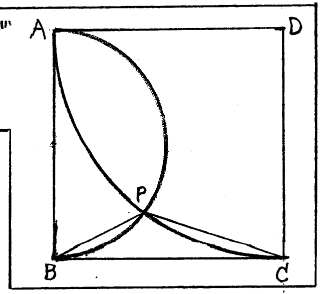
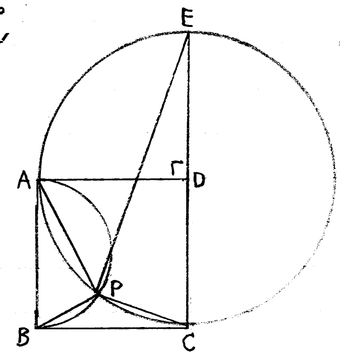
かけなし

[類9] 右図、正方形ABCDの内部で、ABを直径とする半円と点Dを中心とし半径DAの$\frac{1}{4}$円が点Pで交わっている。このとき∠BPCの角度を求めよ　答 135°



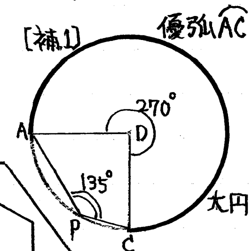
[考] 2つの円の交点Pですから、中心角と円周角の関係を用いることになるだろう。大きく、円をかかないと見えてきません。この種の設問は、円を大きくかいて、円周角の定理、中心角との関係を用いるのが定石です。

[解] 右図のように、点Dを中心とする半径DAの円と半直線CDの交点をEとする。
小円の直径がABなので、∠APB＝90°、大円の直径がCEなので、∠EPC＝90°、
弧$\overset{\frown}{AE}$の上にたつ円周角∠APEの中心角∠ADE＝90°なので、∠APE＝45°
したがって、∠BPC＝360°－∠APB－∠EPC－∠APE＝360°－90°－90°－45°＝135°

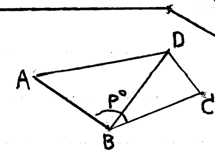


[補1] 右図下、優弧$\overset{\frown}{AC}$の上にたつ鈍角の円周角∠APCと見ると、鈍角の中心角∠ADC＝270°となり、∠APC＝270°×$\frac{1}{2}$＝135°　∴∠BPC＝360°－135°－90°＝135°

[補2] 高校になると、気付かなくても、他に方法があります。これは、Vol.II、P.1239にかきました。上の平面幾何の[解]に比べると相当にhardです。
平面幾何の大切さがよくわかる1題です。尤も、高校では、BPの長さ(AB＝2のとき)を求めよ、などもあるでしょう。



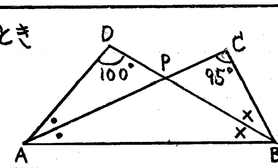
[類10] 右図、四角形ABCD(∠ABC＝P°(90°＜P°＜180°)、AB＝BC＝BD)のとき∠ADCの角度をP°で表せ。　答 $180° - \frac{P°}{2}$



[解1] 点Bを中心とし、点A、点D、点Cを通る円がかける。優弧ACの上にたつ鈍角の中心角∠ABC＝360°－P°と見ると
鈍角の円周角∠ADC＝∠ABC×$\frac{1}{2}$＝(360°－P°)×$\frac{1}{2}$＝$180° - \frac{P°}{2}$

[解2] 二等辺三角形BADとBCDより、∠BDA＝∠BAD＝x°、∠BDC＝∠BCD＝y°とおく。∠ABD＝180°－2x°、∠CBD＝180°－2y°
辺々たして、P°＝∠ABD＋∠CBD＝360°－2(x°＋y°)＝360°－2×∠ADC、2∠ADC＝360°－P°　∴∠ADC＝$180° - \frac{P°}{2}$

[類11] 右図、∠ADB＝100°、∠ACB＝95°、AC、BDはそれぞれ∠BAD、∠ABCを二等分しているとき∠APBを求めよ。　答 125°



[解] ∠BAC＝∠CAD＝a°、∠ABD＝∠CBD＝b°とする。△ABDの内角和 2a°＋b°＋100°＝180°、2a°＋b°＝80° ----①
△ABCの内角和 a°＋2b°＋95°＝180°、a°＋2b°＝85° ---②　①＋②より 3(a°＋b°)＝165°、∴a°＋b°＝55°
∴△ABPの内角和 180°＝∠APB＋a°＋b°　∴∠APB＝180°－(a°＋b°)＝180°－55°＝125°

分けはし

素数

> [類3] (1) 3桁の自然数Nの百の位の数と一の位の数の和が、十の位の数に等しいならば、自然数Nは、11の倍数であることを示せ
>
> (2) (ア) 2024を素因数分解せよ. (イ) 2024の正の約数の個数を求めよ
>
> (ウ) 2024の全ての正の約数の総和Sを求めよ
>
> (3) (ア) 素数の定義をのべよ、(イ) 定義に基ずいて、(i) 自然数1は素数でない (ii) 自然数2は素数であることを示せ
>
> (4) 2027は素数である. (ア) $\sqrt{2027}$ 以下の最大の素数nを求めよ (イ) (ア)で求めた最大の素数n以下の素数の個数は□個である. (ウ) (ア)で求めた最大の素数n以下の□個の素数全てで2027がわり切れないならば、2027は素数であることを示せ

[考] P.38の(1)なども参照

答
- (1) 解
- (2) (ア) $2^3 \times 11 \times 13$ (イ) 16 (ウ) 2520
- (3) 解
- (4) (ア) 43 (イ) 14 (ウ) 解

[解] (1) 百の位を整数a $(1 \leqq a \leqq 9)$, 十の位を整数b $(0 \leqq b \leqq 9)$, 一の位を整数c $(0 \leqq c \leqq 9)$ とおく.

条件より, $a+c=b$ ---① $N=100a+10b+c$ に①からの $b=a+c$ を代入すると

$N=100a+10(a+c)+c=110a+11c=11(10a+c)$, $10a+c$ は整数であるから題意がいえる.

(2) (ア) $2024=4 \times 506=8 \times 253=\underline{2^3 \times 11 \times 13}$ (∵ (1)から $2+3=5$ だから253は11の倍数)

(イ) $(2^0, 2^1, 2^2, 2^3)$, $(11^0, 11^1)$, $(13^0, 13^1)$ の3組の( )の中から、1個ずつとり出し、積を作ればよいから、

求める個数は $4 \times 2 \times 2=\underline{16個}$ (注, 0乗したら全て1です)

(ウ) $S=(2^0+2^1+2^2+2^3)(11^0+11^1)(13^0+13^1)=(1+2+4+8) \times 12 \times 14=15 \times 12 \times 14=\underline{2520}$

(3) (ア) 自然数の中で、1とその自然数自身のちょうど異なる2つの正の約数をもつ自然数※(補)

(イ) (i) 自然数1の正の約数は、1の1個のみであり、異なる2つの正の約数をもたない ∴1は素数でない.

