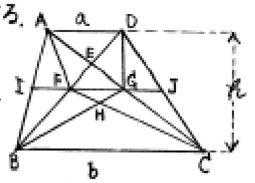
[考] 辺の比が、全く見えません。いっそのこと、AD $=a$, BC $=b$, 高さ h にして、与えられた面積120, 24, から、a, b を h で表してしまう。AB, DC の中点をそれぞれ I, J とすると、I, F, G, J は一直線上にある。

[解] 辺AB, DCの中点をそれぞれI, J とする。AD $=a$, BC $=b$, 高さ h の台形ABCDとする。



△ABD, △ABC に中点連結定理を用いると AD∥IF, BC∥IG.
AD∥BC だから IF∥IG. よって I, F, G は一直線上にある。同様に △ACD, △DBC に中点連結定理を用いて、J, G, F は一直線上にある。
よって、I, F, G, J は一直線上にある。更に $IF = JG = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2}$
$IG = JF = \frac{1}{2}BC = \frac{b}{2}$, $FG = IG - IF = \frac{b}{2} - \frac{a}{2}$
$\triangle AFC = 24 = FG \times h \times \frac{1}{2} = \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right)h \times \frac{1}{2}$, $(b-a)h = 96$, $bh - ah = 96$ …①
台形ABCD $= 120 = \frac{a+b}{2} \times h$ 　$ah + bh = 240$ …② 　①+②より $2bh = 336$ 　$bh = 168$ …③
②−①より $2ah = 144$ 　$ah = 72$ …④

答	(1) 60 (2) 7:3 (3) 2:7 (4) $\frac{112}{15}$

(1) 四角形AFCD $= \triangle AFC + \triangle ACD = 24 + ah \times \frac{1}{2} = 24 + 72 \times \frac{1}{2} = 24 + 36 = 60$ (∵④より)
(2) △BCE∽△DAE より BE:ED = BC:AD $= b : a = bh : ah = 168 : 72 = 42 : 18 = 7 : 3$ (∵③④)
(3) FG:BC $= \frac{b}{2} - \frac{a}{2} : b = \frac{bh}{2} - \frac{ah}{2} : bh = \frac{168}{2} - \frac{72}{2} : 168 = 84 - 36 : 168 = 48 : 168 = 12 : 42 = 2 : 7$
(4) △DAE∽△FGE より AD:FG $= a : \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = ah : \frac{bh}{2} - \frac{ah}{2} = 72 : 48 = 18 : 12 = 3 : 2$ 　高さの比も 3:2
したがって FG を底辺とみる。△EFG の高さは $\frac{1}{2}h \times \frac{2}{5} = \frac{h}{5}$
△CBH∽△FGH 　(3)より、FG を底辺とみる△HFG の高さは $\frac{1}{2}h \times \frac{2}{9} = \frac{h}{9}$
∴四角形EFHG $= \triangle EFG + \triangle FGH = FG \times \frac{h}{5} \times \frac{1}{2} + FG \times \frac{h}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{FG \times h}{2} \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{9}\right) = \frac{\left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right)h}{2} \times \frac{14}{45}$
$= \frac{bh - ah}{2} \times \frac{7}{45} = \frac{96}{2} \times \frac{7}{45} = \frac{48 \times 7}{45} = \frac{16 \times 7}{15} = \frac{112}{15}$

[別解] (1) 四角形AFCD $= \triangle AFD + \triangle CFD = \frac{1}{2} \times \triangle ABD + \frac{1}{2} \times \triangle BCD = \frac{1}{2} \times (\triangle ABD + \triangle BCD) = \frac{1}{2} \times$ 台形ABCD $= \frac{1}{2} \times 120 = \underline{60}$
(2) BE:ED = 点BからACまでの距離 h_1 : 点DからACまでの距離 $h_2 = h_1 \times \frac{AC}{2} : h_2 \times \frac{AC}{2} = \triangle ABC : \triangle ACD$
$\triangle ACD =$ 四角形AFCD $- \triangle AFC = 60 - 24 = 36$, $\triangle ABC =$ 台形ABCD $- \triangle ACD = 120 - 36 = 84$
∴BE:ED $= 84 : 36 = 21 : 9 = \underline{7 : 3}$
(3) BD, AC の中点がそれぞれ F, G であり、AD∥BC だから、点F, 点G から辺BCまでの距離は等しい ∴FG∥BC
∴FG:BC = FE:BE を求める。(2)より BE:ED = 7:3, BF:FD = 1:1 = 5:5

