く.(P.4下にこの設問の続きあります.)

かけ抜し



(5) $2021 = 2025 - 4 = 45^2 - 2^2 = (45+2)(45-2) = \underline{47 \times 43}$

(6) $M = \sqrt{47 \times 43 \times k}$ であるから、根号がはずれてMが整数となるためには、$k = 47 \times 43 \times l^2$, $l = 1, 2 \cdots$ でなければならない

このとき $M = 47 \times 43 \times l = 2021 \times l$　$l = 4$ のとき $M = 8084$, $l = 5$ のとき $M = 10105$ であるから、求める $\underline{M = 10105}$

$\underline{k} = 2021 \times 5^2 = \underline{50525}$

[類11] $(x+1)(x-2)$ の小数第1位を四捨五入したものが、$1+5x$ と等しくなるような正の実数 $x$ を求めよ.

(考) これは、大学入試問題です. 2次不等式の解き方など知らなくても十分解けます. P.34の(2)[類3]と同じです.

(解) $(x+1)(x-2)$ の小数第1位を四捨五入したものを正の整数 $n (\geqq 2)$ とおく. ($\because x > 0$ より $n = 1+5x > 1$)

$n - \frac{1}{2} \leqq (x+1)(x-2) < n + \frac{1}{2}$ --- ①　$1 + 5x = n\ (\geqq 2)$ --- ②

②より、$x = \frac{n-1}{5}$ を①に代入　$n - \frac{1}{2} \leqq \left(\frac{n-1}{5} + 1\right)\left(\frac{n-1}{5} - 2\right) < n + \frac{1}{2}$　$n - \frac{1}{2} \leqq \frac{(n+4)}{5} \times \frac{(n-11)}{5} < n + \frac{1}{2}$

$25n - \frac{25}{2} \leqq n^2 - 7n - 44 < 25n + \frac{25}{2}$　$44 - \frac{25}{2} \leqq n^2 - 32n < 44 + \frac{25}{2}$　$32 - \frac{1}{2} \leqq n(n-32) < 56 + \frac{1}{2}$

$n = 33$ のとき $n(n-32) = 33 \cdot 1 = 33$ となり成立, $n = 34$ のとき $n(n-32) = 34 \cdot 2 = 68$ 成立しない,

$\therefore n = 33$　このとき $\underline{x} = \frac{33-1}{5} = \underline{\frac{32}{5}}$　($\because n(n-32)$ は $n \geqq 33$ で増加である.)

(補) ①の不等式を $x$ で解いて---などと考えないこと. 制限のある $n$ の方の不等式にして解きます.

$n$ の不等式にしても、2次不等式を解くなどと考えないこと. 式をよくみて、$n(n-32)$ をはさみます.

$2 \leqq n \leqq 32$ ならば、$n(n-32) \leqq 0$ なので $n \geqq 33$ で考えればよい. $n(n-32)$ は、徐々に大きくなります.

本部 〒920-0864 金沢市高岡町2の23
[illegible]

4月末迄にできるようにする.(数I)

$\boxed{\text{新高1}}$ 4月迄の課題 --- テスト形式ならば、150分〜180分

$\boxed{1}$ factorize (1) $x^3-3x^2y+x^2-10xy^2-3xy-10y^2$ (2) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$
(3) $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ (4) $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)-24$

$\boxed{2}$ 二重根号をはずす (1) $\sqrt{8-\sqrt{48}}$ (2) $\sqrt{5-\sqrt{21}}$ (3) $\sqrt{21-\sqrt{360}}$ (4) $\sqrt{\frac{11}{3}-\sqrt{8}}$

$\boxed{3}$ 計算 (1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ (2) $\dfrac{1+i}{(2-3i)(4+i)}$

$\boxed{4}$ $(x-2)(x-3)(x+4)(x+5)$ の $x^2$ の係数は□, $x$ の係数は□

$\boxed{5}$ $\sqrt{7}$ の小数部分が $\alpha$ のとき $f(\alpha)=\alpha^4+5\alpha^3-\alpha^2-\alpha+2=$□

