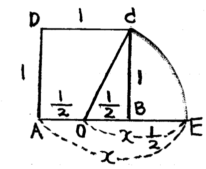
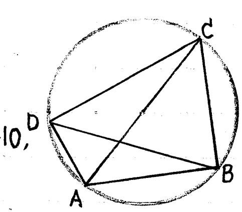
[類3] 正方形ABCDのABの中点をOとし、半径OCで円を描き、半直線ABとの交点をEとする。
このとき AB：AE＝1：□ となる。(黄金分割比 golden cut という)

[解] 結論から一辺の長さ1の正方形ABCDとする。AE＝x とおけば、$OE=OC=x-\frac{1}{2}$
直角三角形OBCに、三平方の定理を用いて、$(x-\frac{1}{2})^2=1^2+(\frac{1}{2})^2$,
$x^2-x+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{4}$, $x^2-x-1=0$, $x>0$ ∴AE＝□＝$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$



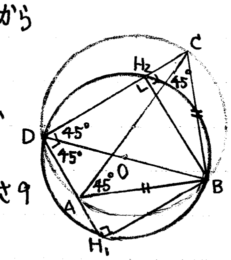
[補] 黄金分割比の $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi$ (ファイ) は、黄金数といわれ、レオナルド・ダ・ヴィンチのモナ・リザの顔や、歴史的建造物にも多く用いられています。人間が最も美しいと感じる比率が、$1：\frac{1+\sqrt{5}}{2}≒1：1.618$ らしいです。日本では、文化の違いからか、白銀比(大和比) $1：\sqrt{2}≒1：1.414≒5：7$ が使われ、法隆寺金堂、五重塔、平安京の町並み、生け花などに使われてきました。ミロのヴィーナスは、頭頂からへそ迄の長さ：へそから足底迄の長さ＝1：1.618 です。

[類4] 右図のように、ACを直径とする円周上に、AB＝BC, BD＝9 となる点B, Dをとり、左回りの四角形ABCDを作る。このような、左回りの四角形ABCDができるためには、
AB(＝BC)の長さ＜BDの長さ(＝9)≦直径ACの長さ---㋐ であることが必要となる。
この四角形ABCDの面積Sは、BD＝9 が ㋐の条件をみたしさえすれば、例えばAC＝10、AC＝12 のときでも一定値 S＝□ となる。□をうめて、これを示せ。

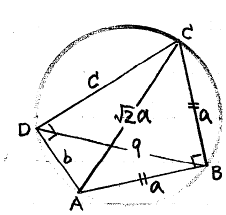


[考1] かいてあることからAC＝9 としてもSは求まる。「㋐をみたすようなACのとき、いつでも、この求めた一定値となるか」ということです。AC＝9の時の図形と結びつけることを考えます。

[解1] AC＝9 は㋐をみたす。このとき四角形ABCDは正方形となり、対角線の長さが9であるから
$S=9^2\times\frac{1}{2}=\frac{81}{2}$, AC≠9 かつ ㋐をみたすACのとき、右図のような四角形ABCDとなる。
BDの中点Oを中心にして、半径OB(＝OD＝$\frac{9}{2}$)の円を描き、直線AD, DCとの交点をそれぞれ、H_1, H_2とする。ACを直径とする円と、直角二等辺三角形ABCから、円周角∠BDC＝∠BAC＝45°
∠ADB＝∠ACB＝45°、したがってOを中心とする円に内接する四角形DH_1BH_2は対角線の長さ9の正方形、直角三角形AH_1Bと直角三角形CH_2Bは、斜辺AB＝CB, $BH_1=BH_2$だから合同。
∴四角形ABCD＝四角形ABH_2D＋直角三角形CH_2B＝四角形ABH_2D＋直角三角形AH_1B＝正方形$DH_1BH_2=9^2\times\frac{1}{2}=\frac{81}{2}$