よって FE:BE $= 2 : 5+2 = \underline{2 : 7}$
(4) P.7の(19)下

[考] 台形の高さ h，$\triangle PCQ$ の高さ h'，$\triangle QDA$ の高さ $h-h'$，とおきます．座標軸をとってもできます．(2)は，$\triangle APQ = k \times$ 台形ABCD，

[解] (1) $BP = x\ (0<x<4)$，台形の高さ h，$\triangle PCQ$ の高さ h'，$\triangle QDA$ の高さ $h-h'$ とする．$\triangle ABP = \triangle PCQ = \triangle QDA$ より

$x \times h \times \frac{1}{2} = (4-x)\times h' \times \frac{1}{2} = 3\times(h-h')\times\frac{1}{2}$，前の等号より $h = \frac{4-x}{x}\times h'$，これを後の等号に代入

$(4-x)\times h' = 3\times\left(\frac{4-x}{x}\times h' - h'\right) = 3\times\left(\frac{4-x}{x}-1\right)\times h'$，$4-x = 3\times\left(\frac{4-x}{x}-1\right) = \frac{3(4-x)}{x} - 3$，両辺に x をかけて

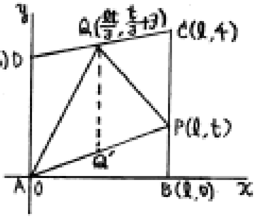
$x(4-x) = 3(4-x) - 3x = 12-6x$，$4x - x^2 = 12-6x$，$x^2 - 10x + 12 = 0$，$x = 5\pm\sqrt{13}$ であるが $0<x<4$ だから

$x = \underline{5-\sqrt{13}}\ (>0)$

答	(1) $5-\sqrt{13}$ (2) $\frac{3\sqrt{13}-8}{7}$ 倍

(2) 台形ABCD $= \frac{3+4}{2}\times h = \frac{7}{2}h$，$\triangle APQ =$ 台形ABCD $- 3\times\triangle ABP = \frac{7}{2}h - 3\times\frac{x}{2}h =$ 台形ABCD $\times k = \frac{7}{2}\times h\times k$

$(7-3x)\times\frac{h}{2} = \frac{7h}{2}\times k$　$\therefore k = \frac{7-3x}{7} = \frac{7-3(5-\sqrt{13})}{7} = \underline{\frac{3\sqrt{13}-8}{7}}$



[別解] BCを底辺として，$\angle DAB = 90^\circ$ としても等積変形だから，面積にかわりはない．

図のように座標をとる．Qの座標は，$\triangle ABP = \triangle QDA$ より $\ell\times t\times\frac{1}{2} = 3\times$ Qの x 座標 $\times\frac{1}{2}$

よってQの x 座標 (>0) は $\frac{\ell t}{3}$ だから，Qが直線CD：$y = \frac{1}{\ell}x + 3$ 上にあることを考えて

Qの y 座標は，$y = \frac{1}{\ell}\times\frac{\ell t}{3} + 3 = \frac{t}{3}+3$　$\therefore Q\left(\frac{\ell t}{3}, \frac{t}{3}+3\right)$（求める $BP = t$）

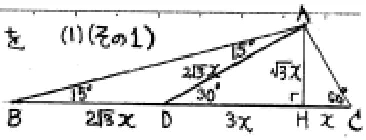
条件 $\triangle ABP = \triangle QDA$ は，用いたから，$\triangle ABP = \triangle PCQ$ より $\ell\times t\times\frac{1}{2} = (4-t)\times\left(\ell - \frac{\ell t}{3}\right)\times\frac{1}{2}$

$\ell t = \ell(4-t)\left(1-\frac{t}{3}\right)$，$t = (4-t)\times\frac{3-t}{3}$，$3t = (4-t)(3-t) = 12-4t-3t+t^2$，$t^2-10t-12=0$，$t = 5\pm\sqrt{13}$ であるが

$0<t<4$ より $t = \underline{5-\sqrt{13}} = t_0$ とする．$\triangle APQ =$ 台形ABCD $- 3\times\triangle ABP = \frac{3+4}{2}\times\ell - 3\times\frac{\ell t_0}{2} =$ 台形ABCD $\times k = \frac{7\ell}{2}\times k$