(ii) 自然数 $2=1 \times 2$ だから、1とその自然数自身 2の異なる2つの正の約数をもつから、自然数2は素数である

(4) (ア) $45^2=2025$ ∴ $45^2<2027<46^2$, $45<\sqrt{2027}<46$. したがって $\underline{n=43}$

(イ) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 の$\underline{14個}$

(ウ) 2027が素数でないならば、2027は、少なくとも異なる2つの素数の積ab ($a<b$としても一般性は失わない)で表すことができる. すなわち $2027=ab$ (a, bは素数, $a<b$) とおける. $a<b$ より $a^2<ab<b^2$ だから

$a^2<2027<b^2$, $a<\sqrt{2027}<b$, したがって(イ)で求めた、14個の素数、全てで、2027がわり切れなければ、2027は素数である. (実際, わり算をしてみると、わり切れないことがわかる.)

(補) 自然数は、1と素数と合成数の3つに分類することができます. 1だけ特別です. 素数で偶数は2のみであり、2以外の素数は必ず奇数です. 素数の問題では、このことを利用することが、よくあります. 注意です.

単に約数というときには、負の約数も含まれます. 2の約数は、±1, ±2 の4個あります.

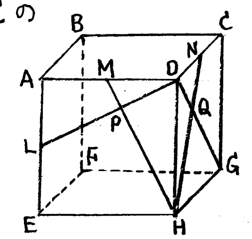
(問) (1) 789は素数か (2) 1789は素数か (合成数ならば、素因数分解せよ)

(かい) (1) $789=3 \times 263$ ($\sqrt{263}=16.$--- だから、2, 3, 5, 7, 11, 13 で263をわってみるとわり切れない ∴263は素数)

(2) 1789は素数 ($\sqrt{1789}=42.$--- だから, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 で1789をわってみるとわりきれない)

13の[2]' 一辺の長さ8の立方体ABCD-EFGH(右図)である。L,M,Nは、それぞれ、AE,AD,DCの中点で、P,Qは、それぞれ、MHとLDの交点、NHとDGの交点、である。三角錐DPHQの体積Vを求めよ。

答 $\frac{512}{45}$



[考1] 最下段[補]参照

[解1] 前面の正方形AEHDを含む平面をとり出すと右図(I)の様 $\triangle MPD \backsim \triangle HPI$ により

$MP:HP=MD:HI=4:16=1:4$

右側面の正方形DHGCを含む平面をとり出すと右図(II)の様 $\triangle DQN \backsim \triangle GQH$ により

$NQ:HQ=DN:GH=4:8=1:2$

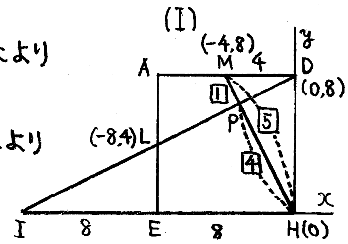
三角錐H-DPQ:三角錐H-DMN $=\cancel{HD}\times HP\times HQ:\cancel{HD}\times HM\times HN$

$=4\times2:5\times3=8:15$ なので 三角錐H-DPQ $=V=$ 三角錐H-DMN $\times\frac{8}{15}$

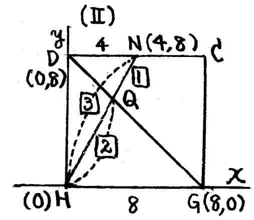
三角錐H-DMN $=$ 直角三角形DMN $\times HD\times\frac{1}{3}=4\times4\times\frac{1}{2}\times8\times\frac{1}{3}=\frac{8^2}{3}$

$\therefore V=\frac{8^2}{3}\times\frac{8}{15}=\frac{512}{45}$

(I)



(II)



[考2] 切断三角柱 or 鈍角三角形を底面とする三角錐と捉える。

[解2] [解1]の図(I)を利用して、点Pの座標を求める。直線MO: $y=-2x$, 直線DL: $y=\frac{1}{2}x+8$

$-2x=\frac{1}{2}x+8$, $-4x=x+16$, $5x=-16$, $x=-\frac{16}{5}$, $y=\frac{32}{5}$ $\therefore P\left(-\frac{16}{5},\frac{32}{5}\right)$ 下図 $DT=\frac{16}{5}$

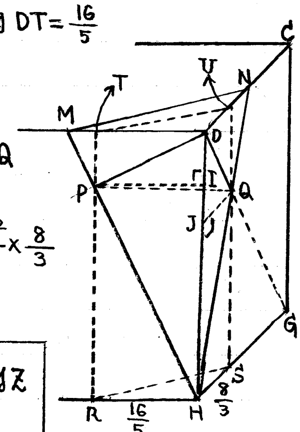
図(II)を利用して、点Qの座標を求める。直線DG: $y=-x+8$, 直線NO: $y=2x$

$-x+8=2x$, $3x=8$, $x=\frac{8}{3}$, $y=\frac{16}{3}$ $\therefore Q\left(\frac{8}{3},\frac{16}{3}\right)$ 右下図 $DU=\frac{8}{3}$

右図、三角柱HRS-DTUを平面PQD、平面PQHで切断した立体が、三角錐DPHQである。$DT=\frac{16}{5}$, $DU=\frac{8}{3}$, 三角柱HRS-DTU $=\frac{16}{5}\times\frac{8}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{8^2}{15}$

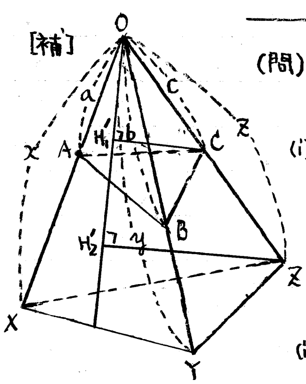
よって、求める切断三角柱 $=$ 三角錐DPHQ $=V=$ 三角柱HRS-DTU $\times\frac{8+0+0}{3}=\frac{8^2}{15}\times\frac{8}{3}$

$=\frac{512}{45}$ ($V=$ 三角錐P-DHQ $=\frac{\triangle DHQ\times IP}{3}=\frac{\frac{DH\times JQ}{2}\times DT}{3}=\frac{DH\times DU\times DT}{6}$ を用いてもOK)



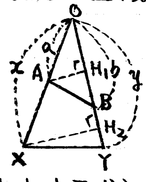
設問の立体図にかきこむとわかりやすい

[補]



(問) 三角錐O-ABCの体積:三角錐O-XYZの体積 $=abc:xyz$ であることを証明せよ。

(i) $\triangle OAB$ の面積:$\triangle OXY$ の面積 $=ab:xy$ を示す



点A,点XからOB,OYにそれぞれ垂線AH_1,垂線XH_2をおろす。

$\triangle OAH_1 \backsim \triangle OXH_2$ により。$AH_1:XH_2=OA:OX=a:x$, $AH_1=ka$, $XH_2=kx$

$\triangle OAB:\triangle OXY=\frac{OB\times AH_1}{2}:\frac{OY\times XH_2}{2}=b\times ka:y\times kx=ab:xy$