$\boxed{6}$ 1の3乗根 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とするとき $\omega^{2021}+\omega^{1000}-\omega^{301}+\omega-1=$□

$\boxed{7}$ $x=\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$, $y=\dfrac{1}{3+\sqrt{7}}$ のとき $x+y=$□, $x^2+y^2=$□, $x^4-y^4=$□, $x^5+y^5=$□, $x^7y+xy^7=$□

$\boxed{8}$ $x-\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$ のとき (1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=$□ (2) $x^2-\dfrac{1}{x^2}=$□ (3) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=$□ (4) $x^3-\dfrac{1}{x^3}=$□ (5) $x^5\pm\dfrac{1}{x^5}=$□

$\boxed{9}$ $x+y+z=1$, $x^3+y^3+z^3=13$, $xyz=-2$ のとき (1) $xy+yz+zx=$□ (2) $x^4+y^4+z^4=$□ (3) $x^5+y^5+z^5=$□

$\boxed{10}$ ある実数 $a, b, c$ に対して $\dfrac{c}{4a+4b}=\dfrac{a}{4b+4c}=\dfrac{b}{4c+4a}$ が成りたつとき、この式の値を全て求めよ.(記述)

$\boxed{11}$ 整式 $P(x)=x^4+ax^2+bx+17$ は $x^2+3x+4$ でわると余りが $-2x+1$ になる.このとき $a=$□, $b=$□, また
$P\left(\dfrac{-3+7i}{2}\right)=$□ となる.

$\boxed{12}$ 整式 $P(x)$ を $(x-2)^2$ でわったときの余りが $4x-3$ であり、$x+1$ でわったときの余りが $-4$ とする.このとき $P(x)$ を
$(x-2)$ でわった余りは $\boxed{\text{ア}}$, $(x-2)(x+1)$ でわった余りは $\boxed{\text{イ}}$, $(x-2)^2(x+1)$ でわった余りは $\boxed{\text{ウ}}$ である.

$\boxed{13}$ $x$ についての恒等式 $\dfrac{x}{(x-1)^2(x+1)}=\dfrac{a}{(x-1)^2}+\dfrac{b}{(x-1)}+\dfrac{c}{(x+1)}$ が成り立つとき $a=$□, $b=$□, $c=$□ である.

$\boxed{14}$ $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{\square}\left(\dfrac{\square}{x(x+1)}-\dfrac{\square}{(x+1)(x+2)}\right)$ が成り立つ. よって $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}+\dfrac{1}{4\cdot5\cdot6}+\dfrac{1}{5\cdot6\cdot7}=$□ となる.

$\boxed{15}$ $x$ の1次式 $ax=b$ を解け.(記述)

$\boxed{16}$ 3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解を $\alpha, \beta, \gamma$ とする. 解と係数の関係を示し、これを証明せよ.(記述)

数A 6月末迄にできるようにする.

[類1] TOMATO の6文字の順列を考える.

(1) 全ての順列は何通りあるか (2) TO という並びを2個もつ順列は何通りあるか

(3) TO という並びをちょうど1個もつ順列は何通りあるか (4) TO の並びは全くない順列は何通りあるか

(考) (3),(4) が問題ですが---- (1)=(2)+(3)+(4) ですから,(3) or (4) を求めればOKです.(4) から先にする方がわかりやすいかも---- P.102の(3)〜(7)に詳しくあります.

(解) (1) $\frac{6!}{2!\cdot2!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{2}=\underline{180}$ (通り)

(2) TO を X として XMAX 4個の順列を考え $\frac{4!}{2!}=\underline{12}$ (通り)

(3) XMA 3個の順列は $3!=6$ 通り、例えば $^\vee$TO$^\vee$M$^\vee$A$^\vee$ のとき、(i) 4つのVから、2つをとって、T, O (or, O, T) といれるのは、$_4C_2\times2=\frac{4\cdot3}{2}\cdot2=12$ 通り or (ii) 4つのVから1つとって OT といれる、$_4C_1=4$ 通り

したがって、求めるものは $6(12+4)=\underline{96}$ (通り)

(4) (1)=(2)+(3)+(4) より (4)$=180-12-96=\underline{72}$ (通り)

(別解) (4) $^\vee$TM$^\vee$A$^\vee$T を先に並べておいて、3つのVから重複を許して2つとり、O, O を入れる.