$7\ell - 3\ell t_0 = 7\ell k$，$k = \frac{7-3t_0}{7} = \frac{7-3(5-\sqrt{13})}{7} = \underline{\frac{3\sqrt{13}-8}{7}}$

[解] (1)(その1) AからBCに垂線AHをおろす. BC上に$\angle BAD=15^\circ$となる点Dをとる. $CH=x$とする. $AH=\sqrt{3}x$, $DH=3x$, $AD=BD=2\sqrt{3}x$ だから



$x+3x+2\sqrt{3}x=5$, $2(2+\sqrt{3})x=5$, $x=\frac{5}{2(2+\sqrt{3})}$

$AB^2=AH^2+BH^2=(\sqrt{3}x)^2+((2\sqrt{3}+3)x)^2=3x^2+(12+12\sqrt{3}+9)x^2=(24+12\sqrt{3})x^2=12(2+\sqrt{3})x^2$

$=12(2+\sqrt{3})\times\left(\frac{5}{2(2+\sqrt{3})}\right)^2=\frac{3\times5^2}{2+\sqrt{3}}$, $\underline{AB}=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}}=\frac{5\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}=\underline{\frac{15\sqrt{2}-5\sqrt{6}}{2}}$

$\underline{AC}=2x=\frac{5}{2+\sqrt{3}}=5(2-\sqrt{3})=\underline{10-5\sqrt{3}}$

$\underline{\triangle ABC}=5\times\sqrt{3}x\times\frac{1}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}\times\frac{5}{2(2+\sqrt{3})}=\frac{25\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{4}=\underline{\frac{50\sqrt{3}-75}{4}}$

(1)	ア. $\frac{15\sqrt{2}-5\sqrt{6}}{2}$ イ. $10-5\sqrt{3}$ ウ. $\frac{50\sqrt{3}-75}{4}$

(補) 二重根号をはずすのは,高校生ですが,大学入試にしても,三角などは,用いずに,上と同様の解をします.尤も,計算により,$\sin 15^\circ$などを求めよというのはありますが,-----

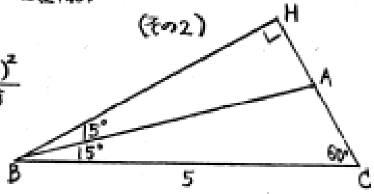
(その2) CAを延長し,Bから垂線BHをおろす. $\angle CBH=30^\circ$となり, $\angle ABC=\angle HBA=15^\circ$

$BC=5$, $BH=5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$, $CH=\frac{5}{2}$, $AH=\frac{5}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})}$ (角の二等分線の定理より)

$AB^2=BH^2+AH^2=\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})}\right)^2=\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(1+\frac{1}{(2+\sqrt{3})^2}\right)$

$=\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\frac{(2+\sqrt{3})^2+1}{(2+\sqrt{3})^2}=\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\frac{8+4\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})^2}=\frac{(5\sqrt{3})^2(2+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})^2}=\frac{(5\sqrt{3})^2}{2+\sqrt{3}}$

(その2)



$\underline{AB}=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}}=\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1}=\frac{5\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{2}=\underline{\frac{15\sqrt{2}-5\sqrt{6}}{2}}$

$\underline{AC}=CH\times\frac{2}{2+\sqrt{3}}=\frac{5}{2}\times\frac{2}{2+\sqrt{3}}=5(2-\sqrt{3})=\underline{10-5\sqrt{3}}$

$BC:BH:CH=2:\sqrt{3}:1$

$\underline{\triangle ABC}=\triangle HBC\times\frac{2}{2+\sqrt{3}}=\frac{5}{2}\times\frac{5\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{2+\sqrt{3}}=\frac{25\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}=\frac{25\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{4}=\underline{\frac{50\sqrt{3}-75}{4}}$

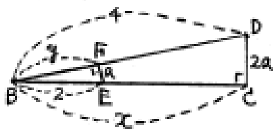
(2) $\triangle BEF \backsim \triangle BDC$ $BC=x$, $BF=y$, $EF=a$ とおく. 辺の比より $\frac{EF}{BE}=\frac{DC}{BD}$, $\frac{a}{2}=\frac{DC}{4}$, $DC=2a$