(ii) 点C,点Zから$\triangle OAB$,$\triangle OXY$にそれぞれ垂線CH_1',垂線ZH_2'をおろす。

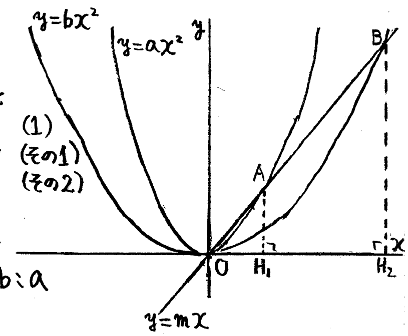
$\triangle OCH_1' \backsim \triangle OZH_2'$ により $CH_1':ZH_2'=OC:OZ=c:z$, $CH_1'=lc$, $ZH_2'=lz$

三角錐O-ABC:三角錐O-XYZ $=\frac{\triangle OAB\times CH_1'}{3}:\frac{\triangle OXY\times XH_2'}{3}=mab\times lc:mxy\times lz$

$=abc:xyz$ ($\because$(i)より $\triangle OAB=mab$, $\triangle OXY=mxy$)

2次関数と相似の周辺

□1 (1) 2つの放物線 $y=ax^2$---① と $y=bx^2$---② $(a>b>0)$ は、相似(相似の中心は原点O)であることを示せ
(2) $y=3x^2$---①, $y=2x^2$---② とする. 直線 $y=px\ (p>0)$ と①,②の交点をそれぞれA,B, 直線 $y=qx\ (q<0)$ と①,②の交点をそれぞれC,D とするとき △OAC と △OBD の面積比を求めよ.



[解] (1) $a>b>0$ なので①,②のグラフは、右のよう. $y=ax^2$---①, $y=bx^2$---②
(その1) 原点を通る直線を $y=mx\ (m>0)$---③ とする. ③と①,②の交点をそれぞれA,Bとする. ①,③を連立して $ax^2=mx$, $x(ax-m)=0$, 点Aのx座標は0でないから、$ax-m=0$, $x=\frac{m}{a}$ となり $A\left(\frac{m}{a}, \frac{m^2}{a}\right)$ 同様に $B\left(\frac{m}{b}, \frac{m^2}{b}\right)$, OA:OB が m の値にかかわらず、一定の比となれば、題意が示される. 右図 $OA:OB=OH_1:OH_2=\frac{m}{a}:\frac{m}{b}=b:a$
よって示された. ①,②は、y軸対称だから $m<0$ のときも成立する.
(その2) $y=ax^2$---① の点 $A(t, at^2)\ (t>0)$ とする. 直線OAは $y=\frac{at^2}{t}x=atx$---③, $y=bx^2$---② と③の交点をBとすると②と③を連立して、$atx=bx^2$, $x(bx-at)=0$, Bのx座標は0でないから、$bx-at=0$
$x=\frac{at}{b}$ となり、$B\left(\frac{at}{b}, \frac{a^2t^2}{b}\right)$ OA:OB が t の値にかかわらず、一定の比となれば、題意が示される.
右上図 $OA:OB=OH_1:OH_2=t:\frac{at}{b}=b:a$, よって示された. ①,②は$y$軸対称だから $t<0$ ときも成立する.

(2) (1)において $a=3$, $b=2$ とすれば、$y=px$ と①,②の交点A,Bについて、pの値にかかわらず、OA:OB=2:3 が成立する. 同様に OC:OD=2:3 も成立するから、△OAC と △OBD は、2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しくなり、△OAC∽△OBD, 相似比は 2:3 だから $\underline{\triangle OAB:\triangle OBD}=2^2:3^2=\underline{4:9}$

[補] もしも(1)がなければ、(2)は、(1)の(その1) or (その2) のようにかいて、相似比 2:3 を出さなければなりません.

P.58の(5)の □6 (4)の[解]です.

[解] (4) CDとBEの交点をG, ABとCFの交点をH, とすれば、求める面積 S=平行四辺形CGBH,
直線BEは $y=\frac{-15-(-3)}{5-(-11)}(x+11)-3=\frac{-12}{16}(x+11)-3=-\frac{3}{4}(x+11)-3=-\frac{3}{4}x-\frac{33}{4}-3=-\frac{3}{4}x-\frac{45}{4}$, 点Gの座標は、
$x=-5$ として $y=\frac{15}{4}-\frac{45}{4}=-\frac{30}{4}=-\frac{15}{2}$, $\therefore G\left(-5, -\frac{15}{2}\right)$, $CG=5-\left(-\frac{15}{2}\right)=5+\frac{15}{2}=\frac{25}{2}$
よって $\underline{S}=CG\times CA=\frac{25}{2}\times 10=\underline{125}$

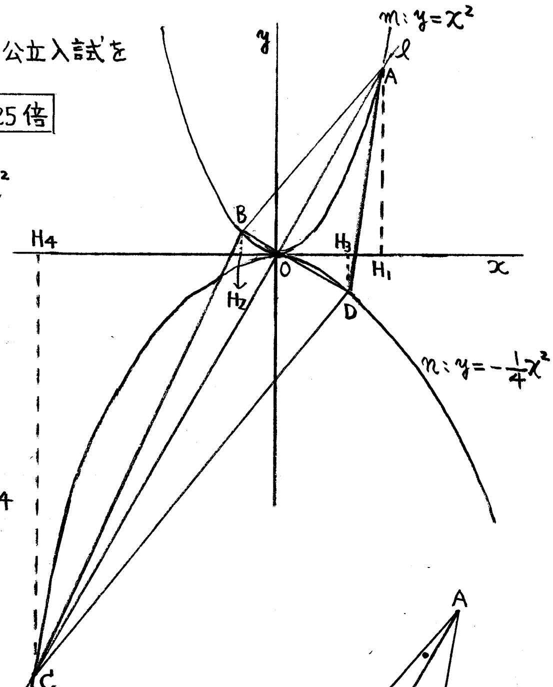
P.58の(3)の □3 の[別解]です.
[別解] 点 $C\left(t, \frac{3}{2}t\right)$, $0<t<3$ とおける.(迄は[解]と同じ)
△OAB∽△OBC より. OA:OB=OB:OC, $OA\times OC=OB^2$, $\sqrt{3^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2}\times\sqrt{t^2+\left(\frac{3}{2}t\right)^2}=(-2)^2+2^2=8$,
$\sqrt{3^2\left(1+\frac{9}{4}\right)}\times\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}\right)}\times t=8$, $3\left(1+\frac{9}{4}\right)t=8$, $3\times\frac{13}{4}\times t=8$, $t=\frac{32}{39}$ $\therefore \underline{C\left(\frac{32}{39}, \frac{16}{13}\right)}$
$OA\times OC=OB^2$, $OA=\sqrt{3^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2}=\sqrt{3^2\left(1+\frac{9}{4}\right)}=3\sqrt{\frac{13}{4}}=\frac{3\sqrt{13}}{2}$, $OB^2=(-2)^2+2^2=8$
$\therefore \underline{OC}=\frac{OB^2}{OA}=8\times\frac{2}{3\sqrt{13}}=\frac{16}{3\sqrt{13}}=\underline{\frac{16\sqrt{13}}{39}}$

(補) OCは、三平方の定理(?)を用いずに途中経過の式を用いました.
ついでに $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ のとき 公式 $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ は三平方の定理から導き出されたものです.