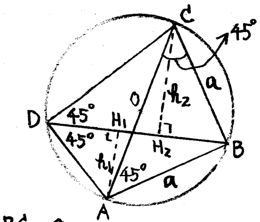


[解2] AB＝BC＝a, AD＝b, CD＝c とおく。ACは、直径だから、∠ABC＝90°, ∠ADC＝90°, AC＝$\sqrt{2}a$ (定三角定規の辺の比)
求める面積 $S=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}(a^2+bc)$ 目標は a^2+bc の値を求めること。
三平方の定理より $b^2+c^2=(\sqrt{2}a)^2=2a^2$---①
トレミーの定理より、$ab+ac=9\sqrt{2}a$, aでわって $b+c=9\sqrt{2}$---②
(目標の a^2+bc には、bcの項があるので) ①より $(b+c)^2-2bc=2a^2$, ②を入れて
$(9\sqrt{2})^2-2bc=2a^2$, $2a^2+2bc=81\times2$, $a^2+bc=81$ ∴$S=\frac{1}{2}\times81=\frac{81}{2}$



(補) ②を2乗して $b^2+2bc+c^2=81\times2$ ①を入れて $2a^2+2bc=81\times2$, $a^2+bc=81$

[考3] 点A,点CからBDへそれぞれ垂線$AH_1(=h_1)$, $CH_2(=h_2)$をおろし、$AB=BC=a$とおいて、三平方の定理を用います. $S=9\times h_1\times\frac{1}{2}+9\times h_2\times\frac{1}{2}=\frac{9}{2}(h_1+h_2)$だから、目標は、$h_1+h_2$を求めることです.



[解3] 右上図のように、点A,点BからBDにそれぞれ垂線$AH_1(=h_1)$, $CH_2(=h_2)$をおろし、$AB=BC=a$とおく. 直角二等辺三角形ABCと円周角の定理より、$\angle ADB=\angle ACB=45^\circ$, $\angle BDC=\angle BAC=45^\circ$, したがって直角二等辺三角形$AH_1D$, 直角二等辺三角形$CH_2D$となる. $DH_1=AH_1=h_1$, $BH_1=BD-DH_1=9-h_1$, 直角三角形AH_1Bに、三平方の定理を用いて,$(AB^2=AH_1^2+BH_1^2)$ $a^2=h_1^2+(9-h_1)^2=2h_1^2-18h_1+81$ ---①

同様に、直角三角形CH_2Bについて. $a^2=h_2^2+(9-h_2)^2=2h_2^2-18h_2+81$ --- ②

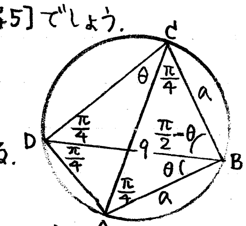
$S=\frac{BD\times h_1}{2}+\frac{BD\times h_2}{2}=\frac{9}{2}(h_1+h_2)$ ①−②より $0=2(h_1^2-h_2^2)-18(h_1-h_2)=2(h_1+h_2)(h_1-h_2)-18(h_1-h_2)$

$0=2(h_1-h_2)(h_1+h_2-9)$ したがって (i) $h_1=h_2$ または (ii) $h_1+h_2=9$ である.

(i) $h_1=h_2$のとき 点H_1,点H_2は、ACの中点O(円の中心)に一致し、$AC\perp BD$となり, $S=$正方形$ABCD=9^2\times\frac{1}{2}=\frac{81}{2}$

(ii) $h_1+h_2=9$のとき $S=\frac{9}{2}(h_1+h_2)=\frac{9}{2}\times9=\frac{81}{2}$ (i),(ii)いずれにせよ $\underline{S=\frac{81}{2}}$

[考4] 高校生です. 正弦定理と面積公式、中高,にかかわらず解をするとすれば、次頁の[解5]でしょう.



[解4] $AB=BC=a$, $\angle ABD=\theta$とする. ACは直径なので$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$, $\angle CBD=\frac{\pi}{2}-\theta$

直角二等辺三角形ABCより$\angle BAC=\angle BCA=\frac{\pi}{4}$, 円周角の定理より、右図のような角となる.

$S=\frac{1}{2}\times9a\sin\theta+\frac{1}{2}\times9a\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{9}{2}a(\sin\theta+\cos\theta)$ --- ①

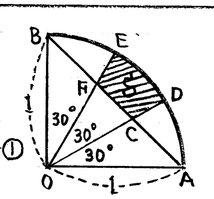
△BCDに正弦定理を用いると $BD=AC\sin\angle BCD$ (∵△BCDは直径$AC=\sqrt{2}a$の円に内接)

$9=\sqrt{2}a\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}a(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}a(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta)=a(\sin\theta+\cos\theta)$ --- ②

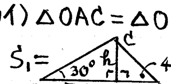
よって ①に②を入れて $\underline{S=\frac{9}{2}\times9=\frac{81}{2}}$ (∵加法定理 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$)

[補] [解1]は「点Bから直線DA,直線DCに、それぞれ垂線BH_1, BH_2,をおろす」から始めても似たようなことです.
[解3]が一番わかりやすいようです. [解5]以外の解は、全て、円周角の定理を用います. 大切な定理です.

