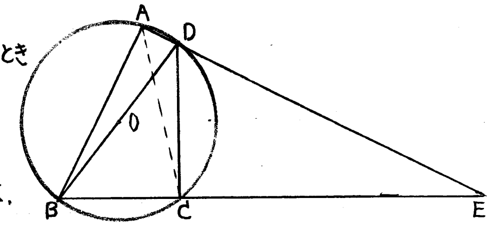
ウイろし

[類] 円(中心O)に内接する四角形ABCDのBDは直径とし、半直線ADと半直線BCの交点をEとする. $BC=CD=2$, $CE=x$ のとき次の問いに答えよ. (1) △ABCの面積が最大となる点Aの位置点A_0を作図せよ. (2) (1)のときの$\triangle A_0BC$の面積S_0とそのときのxの長さを求めよ. (3) 点Eが存在するためのxの範囲を求めよ. (4) △ABCの面積$S(x)$をxの式で表せ.(ここまでは、中3です.)

(高)(5) 関数 $y=S(x)$ を利用して、$S(x)$の最大値S_0.((2)の結果と同じ)を求めよ. ($S(x)=k$とおけ)



(考)統一模試に. $BC=6$, $CE=4$, $CD=3$, のときの△ABCの面積を求めよ、というのがありました.この設問は,(1),(2),の誘導形式になっていましたが,(1),(2)は必要なかったですね. (5)は高校です.

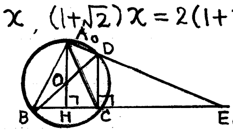
(解) (1) 底辺BCからの高さが最大となる点Aの位置が点A_0. したがって. BCに垂直な円の中心Oを通る直線と円との交点をA_0とすればよい. (作図省略)

(2) $BC=CD=2$, $\angle BCD=90^\circ$だから.直角二等辺三角形BCD ∴直径$BD=2\sqrt{2}$, 半径$\sqrt{2}$, 直線A_0OとBCの交点をHとすれば, $A_0O=\sqrt{2}$(半径), OHは、直角二等辺三角形OHCより $OH=CH=1\ (=BC\times\frac{1}{2})$ ∴ $A_0H=1+\sqrt{2}$

∴ $\triangle A_0BC=\underline{S_0}=BC\times A_0H\times\frac{1}{2}=2\times(1+\sqrt{2})\times\frac{1}{2}=\underline{1+\sqrt{2}}$

$\triangle A_0HE \backsim \triangle DCE_0$より $A_0H:DC=HE_0:CE_0$, $1+\sqrt{2}:2=1+x:x$, $(1+\sqrt{2})x=2(1+x)=2+2x$

$(1+\sqrt{2}-2)x=2$, $\underline{x}=\frac{2}{\sqrt{2}-1}=\underline{2(\sqrt{2}+1)}$



(3) AD∦BCので点Aは限りなく点Dに近付き、点Dのときの点Dにおける接線と半直線BCとの交点をE′とすれば,直角二等辺三角形DBE′となり, $BC=CE'=2$ から、$\underline{x>2}$

(4) 直角三角形ABE ∽ 直角三角形CDE, 相似比 BE : DE である. 三平方の定理より $DE=\sqrt{x^2+4}$ であるから面積比 $BE^2:DE^2=(x+2)^2:x^2+4$ ∴直角三角形ABE=直角三角形CDE × $\frac{BE^2}{DE^2}=\frac{2x}{2}\times\frac{(x+2)^2}{x^2+4}=\frac{x(x+2)^2}{x^2+4}$

$\triangle ABC:\triangle ACE=BC:CE=2:x$, $\triangle ABC:\triangle ABE=BC:BE=2:x+2$ なので

$\triangle ABC=\triangle ABE\times\frac{BC}{BE}=\frac{x(x+2)^2}{x^2+4}\times\frac{2}{x+2}=\underline{\frac{2x(x+2)}{x^2+4}=S(x)\ (x>2)}$

(5) $\frac{2x(x+2)}{x^2+4}=k\ (x>2)$とおく. $k(x^2+4)=2x(x+2)=2x^2+4x$, $(k-2)x^2-4x+4k=0$ ---①

$k=2$のとき $-4x+8=0$, $x=2$ であるが $x>2$ なので $k\neq2$, したがって 2次式①が $x>2$ の範囲に少なくとも1つ実数解をもつ、実数kの範囲を求める. ①の判別式 $\frac{D}{4}\geqq0$ が必要であるから、$4-4k(k-2)\geqq0$, $1-k(k-2)\geqq0$, $k^2-2k-1\leqq0$, $1-\sqrt{2}\leqq k\leqq1+\sqrt{2}$ である. $k=1+\sqrt{2}$ のとき ①が $x>2$ の範囲に解をもてば、最大値 $1+\sqrt{2}$ をとることが必要十分となる. ①に $k=1+\sqrt{2}$ を入れると $(\sqrt{2}-1)x^2-4x+4(1+\sqrt{2})=0$

$x=\frac{2}{\sqrt{2}-1}=2(\sqrt{2}+1)>2$ であるから、確かに①は、$\underline{x=2(\sqrt{2}+1)\text{のとき 最大値}S_0=1+\sqrt{2}}$ をとる.

(補) ①を $k-2\ (\neq0)$ でわって、左辺を $y=x^2-\frac{4}{k-2}x+\frac{4k}{k-2}$ とおいて、グラフを考えてもできます.

$S(x)=\frac{2x(x+2)}{x^2+4}=2+\frac{4(x-2)}{x^2+4}\ (x>2)$ を微分すると、数Ⅲ 理系微積 となります.