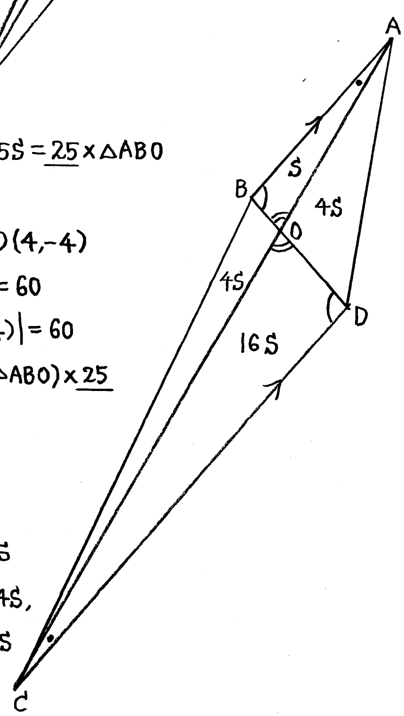
[2] 直線ℓと放物線m：$y=x^2$がある.直線ℓと放物線mとの2つの交点をA,Bとし,原点をOとする.Aのx座標は,5であり,Bのx座標は,-1である.放物線n：$y=-\frac{1}{4}x^2$について,直線OAと放物線nとの交点のうち,Oでない点をC,直線OBと放物線nとの交点のうちOでない点をDとする.四角形ABCDの面積は,△ABOの面積の何倍か

[考] [1]の事実を知らない人,気付かない人でも,[補]がありますが,公立入試を意識して,[解]としました.

答 25倍



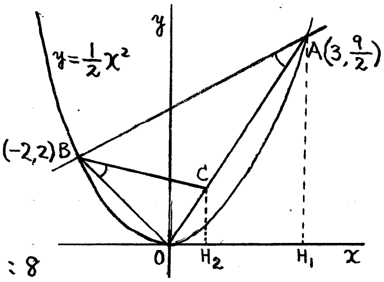
[解] 右図参照 A(5,25),B(−1,1).直線OA：$y=5x$とn：$y=-\frac{1}{4}x^2$の交点Cのx座標は,$5x=-\frac{1}{4}x^2$, $x\neq0$から$5=-\frac{1}{4}x$,
$x=-20$ ∴C(−20,−100)
直線OB：$y=-x$とn：$y=-\frac{1}{4}x^2$の交点Dのx座標は,
$-x=-\frac{1}{4}x^2$, $x\neq0$から$-1=-\frac{1}{4}x$, $x=4$ ∴D(4,−4)
点A,B,C,Dからx軸へおろした垂線のあしをそれぞれ,
点H_1,H_2,H_3,H_4とする.△OAB∽△OCDであることを示す.
$OA:OC=OH_1:OH_4=5:20=1:4$, $OB:OD=OH_2:OH_3=1:4$
2組の辺の比とその間の角(∠AOB=∠COD,対頂角)が等しい
∴△OAB∽△OCD,相似比は1:4
右図.△ABO=Sとすれば,相似比1:4より面積比1:16
∴△CDO=16S, OA:OC=1:4なので,△OBC=4S,
△OAD=△OBC=4S よって 四角形ABCD=S+4S+4S+16S=25S=25×△ABO



[補] 実際に面積を求めてしまう. A(5,25),B(−1,1),C(−20,−100),D(4,−4)
$\triangle OAB=\frac{1}{2}|1\times5-(-1)\times25|=15$, $\triangle OBC=\frac{1}{2}|(-100)\times(-1)-(-20)\times1|=60$
$\triangle OCD=\frac{1}{2}|(-4)\times(-20)-4\times(-100)|=240$, $\triangle ODA=\frac{1}{2}|25\times4-5\times(-4)|=60$
よって 四角形ABCD=15+60+240+60=375=15×25=△OAB(△ABO)×25
この三角形の面積については,P.15の(3)参照.

[補] △OAB∽△OCDを示さずに.$OA:OC=OH_1:OH_4=5:20=1:4$ だから
△OAB：△OBC=OA：OC=1：4=S：4S (∵△OAB=S), △OBC=4S
$OB:OD=OH_2:OH_3=1:4$, △OAB：△ODA=1：4=S：4S, △ODA=4S,
△OBC：△OCD=OB：OD=$OH_2:OH_3$=1：4=4S：16S, △OCD=16S
のようにもできますが,----
実際の公立入試でしたら.(1)△OAB∽△OCDを示せ or (1)AB//CDを示せ とかなっていることでしょう.

③ $y=\frac{1}{2}x^2$ 上に、x 座標が 3 である点A と x 座標が -2 である点B がある.線分OA上に、$\triangle OAB \backsim \triangle OBC$ となる点C をとるとき、点C の座標と線分OC の長さを求めよ.



[解] $\triangle OAB \backsim \triangle OBC$ より、点C は、図のような位置にある. $x=3$ のとき $y=\frac{9}{2}$ ∴$A(3,\frac{9}{2})$

$x=-2$ のとき $y=\frac{1}{2}\times(-2)^2=2$ ∴$B(-2,2)$, 端点を除く線分OA は、$0<x<3$,

かつ $y=\frac{\frac{9}{2}}{3}x=\frac{3}{2}x$ だから 点$C(t,\frac{3}{2}t)$, $0<t<3$ とおける. $\triangle OAB$ と $\triangle OBC$ の

面積比は、OA, OC を底辺と見ると、$\triangle OAB : \triangle OBC = OA : OC = OH_1 : OH_2 = 3 : t$

一方、$\triangle OAB \backsim OBC$ 相似比 $OA : OB$ より 面積比 $\triangle OAB : \triangle OBC = OA^2 : OB^2$

$=3^2+(\frac{9}{2})^2 : (-2)^2+2^2 = 9(1+\frac{9}{4}) : 8 = 9\times\frac{13}{4} : 8$ ∴$\triangle OAB : \triangle OBC = 3 : t = 9\times\frac{13}{4} : 8$

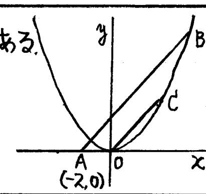
$9\times\frac{13}{4}\times t = 3\times 8$, $\frac{39}{4}t=8$, ∴$t=\frac{32}{39}$ ($0<t<3$ をみたす) ∴$C(\frac{32}{39},\frac{16}{13})$

$OC^2=\left(\frac{32}{39}\right)^2+\left(\frac{16}{13}\right)^2=\left(\frac{16\times2}{13\times3}\right)^2+\left(\frac{16}{13}\right)^2=\left(\frac{16}{13}\right)^2\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2+1\right)=\left(\frac{16}{13}\right)^2\times\frac{13}{3^2}=\left(\frac{16}{13\times3}\right)^2\times13$

∴$OC=\frac{16\sqrt{13}}{39}$ (補) P.58の(1)下に三平方の定理のみを用いた解があります.