$\frac{BF}{BF}=\frac{BC}{BD}$, $\frac{y}{2}=\frac{x}{4}$, $x=2y$ ---① $\triangle BEF$ と $\triangle ABF$ に三平方の定理を用いて

$a^2+y^2=4$ ---② $(4-a)^2+y^2=16$ ---③

③より $16-8a+a^2+y^2=16$ ②から $-8a+4=0$, $a=\frac{1}{2}$

$y^2=4-a^2=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$, $y=\frac{\sqrt{15}}{2}$ ①に入れて $x=\sqrt{15}$



$S=BD\times AF\times\frac{1}{2}+BC\times DC\times\frac{1}{2}=4(4-a)\times\frac{1}{2}+x\times2a\times\frac{1}{2}=2(4-a)+ax=2(4-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\times\sqrt{15}$

$=7+\frac{\sqrt{15}}{2}$

(補) AからBEに垂線AHをおろすと, $\triangle AHE \backsim \triangle BFE \backsim \triangle BCD$ となり $AE=BD$ から $\triangle AHE\equiv\triangle BCD$,

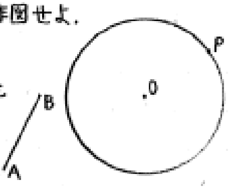
$\therefore AH=BC$, $\triangle AHE$ に三平方の定理を用いると, $AH(=BC)$が求まります.

(2)	(ア) $\sqrt{15}$ (イ) $\frac{\sqrt{15}}{2}$ (ウ) $7+\frac{\sqrt{15}}{2}$

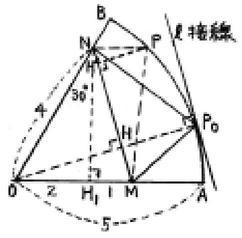
(考) 例1 中心角90°，OM＝ON＝4 ならば、どうなるか
((カイ)は下)

例2 中心角90°，OM＝3，ON＝4 ならばどうなるか(中学入試)
((カイ)は下)

例3 右図、点Pが円周上を動くとき、$\triangle ABP$の面積が最大となる点P_1，最小となる点P_2を作図せよ．



(カイ) ABの延長線上に、円の中心0から垂線0Hをおろす．直線0Hと円との交点をABに遠い方からP_1，P_2とする．(理由) P_1における接線をℓ_1とする．$\ell_1 /\!/ AB$，
P_1以外の点Pをとると、$\triangle ABP_1$の高さ$P_1H > \triangle ABP$の高さPH'，P_2についても同様



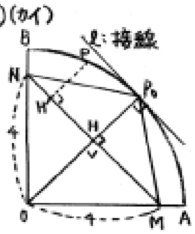
(解) (1) NからOMに垂線NH_1をおろす．$\triangle ONH_1$は、30°，60°，90°の定三角定規．
$ON : OH_1 : NH_1 = 2 : 1 : \sqrt{3}$，$ON = 4$だから、$NH_1 = 2\sqrt{3}$ ($OH_1 = 2$)
よって、$\underline{\triangle OMN} = OM \times NH_1 \times \frac{1}{2} = 3 \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \underline{3\sqrt{3}}$

(2) $MH_1 = OM - OH_1 = 3 - 2 = 1$，$NH_1 = 2\sqrt{3}$ だから三平方の定理より、
$MN^2 = MH_1^2 + NH_1^2 = 1^2 + (2\sqrt{3})^2 = 13$，$\therefore \underline{MN = \sqrt{13}}$

(3) $\triangle OMN = MN \times OH \times \frac{1}{2}$，$3\sqrt{3} = \sqrt{13} \times OH \times \frac{1}{2}$　$\therefore \underline{OH} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \underline{\frac{6\sqrt{39}}{13}}$

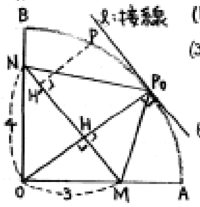
(4) S＝扇形OABの面積－四角形OMPNの面積＝$\pi \times 5^2 \times \frac{60°}{360°}$－四角形OMPNの面積＝$\frac{25\pi}{6}$－四角形OMPNの面積
よってS_0は、四角形OMPNの面積の最大値を求めればよい．
直線OHと弧$\overset{\frown}{AB}$の交点をP_0，P_0における接線をℓとする．$\triangle OMN = 3\sqrt{3}$ (一定)だから、$\triangle MNP_0$が最大であることを示す．弧$\overset{\frown}{AB}$上にP_0と異なる点Pをとる．$\triangle MNP_0$の高さ$P_0H > \triangle MNP$の高さPH' ($MN /\!/ \ell$)
よって、点P_0のときの$\triangle MNP_0$が$\triangle MNP$の最大である．改めて、四角形OMP_0Nを見ると、$MN \perp OP_0$であるから、
四角形$OMP_0N = OP_0 \times MN \times \frac{1}{2} = 5 \times \sqrt{13} \times \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{13}}{2}$
よって、求める最小値$\underline{S_0 = \frac{25\pi}{6} - \frac{5\sqrt{13}}{2}}$