問. 右図、半径1の$\frac{1}{4}$円のとき、斜線部の図形CDEFの面積Sを求めよ



(カイ) $\triangle OAC=\triangle OBF=S_1$, $\triangle OCF=S_2$とする. $2S_1+S_2=$直角二等辺三角形$OAB=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ---①

$S_1=$  CからOAに垂線CHをおろす. $CH=h$とする.

定三角定規の辺の比より, $OH=\sqrt{3}h$, $HA=h$, $OA=1$だから $\sqrt{3}h+h=1$, $h(\sqrt{3}+1)=1$ ∴$h=\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

よって $S_1=1\times h\times\frac{1}{2}=\frac{h}{2}$ ①より $S_2=\frac{1}{2}-2S_1=\frac{1}{2}-h=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

$S=$扇形$ODE-S_2=\pi\times1^2\times\frac{30^\circ}{360^\circ}-S_2=\underline{\frac{\pi}{12}-\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\left(=\frac{\pi+6\sqrt{3}-12}{12}\right)$

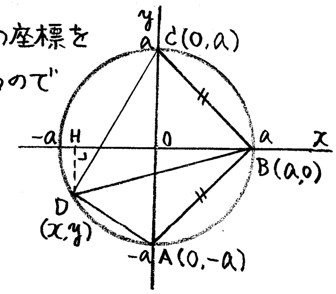
[解5] 条件から、ACの中点を原点Oとする(x,y)平面で考える。右図のように、各点の座標を定める。㋣の条件は、$-a\leqq x<0\ (a>0)$, 点Dは、半径$a(>0)$の円周上にあるので

$x^2+y^2=a^2$ ---①　BD=9 より $9^2=(x-a)^2+y^2=x^2-2ax+a^2+y^2$ ---②

①を②に入れて $81=a^2-2ax+a^2=2a^2-2ax=2a(a-x)$ ---③

$S=\triangle ABC+\triangle ACD=2a\times a\times\frac{1}{2}+2a\times(-x)\times\frac{1}{2}=a^2-ax=a(a-x)$

③より $\underline{S=\frac{81}{2}}$ （$\triangle ACD$の底辺$AC=2a$, 高さ$OH=-x$ ($\because x<0$)）



(補) $D(a\cos\theta, a\sin\theta)$, $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$ とおいて、解くこともできます。[解1],[解2],[解3]は平面幾何、[解4]は三角関数、[解5]は、図形と方程式による解でした。

[類5] 中心O_1, 半径6の円C_1と半直線lが右にかいてある。

(1) 半直線l上にO_1からの距離が12である点O_2を作図せよ

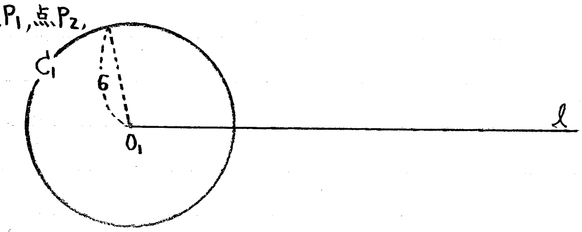
(2) 点O_2を中心にして、円C_2を描き、円C_1との交点を、点P_1,点P_2,（点P_1は点P_2より上にある。）としたところ、直線O_1P_1, 直線O_1P_2は、それぞれ、円C_2の点P_1,点P_2における接線になったという。このような円C_2を作図せよ。