答	$C\left(\frac{32}{39},\frac{16}{13}\right)$, $OC=\frac{16\sqrt{13}}{39}$

④ 右図のように、x 軸上の点 $A(-2,0)$ と放物線 $y=x^2$ 上の点B があり、点B の x 座標は正である.
放物線 $y=x^2$ 上に $AB /\!/ OC$ となるように点C をとると、$AB=2OC$ となった.
(1) 直線BC と x 軸の交点の座標を求めよ. (2) 点C の座標を求めよ
(3) 四角形AOCB の面積を求めよ.



[考] (2) 知っておきましょう. P.3の(7)イ参照. 平行な線分には強いvector.

[解] (1) 直線BC と x 軸の交点を $D(x,0)$, $x>0$ とする. $\triangle OCD \backsim \triangle ABD$ なので $OC : AB = OD : AD = 1 : 2$ (∵$AB=2OC$)

$2OD=AD=AO+OD$, $2x=2+x$, $x=2$ ∴$\underline{D(2,0)}$

(2) $B(b,b^2)$, $C(c,c^2)$, $b>0$, $c>0$ とおく. $AB /\!/ OC$, $AB=2OC$ より $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{OC}$, $\begin{pmatrix} b-(-2) \\ b^2-0 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} c \\ c^2 \end{pmatrix}$ (∵$A(-2,0)$)

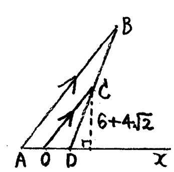
$b+2=2c$ ---①, $b^2=2c^2$ ---② ②より $b>0$, $c>0$, だから $b=\sqrt{2}c$ これを①に入れて $\sqrt{2}c+2=2c$,

$2=(2-\sqrt{2})c$, $c=\frac{2}{2-\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=2+\sqrt{2}$, $c^2=(2+\sqrt{2})^2=6+4\sqrt{2}$, ∴$\underline{C(2+\sqrt{2},6+4\sqrt{2})}$

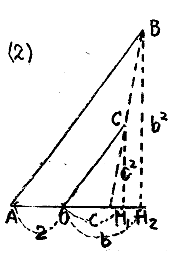
(3) $\triangle OCD \backsim \triangle ABD$ 相似比 $OC : AB = 1 : 2$ なので 面積比 $\triangle OCD : \triangle ABD = 1^2 : 2^2 = 1 : 4$

$4\triangle OCD = \triangle ABD =$ 四角形(台形)AOCB $+ \triangle OCD$, $\underline{\text{四角形AOCB}}=3\triangle OCD=3\times\left\{\frac{1}{2}\times\cancel{2}\times(6+4\sqrt{2})\right\}$

$=\underline{18+12\sqrt{2}}$



[補] (2)



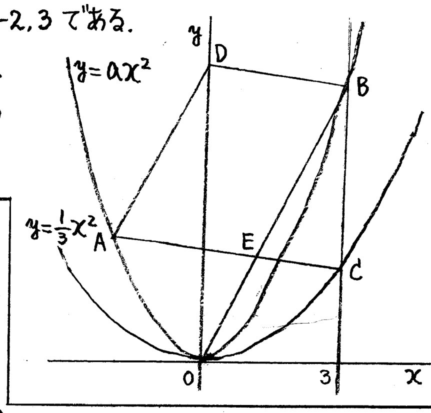
$\triangle OCH_1 \backsim \triangle ABH_2$ $OC : AB = OH_1 : AH_2 = CH_1 : BH_2 = 1 : 2$ なので

$AH_2=2OH_1$ ∴$2+b=c$, $BH_2=2CH_1$ ∴$b^2=2c^2$ が得られます.

次頁設問⑤は、vectorを用いるとスッキリします.

答	
	(1) (2, 0)
	(2) $C(2+\sqrt{2},6+4\sqrt{2})$
	(3) $18+12\sqrt{2}$

⑤ $y=ax^2$ $(a>1)$ 上に、点A,点B をとる.点A,点B の x座標は,それぞれ $-2,3$ である.
点Bを通り、y軸に平行な直線と $y=\frac{1}{3}x^2$ の交点をCとする.点Bを通り、直線ACに平行な直線とy軸との交点をDとする.直線OBと直線ACの交点Eをとったところ、平行四辺形AEBDが得られた.aの値を求めよ.



[考] 自分で図をかくつもりで、文を読んでいきます. A(-2,4a), B(3,9a), C(3,3), 点Dは、y軸(直線x=0)上の点だから、D(0,s), 点Eは,直線OB上の点かつ直線AC上の点です.点Eをどのように処理するか.まず、直線OB上の点Eとして,直線OB: $y=\frac{9a}{3}x=3ax$ ですから、E(t,3at)とおけます.
実は,これをvectorで表すと, $\overrightarrow{OE}=\alpha\overrightarrow{OB}=\alpha\begin{pmatrix}3\\9a\end{pmatrix}=3\alpha\begin{pmatrix}1\\3a\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\3a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\3at\end{pmatrix}$ $(3\alpha=t)$ ということと同じということです.
直線AC上の点Eという条件は,まだ用いていません,平行四辺形AEBDの条件もあります.目標は,aの値を求める事.
s,tを消去して,aの式をつくることです.平行四辺形AEBDの条件より,$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DB}$ (or $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EB}$)を用いると,s,tの連立方程式が得られ,s,tはaで表すことができます.最後に点Eが直線AC上にある条件にもち込むと,aの値が得られます.直線AC上にある条件は、$\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AC}$ でもOKです.以上を参考にして,解にtry!.座標などは,自分で,グラフにかき込んで下さい.tは定数となるので,easyです.

[解] $y=ax^2$ $(a>1)$ 上の点として、A(-2,4a), B(3,9a), 点Cのx座標は3, $y=\frac{1}{3}x^2$上の点Cだから、C(3,3)
点Dは、y軸上の点だから D(0,s) とおける.点Eは,直線OB: $y=\frac{9a}{3}x=3ax$ 上の点だから,E(t,3at)とおける.
平行四辺形AEBDより, $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DB}$ $\begin{pmatrix}t-(-2)\\3at-4a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-0\\9a-s\end{pmatrix}$ $t+2=3$ より $t=1$ $(3at-4a=9a-s$ より $s=10a)$
∴E(1,3a), 点Eは,直線AC上の点だから, $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AC}$ $\begin{pmatrix}1-(-2)\\3a-4a\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}3-(-2)\\3-4a\end{pmatrix}$, $3=5k$ より $k=\frac{3}{5}$, これを
$-a=k(3-4a)$ に入れて, $-a=\frac{3}{5}(3-4a)$, $-5a=9-12a$, $7a=9$, $a=\frac{9}{7}$ $(a>1$ に適する)

答	$a=\frac{9}{7}$

[補] 点Eが直線AC: $y=\frac{3-4a}{3-(-2)}(x-3)+3=\frac{3-4a}{5}(x-3)+3$ 上にあるとすると $3a=\frac{3-4a}{5}(1-3)+3$, を解いて $a=\frac{9}{7}$
上の[解]で,平行四辺形AEBDの条件より先に直線AC上の点Eの条件を持ち出しても,結局は,上と同様です.
ABの中点がCDの中点と一致するを用いてもOK.