$\frac{4!}{2!}\times{}_3H_2=12\times{}_4C_2=12\times\frac{4\cdot3}{2}=\underline{72}$ (通り) ( O$^\vee$M$^\vee$A O$^\vee$ としても、同じようにできます.)

(3) (3)=(1)−(2)−(4)$=180-12-72=\underline{96}$ (通り)

(補) $_nH_r$ については、P.7の(1)参照.

[類2] 赤玉が10個、白玉が90個の合計100個の玉がある.これを A, B, C, D の4個の箱に10個ずつ入れる.

同じ色の玉は区別しないものとして、玉の入れ方は何通りあるかを求めよ.

(考) A, B, C, D に赤玉をそれぞれ $a, b, c, d$ 個入れるとすれば、白玉の個数は決まってしまいます. $a+b+c+d=0$, $a+b+c+d=1$, ---, $a+b+c+d=10$ のそれぞれの負でない整数解 $(a, b, c, d)$ の組の個数の和※が求めるもの.

すなわち $a+b+c+d\leqq10$ をみたす負でない整数解 $(a, b, c, d)$ の組の個数です. P.7の(1),(2)を参照です.

(解) (考)より続けて、$10-a-b-c-d=e(\geqq0)$ とおけば、$a+b+c+d+e=10$ の負でない整数解 $(a, b, c, d, e)$ の組の個数と一致する. よって、求める入れ方は $_5H_{10}={}_{14}C_{10}=\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11}{4\cdot3\cdot2}=7\cdot13\cdot11=\underline{1001}$ (通り)

(補)※ $_4H_0+{}_4H_1+\cdots+{}_4H_{10}={}_3C_0+{}_4H_1+{}_5C_2+\cdots+{}_{13}C_{10}={}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_{13}C_3$ を求めるということです.

P.7の(2)の⑤です.

$\sum_{k=3}^{n}{}_kC_3=\sum_{k=3}^{n}\frac{k(k-1)(k-2)}{6}=\frac{1}{6}\{1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+(n-2)(n-1)n\}=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-2}k(k+1)(k+2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(n-2)(n-1)n(n+1)$

$n=13$ とすれば $\sum_{k=3}^{13}{}_kC_3=\frac{1}{24}\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14=11\cdot13\cdot7=\underline{1001}$ (通り) です.

異なる6コの玉ⓐ,ⓑ,ⓒ,ⓓ,ⓔ,ⓕ，区別のつかない6コの玉(白玉6コ),を箱に分け入れる。

16.[I] 異なる6コの玉ⓐⓑⓒⓓⓔⓕについて、次の方法は何通りあるか

(1) 異なる3つの箱A,B,Cについて、Aに1コ,Bに2コ,Cに3コ入れる。

(2) 異なる3つの箱A,B,Cについて、A,B,Cに1コ,2コ,3コを分け入れる。

(3) 異なる3つの箱A,B,Cについて、Aに1コ,Bに1コ,Cに4コ入れる。

(4) 異なる3つの箱A,B,Cについて、A,B,Cに1コ,1コ,4コを分け入れる。

(5) 異なる3つの箱A,B,Cについて、Aに2コ,Bに2コ,Cに2コ入れる。

(6) 異なる3つの箱A,B,Cについて、A,B,Cに2コ,2コ,2コを分け入れる。

(7) 異なる3つの箱A,B,Cに分け入れる。(空があってもよい)

(8) 異なる3つの箱A,B,Cに分け入れる。(空があってはならない。)

(9) 区別できない3つの箱に、1コ,2コ,3コを分け入れる。(1コ,2コ,3コの3組に分ける。)