例1 (カイ)



(1) $\underline{8}$　(2) $\underline{4\sqrt{2}}$　(3) $\underline{2\sqrt{2}}$
(4) 直線0Hと弧$\overset{\frown}{AB}$の交点P_0，接線ℓ ($/\!/ MN$)
P_0以外の点Pのとき$P_0H > PH'$
$\triangle MNP < \triangle MNP_0$，四角形$OMP_0N$が最大
四角形$OMP_0N = MN \times OP_0 \times \frac{1}{2} = 4\sqrt{2} \times 5 \times \frac{1}{2}$
$= 10\sqrt{2}$　$\therefore S_0 = \underline{\frac{25\pi}{4} - 10\sqrt{2}}$

例2 (カイ)



(1) $\underline{6}$　(2) $\underline{5}$
(3) $\triangle OMN = 6 = \frac{1}{2} \times MN \times OH$
$OH = \frac{12}{MN} = \underline{\frac{12}{5}}$
(4) 例1と同じようなことで
四角形$OMP_0N = 5 \times 5 \times \frac{1}{2}$
$= \frac{25}{2}$，$\underline{S_0 = \frac{25\pi}{4} - \frac{25}{2}}$

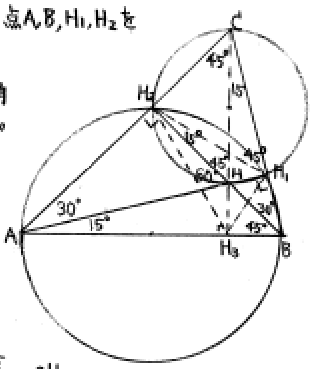
(解) (1) $\angle AH_1B = \angle AH_2B = 90^\circ$, $\angle CH_1H = \angle CH_2H = 90^\circ$ だから、ABを直径とする点A, B, H_1, H_2を通る円がかける. CHを直径とする点C, H_1, H, H_2を通る円がかける.

弧$\overset{\frown}{BH_1}$の上に立つ円周角 $\angle BAH_1 = \angle BH_2H_1$, 弧$\overset{\frown}{HH_1}$上にたつ円周角 $\angle HH_2H_1 (= \angle BH_2H_1) = \angle HCH_1$. したがって $\angle BAH_1 = \angle HCH_1 = H_3CB = 15^\circ$

直角三角形ABH_1より $\angle ABH_1 = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ = \angle H_3BC$

$\triangle H_3BC$より, $\angle CH_3B = 180^\circ - \angle H_3CB - \angle H_3BC = 180^\circ - 15^\circ - 75^\circ = 90^\circ$

$\therefore CH_3 \perp AB$



(2) 円周角が等しいなどを利用すると、図のような角度となる.

AB=5 だから, $\underline{BH_2} = 5 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \underline{\left(= \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)} = AH_2$, $HH_2 = \frac{5\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{6}}{6} = CH_2$

$\underline{CA} = CH_2 + AH_2 = \frac{5\sqrt{6}}{6} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = \underline{\frac{5\sqrt{6}+15\sqrt{2}}{6}}$, $AH = HH_2 \times 2 = \frac{5\sqrt{6}}{3}$, $\underline{AH_1} = CA \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{6}+15\sqrt{2}}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\frac{5\sqrt{2}+5\sqrt{6}}{4}}$

$\triangle ABC = CA \times BH_2 \times \frac{1}{2} = AB \times CH_3 \times \frac{1}{2}$, $\frac{5\sqrt{6}+15\sqrt{2}}{6} \times \frac{5}{\sqrt{2}} = 5 \times CH_3$, $\underline{CH_3} = \underline{\frac{5\sqrt{3}+15}{6}} = AH_3$