P.7の(15)ウ の[類9]'の[解](3)

(3) ACは対角線だから △ABC=△ACD $S_1+S_2+a+b=c+d$ ----①
(2)より △RAB+△RCD=△RBC+△RDA $a+(S_2+c)=b+(S_1+d)$ -----②
①−②より $S_1+b-c=c-b-S_1$, $2S_1=2c-2b$ ∴$\underline{S_1=c-b}$ ①に代入 $c-b+S_2+a+b=c+d$, $\underline{S_2=d-a}$

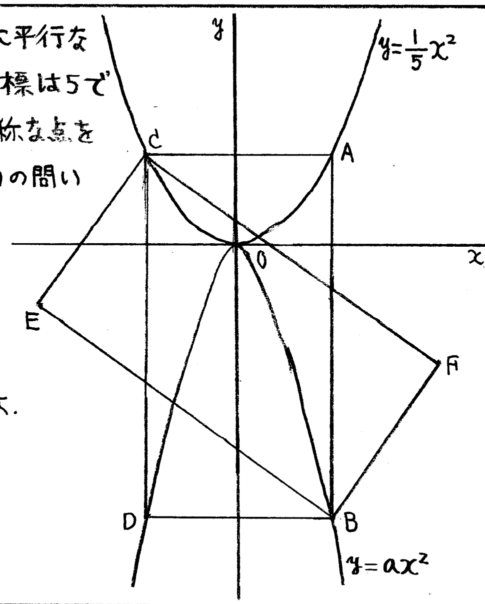
(補) S_2を消去すればよい事です.①から $S_2=c+d-a-b-S_1$ を②に代入しても,$S_1=c-b$ が得られます.

6 右図のように、関数$y=\frac{1}{5}x^2$上に、点Aがあり、点Aを通りy軸に平行な直線と関数$y=ax^2$のグラフとの交点をBとする. 点Aのx座標は5で点Bのy座標は−15である. また、2点A,Bとy軸に関して対称な点をそれぞれC,Dとし、長方形ACDBをつくる. このとき次の(1)〜(4)の問いに答えよ、但し、$a<0$とする.

(1) aの値を求めよ　(2) 2点B,Cを通る直線の式を求めよ

(3) 長方形ACDBと合同な長方形CEBFを右図のようにかくとき、点Eと点Fを通る直線の式を求めよ.

(4) 長方形ACDBと長方形CEBFが重なった部分の面積Sを求めよ.



[考] (3) 2つの合同な長方形とかいてありますが、この図を作図することを考えてみましょう. 私は、この図をかくのに、ADとBCの交点を中心として長方形ACDBを回転させました. 回転は、折り返しです. また、三角形の合同を考えてもよいですね.

[解] (1) 点Aは、$y=\frac{1}{5}x^2$上の点なので、$x=5$から$y=\frac{1}{5}\times5^2=5$ ∴A(5,5) すると点B(5,−15)、点Bは$y=ax^2$上の点なので、$-15=a\times5^2$, $a=-\frac{15}{5^2}=-\frac{3}{5}$

(2) C(−5,5), B(5,−15)だから直線BCは、$y=\frac{-15-5}{5-(-5)}(x+5)+5=-2(x+5)+5=-2x-5$

答	
	(1) $a=-\frac{3}{5}$
	(2) $y=-2x-5$
	(3) $y=-\frac{2}{11}x-5$
	(4) 125

(3) (その1) ADとBCの交点M(0,−5) (∵BCの中点がM)を中心にして、左回りに長方形ACDBを回転させ、点Aが点Cに、点Cが点Eになるようにする.(作図的には、Mを中心、MA(MC)を半径にして、円を描き、Cを中心半径CAの弧との交点をEとする. 半直線EMと円との交点をFとする) 点E(a,b)とすれば、点A(5,5)と点E(a,b)が、BCに関して対称だから、AEの中点N$\left(\frac{a+5}{2},\frac{b+5}{2}\right)$が、直線BC：$y=-2x-5$上にあることから、$\frac{b+5}{2}=-2\times\frac{a+5}{2}-5$, $b+5=-2(a+5)-10$, $b=-2a-25$ ---①, 更に$AE\perp BC$から$\frac{b-5}{a-5}\times(-2)=-1$, $-2b+10=-a+5$, $a=2b-5$ ---②

②を①に代入 $b=-2(2b-5)-25$, $5b=-15$, $b=-3$, ②に入れて $a=-6-5=-11$ ∴E(−11,−3)

BCとEFの交点がM(0,−5)でもあるので、求める直線EFは、$y=\frac{-5-(-3)}{0-(-11)}x-5=-\frac{2}{11}x-5$

(その2) E(a,b)とする. CE=CAから $(a+5)^2+(b-5)^2=10^2$ ---①, ADとBCの交点Mは、EFとBCの交点Mでもあるから、点MがBCの中点M(0,−5)であり、ME=MCより $a^2+(b+5)^2=(-5-0)^2+(5-(-5))^2=25+100=125$ ---②

①より $a^2+b^2+10a-10b-50=0$ ---①′, ②より $a^2+b^2+10b-100=0$ ---②′ ①′−②′より $10a-20b+50=0$

$a-2b+5=0$, $a=2b-5$ ---③ を①に入れて $(2b)^2+(b-5)^2=10^2$, $5b^2-10b-75=0$, $b^2-2b-15=0$,

$(b+3)(b-5)=0$ $b=-3$ or $b=5$ であるが、$b=5$のとき、点EがAC上にあることになり、不適. ∴$b=-3$,

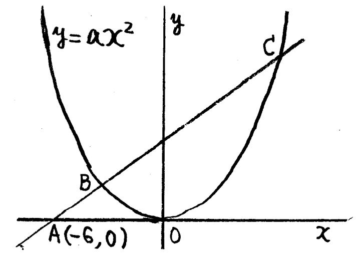
このとき、③に入れて、$a=-11$ ∴E(−11,−3) よって、求める直線EF(EM)の式は、$y=\frac{-5-(-3)}{0-(-11)}x-5=-\frac{2}{11}x-5$

(4) P.58の(1)下

7 右図のように、放物線$y=ax^2$と点A(−6,0)を通る直線が、2点、B,Cで交わっており、AB：AC＝1：4である. 次の問いに答えよ

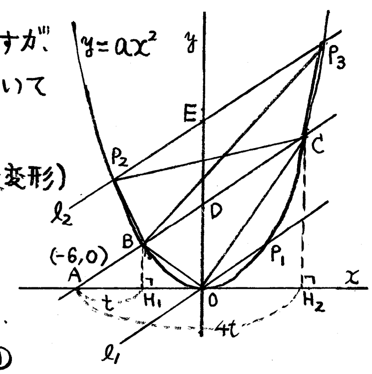
(1) 2点B,Cの座標をそれぞれ求めよ

(2) 放物線上に点Pをとり、△PBCの面積が△OBCの面積と等しくなるようにする. そのような点Pの座標をすべて求めよ.



[考] (1) 一般には、右図 $AH_1=t$, $AH_2=4t$ (AB：AC＝1：4) $t>0$ とおくところですが、$B(\alpha, a\alpha^2)$, $C(\beta, a\beta^2)$, $-6<\alpha<0<\beta$ とおいて、$\overrightarrow{AB}\times 4=\overrightarrow{AC}$ を用いてみましょう.