(10) 区別できない3つの箱に、1コ,1コ,4コを分け入れる。(1コ,1コ,4コの3組に分ける。)

(11) 区別できない3つの箱に、2コ,2コ,2コを分け入れる。(2コ,2コ,2コの3組に分ける。)

(12) 区別できない3つの箱に分け入れる。(空があってもよい)

(13) 区別できない3つの箱に分け入れる。(空があってはならない)

[II] 区別のつかない6コの玉(白玉6コ)について、上と同じ問題(1)～(13)の方法は何通りあるか。

[考] (7),(8),(12),(13)については、P.8の(4)以降に詳しくあります。
この種の問題については、異なる玉，区別のつかない玉，異なる箱，区別のつかない箱，の4つに注意を払います。例えば、[I](4)を解くときには、[II](4),[I](10),[I](2),などを常に意識します。更に例えば、玉の数を少なくして、3コとか4コとかにして考えるとわかりやすくなるでしょう。解答するにあたっては、問の順にしてない場合もあります。尚、[I](10)などは、解き方を暗記していても、損はないでしょう。「[I](10)異なる6コの玉ⓐⓑⓒⓓⓔⓕを1コ,1コ,4コの3組に分ける方法は何通りあるか」---- $\frac{{}_6C_1\cdot{}_5C_1}{2!}=\frac{6\cdot5}{2}=15$ 通り。(1コ,1コとあるので2!でわる。) [I](11)ならば、$\frac{{}_6C_2\cdot{}_4C_2}{3!}$ (2コ,2コ,2コとあるので3!でわる)

| 答 | | |
|---|---|---|
| | [I] | [II] |
| (1) | 60 | 1 |
| (2) | 360 | 6 |
| (3) | 30 | 1 |
| (4) | 90 | 3 |
| (5) | 90 | 1 |
| (6) | 90 | 1 |
| (7) | 729 | 28 |
| (8) | 540 | 10 |
| (9) | 60 | 1 |
| (10) | 15 | 1 |
| (11) | 15 | 1 |
| (12) | 122 | 7 |
| (13) | 90 | 3 |

[解] [I](1). ${}_6C_1\cdot{}_5C_2=6\cdot\frac{5\cdot4}{2}=\underline{60}$

[I](2). $(A,B,C)=$(1コ,2コ,3コ)(1コ,3コ,2コ)---(3コ,2コ,1コ) $3!=6$ 通りあるので
(1)より $60\times6=\underline{360}$

[I](9) [I](2)でA,B,Cの制約をはずせば、360を$3!=6$でわることになり結局
[I](1)と同じで $\underline{60}$

[I](3) ${}_6C_1\cdot{}_5C_1=\underline{30}$

[I](4) $(A,B,C)=$(1コ,1コ,4コ),(1コ,4コ,1コ),(4コ,1コ,1コ)の3通りあるから、求めるものは、
${}_6C_1\cdot{}_5C_1\cdot3=30\cdot3=\underline{90}$

[I](10) [I](4)でA,B,Cの制約をはずせば、例えば、ⓐ ⓑ ⓒⓓⓔⓕは6通りあるので
$\frac{{}_6C_1\cdot{}_5C_1\cdot3}{6}=\frac{90}{6}=\underline{15}$ [考]の下を暗記して $\frac{{}_6C_1\cdot{}_5C_1}{2!}=\frac{30}{2}=\underline{15}$

[類3] LASALLEの7文字の順列を考える.次の順列の個数を求めよ.(LLLAAES 7文字の順列)

(1)全ての順列の個数$N_1$　　(2)「Aはとなりあう並びがある」順列の個数$N_2$

(3)「Lはとなりあう並びがない」順列の個数$N_3$

(4)「L2文字はとなりあっているがL3文字はとなりあっていない」順列の個数$N_4$

(5)「Aはとなりあう並びがない」かつ「Lはとなりあう並びがない」順列の個数$N_5$

(6)「Aはとなりあう並びがない」かつ「Lはとなりあう並びがある」順列の個数$N_6$

(7)「LとEがとなりあう並びがある」順列の個数$N_7$

(8)「LとAがとなりあう並びがある」順列の個数$N_8$　　(9)次頁、最下段にあります.

| 答 | | |
|---|---|---|
| | (1) $N_1=420$ | (2) $N_2=120$ |
| | (3) $N_3=120$ | (4) $N_4=240$ |
| | (5) $N_5=96$ | (6) $N_6=204$ |
| | (7) $N_7=300$ | (8) $N_8=390$ |

(考) (1),(2),(3),(5),(6)は、「Aはとなりあう並びがある」と「Lはとなりあう並びがある」のVenn図でしょうか?