(3) 円C_2の半径rを求めよ。

(4) O_1O_2とP_1P_2は垂直に交わることを証明せよ。

(5) P_1P_2の長さを求めよ。

(6) 円C_1と円C_2で囲まれるダルマ型の面積Sを求めよ。

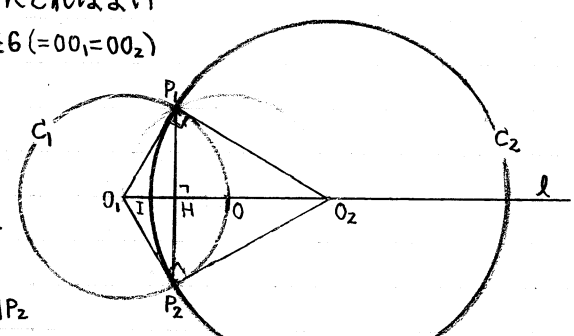


[解] (1) 円C_1の半径6の長さを、円C_1と半直線lの交点Oからl上にとればよい

(2) $\angle O_1P_1O_2=\angle O_1P_2O_2=90^\circ$だから、点Oを中心にして、半径6 $(=OO_1=OO_2)$の円を描き円C_1との交点をP_1, P_2とすればよい。

(3) $O_1O_2=12$, $O_1P_1=6$, $\angle O_1P_1O_2=90^\circ$より、$60^\circ, 30^\circ, 90^\circ$の定三角定規$O_1O_2P_1$ よって、$\underline{r}=O_2P_1=6\times\sqrt{3}=\underline{6\sqrt{3}}$

(4) O_1O_2とP_1P_2の交点をHとする。$\triangle O_1HP_1$と$\triangle O_1HP_2$において
$O_1P_1=O_1P_2$(=半径6), O_1H共通, $\angle P_1O_1H=\angle P_2O_1H=60^\circ$,
二辺とその間の角がそれぞれ等しい $\therefore\triangle O_1HP_1\equiv\triangle O_1HP_2$
$\therefore\angle O_1HP_1=\angle O_1HP_2=90^\circ$ すなわち O_1O_2とP_1P_2は垂直に交わる。



(5) 定三角定規$(60^\circ,90^\circ,30^\circ)$の$\triangle O_1HP_1$より $P_1H=O_1P_1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$ $\therefore\underline{P_1P_2}=2\times P_1H=2\times3\sqrt{3}=\underline{6\sqrt{3}}$

(6) 中心角$\angle P_1O_1P_2(=120^\circ)$の扇形 $=S_1$, $\triangle O_1P_1P_2=S_2$, 中心角$\angle P_1O_2P_2(=60^\circ)$の扇形 $O_2=S_3$, $\triangle O_2P_1P_2=S_4$とする。
求める面積Sは、円C_1+円C_2からダブルでたした図形 I $O=S_5$をひいて、S=円C_1+円$C_2-S_5=\pi\cdot6^2+\pi\cdot(6\sqrt{3})^2-S_5$
$=36\pi+108\pi-S_5=144\pi-S_5$, $S_5=(S_1-S_2)+(S_3-S_4)=S_1+S_3-(S_2+S_4)=36\pi\times\frac{1}{3}+108\pi\times\frac{1}{6}-$四角形$P_1O_1P_2O_2$
$=12\pi+18\pi-O_1O_2\times P_1P_2\times\frac{1}{2}=30\pi-12\times6\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=30\pi-36\sqrt{3}$
したがって求める面積 $\underline{S}=144\pi-S_5=144\pi-(30\pi-36\sqrt{3})=\underline{114\pi+36\sqrt{3}}$

実は、前問[類5]は、次の設問[類6]を作問しているときに、できた設問でした。

[類6] 中心O、半径rの円Cがある。円Cの外側にある$OP=d$となる点Pから、2本の接線PP_1, PP_2 (P_1, P_2は接点)をひく。(1) OPとP_1P_2は垂直に交わることを証明せよ　(2) P_1P_2の長さをrとdで表せ。

(解)(1)(その1) 右図、直角三角形POP_1と直角三角形POP_2において、斜辺PO共通、$OP_1=OP_2(=r)$ (斜辺と他の一辺が等しい)

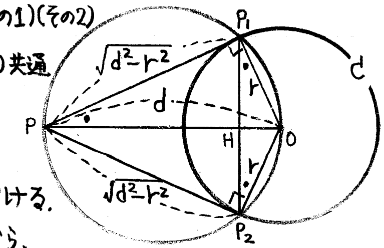
∴直角三角形POP_1≡直角三角形POP_2 ---①

$\triangle OP_1H$と$\triangle OP_2H$において ①により $\angle HOP_1=\angle HOP_2$, $OP_1=OP_2(=r)$, HO共通