(2) 直線AB(AC)に平行な、2つの直線 l_1, l_2 と $y=ax^2$ の交点がP (等積変形)



[解] (1) $B(\alpha, a\alpha^2)$, $C(\beta, a\beta^2)$, $a>0$, $-6<\alpha<0<\beta$ とおく. AB：AC＝1：4 より.

$\overrightarrow{AB}\times 4=\overrightarrow{AC}$, $A(-6,0)$, $4\begin{pmatrix}\alpha-(-6)\\ a\alpha^2-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta-(-6)\\ a\beta^2-0\end{pmatrix}$ $4(\alpha+6)=\beta+6$ ---①

$4a\alpha^2=a\beta^2$ ----② ②より $a(2\alpha+\beta)(2\alpha-\beta)=0$, $(-6<)\alpha<0<\beta$ より $2\alpha-\beta<0$, $a>0$ ∴ $2\alpha+\beta=0$

$\beta=-2\alpha$ を ①からの $4\alpha+18=\beta$ に入れて $4\alpha+18=-2\alpha$, $6\alpha=-18$, $\alpha=-3$, $\beta=(-2)\times(-3)=6$,

∴ $B(-3,9a)$, $C(6,36a)$

(2) 直線AB(AC)は、$y=\dfrac{9a-0}{(-3)-(-6)}(x-(-6))=3a(x+6)=3ax+18a$

等積変形により、求める点Pは、右上図, P_1, P_2, P_3 の3点ある. ($l_1 /\!/ l_2 /\!/$ 直線AB(AC))

l_1：$y=3ax$ と $y=ax^2$ を連立して $3ax=ax^2$, $a>0$, $x\neq 0$ から $x=3$ ∴ $P_1(3,9a)$

l_2 は $DE=OD=18a$ より $OE=36a$ だから、l_2：$y=3ax+36a$, $y=ax^2$ と連立して、

$ax^2=3ax+36a$, $x^2-3x-36=0$, $x=\dfrac{3\pm\sqrt{9+4\times 36}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9(1+4\times 4)}}{2}=\dfrac{3\pm 3\sqrt{17}}{2}$

P_2 の x 座標, $x=\dfrac{3-3\sqrt{17}}{2}$ のとき、$y=\left(\dfrac{3-3\sqrt{17}}{2}\right)^2 a=\dfrac{9(1-\sqrt{17})^2}{4}a=\dfrac{9(18-2\sqrt{17})}{4}a=\dfrac{9(9-\sqrt{17})}{2}a$

P_3 の x 座標, $x=\dfrac{3+3\sqrt{17}}{2}$ のとき、$y=\left(\dfrac{3+3\sqrt{17}}{2}\right)^2 a=\dfrac{9(9+\sqrt{17})}{2}a$ ∴ $P_2\left(\dfrac{3-3\sqrt{17}}{2}, \dfrac{9(9-\sqrt{17})}{2}a\right)$, $P_3\left(\dfrac{3+3\sqrt{17}}{2}, \dfrac{9(9+\sqrt{17})}{2}a\right)$

[別解] (1) 右上図 $AH_1=t\,(>0)$, とおくと、AB：AC＝1：4 より $AH_2=4t$, $B(-6+t, a(-6+t)^2)$, $C(-6+4t, a(-6+4t)^2)$ とおける.

$BH_1:CH_2=1:4$ だから、$4\times a(-6+t)^2=a(-6+4t)^2$, $a>0$, $4(t-6)^2=(2(2t-3))^2$, $(t-6)^2=(2t-3)^2$

$(2t-3)^2-(t-6)^2=0$, $\{(2t-3)+(t-6)\}\{(2t-3)-(t-6)\}=0$, $(3t-9)(t+3)=0$, $3(t-3)(t+3)=0$,

$t>0$ より $t=3$, ∴ $B(-3,9a)$, $C(6,36a)$

答	
	(1) $B(-3,9a)$, $C(6,36a)$
	(2) $(3,9a)$, $\left(\dfrac{3-3\sqrt{17}}{2}, \dfrac{9(9-\sqrt{17})}{2}a\right)$
	$\left(\dfrac{3+3\sqrt{17}}{2}, \dfrac{9(9+\sqrt{17})}{2}a\right)$

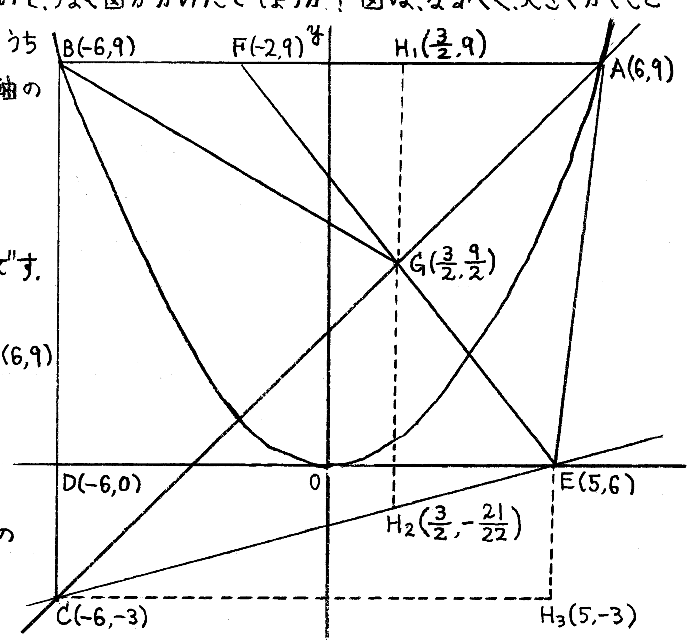
[補] △OBCの面積 $=\dfrac{1}{2}\times H_1H_2\times OD=\dfrac{1}{2}(6-(-3))\times 18a=81a$

a の値にかかわらず、AB：AC＝1：4 となる点B,点Cの x 座標は、それぞれ、定数 −3, 6 となるということですね. $a\to+\infty$ となって、放物線のトンガりが鋭くなっても、あるいは、$a\to 0+0$ (a が正の方から0に近付くということ) となって、殆んど、x 軸に近寄っても --- ですか.

かけなし

[8] $y=x+3$ ---① と $y=ax^2\ (a>0)$ ---② の交点のうち、x座標が6である点をAとする. 点Bは、曲線②上の点でABはx軸に平行である. 点Cは、直線①上の点で、線分BCは、y軸に平行である.
点Dは線分BCとx軸の交点である. 点Eは、x軸上の点で、DO : OE = 6 : 5 であり、そのx座標は正である.
(1) aの値を求めよ (2) 直線CEの式を求めよ
(3) 線分AB上に、点Fを△AFEの面積が直線①により、2等分されるようにとり、直線①と線分EFの交点をGとする. 面積比 △BGF : △CEG を最もsimpleな整数の比で表せ.