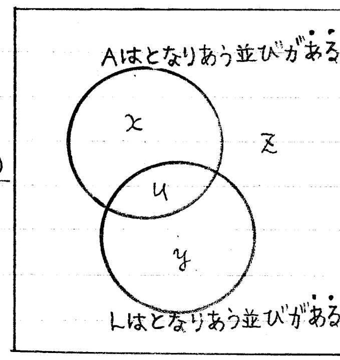
(7),(8)「となりあう並びがない」順列の個数を求めて、$N_1(=420)$からひく.? (8)は、LとAの個数から見ても、「となりあう並びがない」のは、多くはなさそうです.

(解) (1) $\underline{N_1}=\frac{7!}{3!2!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{2}=\underline{420}$　　$N_1=x+y+z+u=420$

(別解) 7個の桝目を作り、LASALLEの順に並ぶpro.pを求める.

左の桝目から順に、L,A,S,A,L,L,Eと入れていくと、そのpro.は、

$p=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{420}$ これは、$\frac{1}{N_1}$に等しい. $\therefore \underline{N_1=420}$




(2) 右図のようにVenn図をかく. $N_2=x+u=120$

(AA),(L),(L),(L),(E),(S)を並べればよい. $\underline{N_2}=x+u=\frac{6!}{3!}=6\cdot5\cdot4=\underline{120}$

(別解) ∨(L)∨(L)∨(L)∨(E)∨(S)∨を並べて$\left(\frac{5!}{3!}\right)$, 6つの∨の1つに(AA)を入れる. $\underline{N_2}=\frac{5!}{3!}\cdot6=\underline{120}$

(3) $N_3=x+z=120$

全ての順列から、3個のLを取り除き、A,A,S,Eの4文字にして、$N_3$をdirectに求める.

∨A∨A∨S∨E∨を並べて、5つの∨から3つの∨を選び、3個のLをふり分けて入れる.

$\underline{N_3}=\frac{4!}{2!}\times{}_5C_3=4\cdot3\cdot\frac{5\cdot4}{2}=\underline{120}$

(4)「となりあうLがある」順列の個数$=N_1-N_3=y+u=420-120=300$であるが、これは、「L2文字がとなりあっている」順列の個数$N_4$と「L3文字がとなりあっている」順列の個数$n$の和である. $N_4+n=300$

$n$は、(LLL)(A)(A)(S)(E)を並べて、$n=\frac{5!}{2!}=5\cdot4\cdot3=60$　よって $\underline{N_4}=300-n=300-60=\underline{240}$

(補)の(別解)を必ず見る.(その1)は、一般的ですが(その2),(その3)もあります.

(5) $N_5=z=120-x=120-24=96$

$x$(「Aはとなりあう並びがある」かつ「Lはとなりあう並びがない」)の順列の個数を求め、$N_3$を利用して、$z=120-x$として求める. ∨(AA)∨(S)∨(E)∨を並べて、4つの∨から3つの∨を選び、3個のLをふり分けていれる.