二辺とその間の角がそれぞれ等しい。∴$\triangle OP_1H\equiv\triangle OP_2H$

∴$\angle P_1HO=\angle P_2HO=90^\circ$　∴OPとP_1P_2は垂直に交わる。

(その1)(その2)



POとP_1P_2の交点H

(その2) $\angle PP_1O=\angle PP_2O=90^\circ$だから、POを直径とし、点$P_1$、点$P_2$を通る円がかける。

(四角形P_1PP_2Oは、この円に内接する。) 同一円で、弦OP_1=弦OP_2だから、

弧$\overset{\frown}{OP_1}$=弧$\overset{\frown}{OP_2}$であり、円周角の定理より、$\angle OP_2P_1=\angle OPP_1$, $\triangle OP_1P_2$は、二等辺三角形

だから、$\angle OP_2P_1=\angle OP_1P_2$　よって$\angle OPP_1=\angle OP_1P_2=\angle OP_1H$, $\triangle POP_1$と$\triangle P_1OH$において$\angle OPP_1=\angle OP_1H$,

$\angle POP_1=\angle P_1OH$　2角が等しいので、$\triangle POP_1\backsim\triangle P_1OH$　条件より$\angle OP_1P=90^\circ$だから$\angle OHP_1=90^\circ$

したがってOPとP_1P_2は直角に交わる。

(2) (その1) (1)の結果より、四角形$P_1PP_2O = OP\times P_1P_2\times\frac{1}{2}=\frac{d}{2}\times P_1P_2$

一方、四角形P_1PP_2O=直角三角形POP_1+直角三角形$POP_2=\frac{\sqrt{d^2-r^2}\times r}{2}\times 2=r\sqrt{d^2-r^2}$

よって $\frac{d}{2}\times P_1P_2=r\sqrt{d^2-r^2}$　∴$P_1P_2=\frac{2r\sqrt{d^2-r^2}}{d}$ (∵直角三角形POP_1に三平方の定理を用い $PP_1=\sqrt{d^2-r^2}$)

(その2) (1)の(その2)より、四角形P_1PP_2Oは、円に内接するから、トレミーの定理を用いて、$P_1P_2\times PO=PP_1\times OP_2+PP_2\times OP_1$

$P_1P_2\times d=\sqrt{d^2-r^2}\times r+\sqrt{d^2-r^2}\times r=2r\sqrt{d^2-r^2}$　∴$P_1P_2=\frac{2r\sqrt{d^2-r^2}}{d}$ (∵三平方の定理より $PP_1=\sqrt{d^2-r^2}$)

(その3) (1)の(その2)より $\triangle POP_1\backsim\triangle P_1OH$ だから、$PP_1:P_1H=OP:OP_1$, $\sqrt{d^2-r^2}:P_1H=d:r$

$P_1H\times d=r\sqrt{d^2-r^2}$, $P_1H=\frac{r\sqrt{d^2-r^2}}{d}$　∴$P_1P_2=2\times P_1H=\frac{2r\sqrt{d^2-r^2}}{d}$ (∵三平方の定理より $PP_1=\sqrt{d^2-r^2}$)

(補) 実際のテストでは、r, dは具体的数字になっているでしょう。この設問は、おとせません。(1)の(解)は、ここまで、詳しくかかなくてもよいですが、(その1)では、①の直角三角形の合同、$\triangle OP_1H\equiv\triangle OP_2H$、を示せるかということ、もしも、直角三角形$OP_1H$などとかいたら、アウトです。このことを示すのが結論です。

(その2)は、'円周角の定理より'をかいた方がよいです。この(解)は、穴埋め形式になっているでしょう？

円周角の定理の証明(但し、P.19の(1)の形式でよい)、角の二等分線の定理の証明、方べきの定理の証明は、重要です。できますね？ トレミーの定理の証明は、必ず穴埋め形式でまず出題され、次の設問で、'この定理を利用して---'となっていることでしょう。三平方の定理の証明は、たくさんあって、必ず、教科書以外の証明は、穴埋め形式です。有名な証明法には、目を通しておきましょう。トレミーの定理を用いるときには、'トレミーの定理より---'を明記して用いることとします。高校数学を用いて解をすることもOKです。特に、1次関数、2次方程式の理論(解は、交点のx座標)などには、用いなさい。三角関数は、考えものです。