[考] この設問は落とすことは、できません. (1)を解いて、うまく図がかけたでしょうか? 図は、なるべく、大きくかくことです. 必要なスペースを見付け出すことも、実力のうちです. 私は、右図のようにかきました. x軸、y軸の方向の幅をかえて、かくこともあります. このとき、直線の傾きは、少々、わかりにくくなります.
この設問は、キレイ(?)にかけました.
(3)は、directに面積を求める方が良さそうです.



[解] (1) ①上の点A, x座標が6より $y=6+3=9$, A(6,9)
点Aは②上の点でもあるので、$9=a\times6^2$
$\underline{a}=\frac{9}{36}=\underline{\frac{1}{4}}$

(2) ABは、x軸に平行, 点Bは②($y=\frac{1}{4}x^2$)上の点だから、y軸対称により, B(-6,9)
点Cのx座標は、点Bのx座標−6に同じで、
①上の点Cだから $y=-6+3=-3$ ∴C(-6,-3), DO : OE = 6 : 5, DO = 6 より OE = 5, OEのx座標は正 ∴E(5,0)
よって直線CE : $\underline{y}=\frac{0-(-3)}{5-(-6)}(x-5)=\frac{3}{11}(x-5)=\underline{\frac{3}{11}x-\frac{15}{11}}$

(3) 線分AB上の点Fは、F(t, 9), $-6<t<6$, とおける. △AFG = △AEG だから、EFの中点$G\left(\frac{t+5}{2},\frac{9}{2}\right)$が、①上にあることにより、$\frac{9}{2}=\left(\frac{t+5}{2}\right)+3$, $9=t+5+6$, $t=-2$, ∴F(-2,9), $G(\frac{3}{2},\frac{9}{2})$, 点Gを通り、$y$軸に平行な直線 $x=\frac{3}{2}$ と線分AB, 直線CEとの交点をそれぞれH_1, H_2とすると、$H_1(\frac{3}{2},9)$, $H_2(\frac{3}{2},-\frac{21}{22})$ (∵直線CEの式 $y=\frac{3}{11}x-\frac{15}{11}$ に $x=\frac{3}{2}$ を代入, $y=\frac{3}{11}\times\frac{3}{2}-\frac{15}{11}=\frac{9}{22}-\frac{30}{22}=-\frac{21}{22}$)

$\triangle BGF=\frac{1}{2}\times BF\times GH_1=\frac{1}{2}(-2-(-6))\times\left(9-\frac{9}{2}\right)=\frac{1}{2}\times4\times\frac{9}{2}=9$

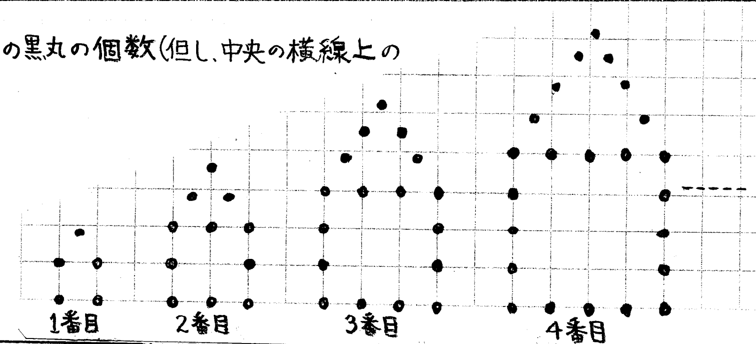
$\triangle CEG=\frac{1}{2}\times CH_3\times GH_2=\frac{1}{2}(5-(-6))\times\left(\frac{9}{2}-\left(-\frac{21}{22}\right)\right)=\frac{1}{2}\times\cancel{11}\times\frac{99+21}{\cancel{22}\,2}=\frac{120}{4}=30$

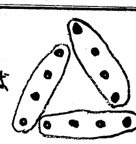
∴$\underline{\triangle BGF:\triangle CEG}=9:30=\underline{3:10}$

答	
	(1) $a=\frac{1}{4}$
	(2) $y=\frac{3}{11}x-\frac{15}{11}$
	(3) 3 : 10

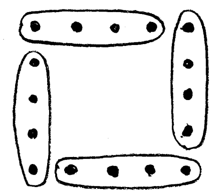
[補] (3) △CEG = △CFG, 点Bを通り、EFに平行な直線と直線AC(①)との交点をIとすれば、
△BGF : △CEG = △IGF : △CFG = IG : CG = (Gのx座標−Iのx座標) : (Gのx座標−Cのx座標)
としても、求まります. (少々、計算がtroublesomeですが…?)

$\boxed{5}$ 右図のように、設問$\boxed{4}$の図の外周だけの黒丸の個数(但し、中央の横線上の黒丸は残る。) S_n を n で表せ



[解] (その1) 三角形の外周について、例えば、4番目の個数 a_4 は  と考えて、$a_4 = 4\times 3$ 個

正方形の外周について、4番目の個数 b_4 は、右のように考えて、$b_4 = 4\times 4$ 個



S_4 は $a_4 + b_4$ からダブルカウントである 5 個を引いて、$S_4 = a_4 + b_4 - 5$ 個

S_n も同じように考えて $S_n = a_n + b_n - (n+1) = n\times 3 + n\times 4 - (n+1)$

$\therefore \underline{S_n = 6n-1 \ (n=1,2,\cdots)}$

(その2) (左右対称性からたて軸方向に数えると中央のたて軸がtroublesome) よこ軸方向に上から数えると、

$S_1 = 1+2+2$, $S_2 = 1+\underbrace{2}_{1項}+3+\underbrace{2}_{1項}+3$, $S_3 = 1+\underbrace{2+2}_{2項}+4+\underbrace{2+2}_{2項}+4$, $S_4 = 1+\underbrace{2+2+2}_{3項}+5+\underbrace{2+2+2}_{3項}+5$,

$S_5 = 1+\underbrace{2+2+2+2}_{4項}+6+\underbrace{2+2+2+2}_{4項}+6$, $\cdots$, $S_n = 1+\underbrace{2+2+\cdots+2+2}_{(n-1)項}+(n+1)+\underbrace{2+2+\cdots+2+2}_{(n-1)項}+(n+1)$

$\therefore n \geqq 2$ のとき $S_n = 1+2(n-1)+(n+1)+2(n-1)+(n+1) = 6n-1$ と考えられる。$S_1 = 6\times 1 - 1 = 5$ であり、最初の $S_1 = 1+2+2 = 5$ に一致する。$\therefore \underline{S_n = 6n-1 \ (n=1,2,\cdots)}$

P.57の(6) $\boxed{4}$ (3) の [解]

(3) $S_n = \dfrac{(n+1)(3n+2)}{2} = 715$,　$(n+1)(3n+2) = 1430$,　左辺 $(n+1)(3n+2)$ は、$n=1,2,\cdots$ と増加するにつれて増加する。$n=19$ のとき $(19+1)(3\times 19+2) = 20\times 59 = 1180$, $n=20$ のとき $(20+1)(3\times 20+2) = 21\times 62 = 1302$, $n=21$ のとき $(21+1)(3\times 21+2) = 22\times 65 = 1430$, $\therefore$ $\underline{21番目の総個数}$