$x=3!\times{}_4C_3=3\cdot2\cdot4=24$　$\therefore \underline{N_5}=z=120-x=120-24=\underline{96}$

これで、$x,y,z,u$,全て求まり、$x=24$, (2)より $u=120-x=96$, (4)より $y=300-u=204$, $z=96$, 18.(1) $\left(2x^3-\frac{1}{3x^2}\right)^5$ の定数項を求めよ

(2) $(x^2+3x-2)^4$ の $x^5$ の係数を求めよ

[考](1) 2項定理より一般項は $\frac{5!}{p!q!}(2x^3)^p\left(-\frac{1}{3x^2}\right)^q$，$p+q=5$，$p\geqq 0$，$q\geqq 0$，$p, q$ 整数です

(2) 一般項は $\frac{4!}{p!q!r!}(x^2)^p(3x)^q(-2)^r$，$p+q+r=4$，$p\geqq 0$，$q\geqq 0$，$r\geqq 0$，$p, q, r$ 整数

[解](1)[考]より $\frac{5!}{p!(5-p)!}2^p\left(-\frac{1}{3}\right)^{5-p}x^{3p-2(5-p)}$　定数項は $3p-2(5-p)=0$　$\therefore p=2$ のとき

よって $\frac{5!}{2!3!}2^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3=\frac{5\cdot 4}{2}\cdot 2^2\cdot\left(-\frac{1}{27}\right)=\underline{-\frac{40}{27}}$

(2)[考]より $\frac{4!}{p!q!r!}3^q\cdot(-2)^r x^{2p+q}$　　$2p+q=5$　$p\geqq 0$，$q\geqq 0$，$p, q$ 整数だから

$(p, q)=(2,1)(1,3)(0,5)$　$p+q+r=4$　$r\geqq 0$　$r$ 整数より $(p, q, r)=(2,1,1),(1,3,0)$

よって $\frac{4!}{2!1!1!}\cdot 3^1\cdot(-2)^1+\frac{4!}{1!3!0!}\cdot 3^3(-2)^0=-72+108=\underline{36}$

[補] 索引，ケ，係数参照

19の(1) $\dfrac{{}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots\cdots+{}_8C_6+{}_9C_7+{}_{10}C_8+{}_{11}C_9}{{}_{10}C_1+2\cdot{}_{10}C_2+3\,{}_{10}C_3+\cdots\cdots+8\,{}_{10}C_8+9\,{}_{10}C_9+10\cdot{}_{10}C_{10}}$ を求めよ

[考] ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$，$\sum_{k=r}^{n}{}_kC_r={}_{n+1}C_{r+1}$ (→P.91の(2))

$(1+x)^{10}={}_{10}C_0x^0+{}_{10}C_1x+{}_{10}C_2x^2+\cdots\cdots+{}_{10}C_9x^9+{}_{10}C_{10}x^{10}$ の両辺を $x$ で微分して

$x=1$ を代入すると $\cdots\cdots$

$(1+x)^{10}={}_{10}C_{10}x^0+{}_{10}C_9x+{}_{10}C_8x^2+\cdots\cdots+{}_{10}C_2x^8+{}_{10}C_1x^9+{}_{10}C_0x^{10}$ のようにも

書けますが，問から見て ${}_{10}C_0x^0+{}_{10}C_1x+\cdots\cdots$ の方ですね．

[解] ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ より

$${}_2C_0+{}_3C_1+\cdots\cdots+{}_{10}C_8+{}_{11}C_9={}_2C_2+{}_3C_2+\cdots\cdots+{}_{10}C_2+{}_{11}C_2=\sum_{k=2}^{11}{}_kC_2=S$$

$\sum_{k=r}^{n}{}_kC_r={}_{n+1}C_{r+1}$ より

$S={}_{12}C_3$

$(1+x)^{10}={}_{10}C_0x^0+{}_{10}C_1x^1+{}_{10}C_2x^2+\cdots\cdots+{}_{10}C_9x^9+{}_{10}C_{10}x^{10}$ の両辺を $x$ で微分すると

$10(1+x)^9={}_{10}C_1+2\,{}_{10}C_2x+\cdots\cdots+9\,{}_{10}C_9x^8+10\,{}_{10}C_{10}x^9$　$x=1$ を代入すると．

$10\cdot 2^9={}_{10}C_1+2\,{}_{10}C_2+\cdots\cdots+9\,{}_{10}C_9+10\,{}_{10}C_{10}$