$\triangle ABC = AB \times CH_3 \times \frac{1}{2} = BC \times AH_1 \times \frac{1}{2}$, $5 \times \frac{5\sqrt{3}+15}{\cancel{6}\ 3} = BC \times \frac{5\sqrt{2}+5\sqrt{6}}{\cancel{4}\ 2}$, $\underline{BC} = \frac{2(5\sqrt{3}+15)}{3(\sqrt{2}+\sqrt{6})} = \frac{2\times5\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{3\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} = \underline{\frac{5\sqrt{6}}{3}}$

(3) $\triangle H_1H_2H \backsim \triangle BAH$ なので相似比は $H_2H : AH = H_1H_2 : BA$ である. 直角三角形AHH_2の辺の比 $H_2H : AH = 1:2$, より $H_1H_2 : BA = 1:2$ $\therefore H_1H_2 = \frac{1}{2} \times AB = \underline{\frac{5}{2}}$

(4) BC を直径とする円を加えて、円周角を移動すると, $\angle BH_2H_3 = \angle BCH_3 = 15^\circ$, $\angle BH_2H_1 = 15^\circ$ だから $\angle H_1H_2H_3 = 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$, CHを直径とする円で, $\angle H_2H_1H = \angle H_2CH = 45^\circ$, BHを直径とする円で, $\angle H_3H_1H = \angle H_3BH = 45^\circ$ $\therefore \angle H_2H_1H_3 = \angle H_2H_1H + \angle H_3H_1H = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$, したがって $\triangle H_1H_2H_3$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の定三角定規. 辺の比より $H_1H_3 = H_1H_2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}}$

$\therefore \underline{\triangle H_1H_2H_3} = \frac{5}{2} \times \frac{5}{2\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \underline{\frac{25\sqrt{3}}{24}}$

(補) AB, BC, CA, AH, BH, CH を直径とする6つの円がかけます. 方べきの定理, トレミーの定理なども利用すると, 他にも解を得る方法は, いろいろと考えられます. BCなどは, $\triangle ABH_2$から $BH_2 = AB \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$, $\triangle BCH_2$から $BC = BH_2 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$ として, すぐに求まりますが, 直角絡みには, 面積を介する方法もあることをお忘れなく. (解)は, この方法でかきました. troublesome ですが.----

答	
	(1) 解の通り
	(2) $BC = \frac{5\sqrt{6}}{3}$, $CA = \frac{5\sqrt{6}+15\sqrt{2}}{6}$
	$AH_1 = \frac{5\sqrt{2}+5\sqrt{6}}{4}$, $BH_2 = \frac{5\sqrt{2}}{2}$
	$CH_3 = \frac{5\sqrt{3}+15}{6}$ (3) 解の通り
	(4) $S = \frac{25\sqrt{3}}{24}$

[解] (1) $\triangle BCF$を見て、$\angle BFE = \angle BCF + \angle CBF = \angle BCE + \angle CBD = 90^\circ + \angle CAD$, $a^\circ = 90^\circ + x^\circ$, $\underline{x = a - 90}$

(2) $\triangle ACE$に着目　$\angle CAE = \angle CO_1D \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x^\circ$, $\angle CEA = \angle CO_2D \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times y^\circ$

$\therefore \angle ACE = 180^\circ - \angle CAE - \angle CEA = 180^\circ - \frac{1}{2}x^\circ - \frac{1}{2}y^\circ$

$\angle ACB = \frac{1}{2} \times \angle AO_1B = \frac{1}{2}p^\circ$, $\angle ECG = \frac{1}{2} \times \angle EO_2F = \frac{1}{2}q^\circ$

$\angle ACE + \angle ACB + \angle ECG = 180^\circ$, $(180^\circ - \frac{1}{2}x^\circ - \frac{1}{2}y^\circ) + \frac{1}{2}p^\circ + \frac{1}{2}q^\circ = 180^\circ$　$\therefore x^\circ + y^\circ = p^\circ + q^\circ$

(3) $\triangle ACD$と$\triangle BCE$において　$AC = BC$（$\because$正三角形ABC）, $AD = BE$（$\because$条件より）, $\angle CAD = \angle CBE$（$\because$弧$\overset{\frown}{CD}$の上にたつ円周角）二辺とその間の角がそれぞれ等しいので$\triangle ACD \equiv \triangle BCE$　$\therefore \angle ACD = \angle BCE = x^\circ$