よって　与式 $=\frac{{}_{12}C_3}{10\cdot 2^9}=\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2}\cdot\frac{1}{10\cdot 2^9}=\frac{11}{2^8}=\frac{11}{256}$

| 答 | $\frac{11}{256}$ |
|---|---|

[補] $k\,{}_nC_k=n\,{}_{n-1}C_{k-1}$ を使っても分母は求まります．

22. 6個の数字0, 1, 2, 3, 4, 5, のうちの相異なる3つの数字を用いてできる3桁の整数についてつぎの個数を求めよ. (1)偶数 (2)3の倍数 (3)4の倍数 (4)5の倍数 (5)9の倍数 (6)6の倍数

[考] とにかく3桁の整数はいくつできるでしょうか? $\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}$ とすると$a$には, 1, 2, 3, 4, 5 の5通り. $b$には, 例えば$a$で2をとると1, 3, 4, 5 が残り, 0を含めて5通り. $c$には4通り ∴ $5\times5\times4=100$ 個の整数ができます.

(1) $\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}$ $c$が0, 2, 4 の3通りに場合わけをします.

(2) $100a+10b+c=3m_1$ より, $a+b+c=3(m_1-33a-3b)$ ですから $a+b+c$が3の倍数であればよいわけです. (0,1,2)(0,1,5)(0,2,4)(0,4,5)(1,2,3)------ と全ての場合をまず書き出すことです.

(3) $100a+10b+c=4m_2$ より $25a+\dfrac{10b+c}{4}=m_2$ ですから下2桁が4の倍数であればよい.

(4) 1位の数字が0または5

(5) $100a+10b+c=9m_2$ より $a+b+c=9(m_2-11a-b)$ ですから $a+b+c$ が9の倍数

(6) 2の倍数でありかつ3の倍数です.

[解] (1) (i) 1位が0の場合 百の位は5通り, 十の位は4通り ∴ $5\times4=20$

(ii) 1位が2の場合 百の位は0を除く4通り, 十の位は4通り ∴ $4\times4=16$

(iii) 1位が4の場合 (ii)と同じ ∴ $20+2\times16=$ <u>52(個)</u>

(2) 各位の数字の和が3の倍数であればよいから, その組合せは, (0,1,2)(0,1,5)(0,2,4)(0,4,5)(1,2,3)(1,3,5)(2,3,4)(3,4,5)

0を含む組合せについて $(2\times2)\times4=16$ 通り

0を含まない組合せについて $(3\times2)\times4=24$ 通り ∴ $16+24=$ <u>40(個)</u>

(3) 下2桁が4の倍数であればよいから, 下2桁は, 04, 12, 20, 24, 32, 40, 52 の7通り. 0を含む組合せ3通について $4\times3=12$, 0を含まない組合せについて $3\times4=12$ ∴ $12+12=$ <u>24(個)</u>

(4) 1位が0の場合 $5\times4=20$, 1位が5の場合 $4\times4=16$ ∴ $20+16=$ <u>36(個)</u>

(5) 各位の数字の和が9の倍数であればよいからその組合せは, (1,3,5)(2,3,4)(0,4,5) $3!\times2+4=16$(個)

(6) まず2の倍数であることが必要だから1位は0か2か4。かつ3の倍数だから

(i) 1位が0の場合, 各位の数字の和が3の倍数の組合せは (1,2)(1,5)(2,4)(4,5) ∴ $2\times4=8$ (ii) 1位が2のとき (0,1)(0,4)(1,3)(3,4) ∴ $1+1+2+2=6$

(iii) 1位が4のとき (0,2)(0,5)(2,3)(3,5) $1+1+2+2=6$

∴ $8+6+6=$ <u>20(個)</u>

[補] (6)はまず3の倍数から調べて(2)の組合せで2の倍数になるものを数えた方がはやくできますね.

176. 1から6までの整数の目がそれぞれ同pro.で出るサイコロがある。
(1) このサイコロを2回なげ、出た目の数を $a, b$ とする。このとき $a=b$ となるpro.を求めよ。
(2) このサイコロを3回なげ、出た目の数を出た順に $c, d, e$ とする。このとき $c<d<e$ となるpro.を求めよ。
(3) このサイコロを4回なげ、出た目の数を $w, x, y, z$ とする。このとき $wxyz=w+x+y+z$ となるpro.を求めよ。

[考] (1) 高校入試問題です。 (2) 1,2,3,4,5,6 の6コから3コとればOKです。
(3) $w \geq x \geq y \geq z \geq 1$ とすると、$w \geq w$, $w \geq x$, $w \geq y$, $w \geq z$, 辺々たすと $4w \geq w+x+y+z=4wxyz$

[解] (1) $\frac{6}{6^2}=\frac{1}{6}$

| 答 | (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{5}{54}$ (3) $\frac{1}{108}$ |
|---|---|

(2) 1,2,3,4,5,6 の6コから3コとりさえすれば、小さい順に $c, d, e$ とすればよいので
$$\frac{{}_6C_3}{6^3}=\frac{\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2}}{6^3}=\frac{5\cdot4}{6\cdot6\cdot6}=\frac{5}{6\cdot3\cdot3}=\frac{5}{54}$$

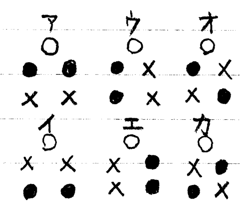
(3) $w \geq x \geq y \geq z \geq 1$ とする。$w \geq w$, $w \geq x$, $w \geq y$, $w \geq z$ なので辺々たすと $4w \geq x+y+z+w=wxyz$
$4 \geq xyz$ $(x,y,z)=(1,1,1)$ のとき $3+w=w$ (不適) $(2,1,1)$ のとき $4+w=2w$ $w=4$ (適)
$(3,1,1)$ のとき $5+w=3w$ (不適), $(4,1,1)$ のとき $6+w=4w$ $w=2$ (不適)
$(2,2,1)$ のとき $5+w=4w$ (不適)
よって $w \geq x \geq y \geq z \geq 1$, $wxyz=w+x+y+z$ をみたす $(w,x,y,z)=(4,2,1,1)$ のみ。
不等号の制約をなくせば、$wxyz=w+x+y+z$ をみたす $(w,x,y,z)$ の組は $(4,2,1,1)$ の順列であり $\frac{4!}{2!}=12$ 通り よって $\frac{12}{6^4}=\frac{2}{6\cdot6\cdot6}=\frac{1}{3\cdot36}=\frac{1}{108}$

円順列。

177. 白玉1個，赤玉4個，青玉6個で環状の首飾りを作る。
(1) 作り方は全部で何通りあるか
(2) どの2個の赤玉もとなり合わないことにすると、作り方は何通りあるか。

次頁からの[類]を先にやる方がよいかもしれません。P.153の(4)にまとめあります。

[考] 白1，赤2，青2，で考えてみます。円順列としては、白1を固定して考えて右のア〜カの6通り $\left(\frac{4!}{2!2!}=6\right)$ あります。これがnecklaceになるとウとエ，オとカは裏返しをすると同じになるので、necklaceにすると、ア，イ，ウ，オの4通りができることになります。つまり、左右対称のものはそのまま数えて、左右対称でないものは2でわって数えるということになります。$\left(\frac{6-2}{2}+2=4\right)$




[解] (1) 白1を固定すると円順列は $\frac{10!}{4!6!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2}=210$ 通り。左右対称なものは、赤2，青3を並べればよいから $\frac{5!}{2!3!}=10$ よって $\frac{210-10}{2}+10=110$

| 答 | (1) 110 (2) 19 |
|---|---|

(2) 白1を固定する。円順列は、青6を先に並べておいて、7個のあいているところから4個をとって赤4を入れればよいから ${}_7C_4=35$ 通り。左右対称なものは、右の①,②,③の3列の□□から2列をとって赤4を入れればよいから ${}_3C_2=3$ 通り
よって $\frac{35-3}{2}+3=19$