$\angle ACD$の中心角$\angle AOD$（$= 2x^\circ$, Oは円の中心）は、$\overset{\frown}{AD} : \overset{\frown}{DC} = 2 : 3$, $\angle AOC = 120^\circ$より$2x^\circ = 120^\circ \times \frac{2}{5}$　$\therefore \underline{x^\circ = 24^\circ}$

(4) ATとDQの交点をU, ATとCPの交点をVとする。$\triangle STU$の内角和180°に持ち込む。

$a^\circ + d^\circ = \angle TUS$, $x^\circ + b^\circ = \angle TSV$, $x^\circ + c^\circ = \angle USV$, $\angle STU = x^\circ$,（$\overset{\frown}{SR}$の上に立つ円周角として、$\angle SPR = \angle STR = \angle SQR = x^\circ$）　$\therefore (a^\circ + d^\circ) + (x^\circ + b^\circ) + (x^\circ + c^\circ) + x^\circ = 180^\circ$　$\underline{\therefore x^\circ = 60^\circ - \frac{a^\circ + b^\circ + c^\circ + d^\circ}{3}}$

(5) 大円の中心（ACの中点）をOとする。$\angle QOC = 2 \times \angle QAC = 2a^\circ$. $\angle AOQ = 180^\circ - \angle QOC = 180^\circ - 2a^\circ$

よって$\underline{\overset{\frown}{AQ} : \overset{\frown}{QC}} = 180^\circ - 2a^\circ : 2a^\circ = 180 - 2a : 2a = \underline{90 - a : a}$

$\angle PCB = y^\circ$, $\angle PBC = x^\circ$とおけば、AQは接線なので接弦定理より、$\angle APB = \angle PCB = y^\circ$

$\triangle APB$を見て　$a^\circ + y^\circ = x^\circ$ ---①, $\angle BPC = 90^\circ$なので$x^\circ + y^\circ = 90^\circ$ ---②　①より$y^\circ = x^\circ - a^\circ$を②に代入

$2x^\circ - a^\circ = 90^\circ$　$\underline{\therefore x = 45 + \frac{a}{2}}$

(6) $\angle DAO(\angle DAC) = \angle DBC = \angle ABC - a^\circ = 90^\circ - a^\circ$（$\because AC$は直径）, $\angle ADO = \angle DAO = 90^\circ - a^\circ$

$\angle ADB = \angle ACB = x^\circ$なので$(90^\circ - a^\circ) + b^\circ = x^\circ$　$\underline{\therefore x = 90 - a + b}$

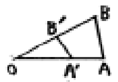
(7) $BD = BE = a$とおく。$AD = AF = 4 - a$, $CE = CF = 5 - a$, $AC = 3 = AF + CF = (4-a) + (5-a) = 9 - 2a$, $2a = 6$,

$a = 3$　したがって　$\triangle BED : \triangle ABC = BD \times BE : BA \times BC \overset{※}{=} 3 \times 3 : 4 \times 5 = \underline{9 : 20}$ ---①

同様に$\triangle ADF : \triangle ABC = 1 \times 1 : 4 \times 3 = 1 : 12$ ---②, $\triangle CEF : \triangle ABC = 2 \times 2 : 3 \times 5 = 4 : 15$ ---③

①,②,③より　$\triangle BED + \triangle ADF + \triangle CEF = \frac{9}{20} \times \triangle ABC + \frac{1}{12} \times \triangle ABC + \frac{4}{15} \times \triangle ABC = \frac{9}{20} \times 6 + \frac{1}{12} \times 6 + \frac{4}{15} \times 6$

$= \frac{27}{10} + \frac{1}{2} + \frac{8}{5} = \frac{32}{10} + \frac{8}{5} = \frac{16}{5} + \frac{8}{5} = \frac{24}{5}$, $\therefore \triangle DEF = \triangle ABC - \frac{24}{5} = 6 - \frac{24}{5} = \frac{6}{5} = \frac{1}{5} \times 6 = \underline{\frac{1}{5}} \times \triangle ABC$

(補)※ 

$\triangle OAB : \triangle OA'B' = OA \times OB : OA' \times OB'$（P.32の(1),(2)に詳細があります。重要です。）

$\triangle ABC = 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 6$なので、①,②,③から、$\triangle BED$などをdirectに求める方がeasyです。