中学から高校へのかけはし

医学科及び難関大学を目指す人のために

[illegible]
数学(五十年)・[illegible]
本部 〒920-0864 金沢市高岡町2の23
分室 [illegible]
TEL(〇七六)二三二-八〇六六
携帯 〇九〇-七十四四-五三二〇

新高1 7月末迄の課題 --- テスト形式ならば、120分〜150分(目標60%)

□点 / 80点満点	目標 50点〜55点

1 factorize 有理数の範囲 (3点×4)

(1) $x^3-3x^2y+x^2-10xy^2-3xy-10y^2$　(2) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

(3) $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$　(4) $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)-24$

2 二重根号をはずす (2点×4)　(1) $\sqrt{8-\sqrt{48}}$　(2) $\sqrt{5-\sqrt{21}}$　(3) $\sqrt{21-\sqrt{360}}$　(4) $\sqrt{\frac{11}{3}-\sqrt{8}}$

3 計算 (2点×2)　(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$　(2) $\dfrac{1+i}{(2-3i)(4+i)}$

4 (1点×2) $(x-2)(x-3)(x+4)(x+5)$ の x^2 の係数は□, x の係数は□

5 (4点) $\sqrt{7}$ の小数部分が α のとき $f(\alpha)=\alpha^4+5\alpha^3-\alpha^2-\alpha+2=$□

6 (4点) 1の3乗根 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とするとき $\omega^{2021}+\omega^{1000}-\omega^{301}+\omega-1=$□

7 (1点×5) $x=\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$, $y=\dfrac{1}{3+\sqrt{7}}$ のとき $x+y=$□, $x^2+y^2=$□, $x^4-y^4=$□, $x^5+y^5=$□, $x^7y+xy^7=$□

8 (1点×5) $x-\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$ のとき (1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=$□　(2) $x^2-\dfrac{1}{x^2}=$□　(3) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=$□　(4) $x^3-\dfrac{1}{x^3}=$□　(5) $x^5\pm\dfrac{1}{x^5}=$□

9 (2点×3) $x+y+z=1$, $x^3+y^3+z^3=13$, $xyz=-2$ のとき (1) $xy+yz+zx=$□　(2) $x^4+y^4+z^4=$□　(3) $x^5+y^5+z^5=$□

10 (5点、配点は解にある) ある実数 a,b,c に対して $\dfrac{c}{4a+4b}=\dfrac{a}{4b+4c}=\dfrac{b}{4c+4a}$ が成りたつとき、この式の値を全て求めよ.(記述)

11 (2点×2) 整式 $P(x)=x^4+ax^2+bx+17$ は x^2+3x+4 でわると余りが $-2x+1$ になる. このとき $a=$□, $b=$□, また(完解2点) $P\left(\dfrac{-3+\sqrt{7}i}{2}\right)=$□(2点) となる.

12 (2点×3) 整式 $P(x)$ を $(x-2)^2$ でわったときの余りが $4x-3$ であり、$x+1$ でわったときの余りが -4 とする. このとき $P(x)$ を $(x-2)$ でわった余りは ア, $(x-2)(x+1)$ でわった余りは イ, $(x-2)^2(x+1)$ でわった余りは ウ である.

13 (3点(完解のみ3点)) x についての恒等式 $\dfrac{x}{(x-1)^2(x+1)}=\dfrac{a}{(x-1)^2}+\dfrac{b}{(x-1)}+\dfrac{c}{(x+1)}$ が成り立つとき $a=$□, $b=$□, $c=$□ である.

14 (2点×2) $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{\square}\left(\dfrac{\square}{x(x+1)}-\dfrac{\square}{(x+1)(x+2)}\right)$ が成り立つ(完解のみ2点). よって $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}+\dfrac{1}{4\cdot5\cdot6}+\dfrac{1}{5\cdot6\cdot7}=$□ となる.

15 (5点(完解のみ5点)) x の方程式 $ax=b$ を解け.(記述)

16 (5点(2点+3点)) 3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解を α,β,γ とする. 解と係数の関係を示し(2点)、これを証明せよ(3点).(記述)

[解]

1 (1) 与式 $= -10(x+1)y^2 - 3x(x+1)y + x^2(x+1) = -(x+1)(10y^2+3xy-x^2) = (x+1)(x^2-3yx-10y^2)$
$= \underline{(x+1)(x+2y)(x-5y)}$　(2)と(3)の順をmistakeしました. Perdon me.

(2) 与式 $= (a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3-3abc) - 3abc = (a+b+c)^3 - (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) - 3abc$
$= (a+b+c)\{(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\} - 3abc$
$= (a+b+c)(3ab+3bc+3ca) - 3abc = 3\{(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc\} = \underline{3(a+b)(b+c)(c+a)}$ (∵(3)より)

(3) 与式 $= (a+(b+c))((b+c)a+bc) - bca = (b+c)a^2 + ((b+c)^2+bc)a + bc(b+c) - bca$
$= (b+c)a^2 + (b+c)^2a + bc(b+c) = (b+c)(a^2+(b+c)a+bc) = (b+c)(a+b)(a+c) = \underline{(a+b)(b+c)(c+a)}$
この結果は、暗記するに値する重要な式変形の1つです. 上の(2)で用いました.

(4) 与式 $= (x-1)(x+3)(x-2)(x+4) - 24 = (x^2+2x-3)(x^2+2x-8) - 24 = (x^2+2x)^2 - 11(x^2+2x) + 24 - 24$
$= (x^2+2x)(x^2+2x-11) = \underline{x(x+2)(x^2+2x-11)}$

2 (1) 与式 $= \sqrt{8-2\sqrt{12}} = \underline{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$　(2) 与式 $= \sqrt{\dfrac{10-2\sqrt{21}}{2}} = \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \underline{\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{6}}{2}}$

(3) 与式 $= \sqrt{21-2\sqrt{90}} = \underline{\sqrt{15}-\sqrt{6}}$　(4) 与式 $= \sqrt{\dfrac{11-3\sqrt{8}}{3}} = \dfrac{\sqrt{11-3\cdot2\sqrt{2}}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{11-2\sqrt{18}}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{9}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \underline{\dfrac{3\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}}$

3 (1) 与式 $= \dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})-(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})} - \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \dfrac{2\sqrt{5}}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2} - \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}$
$= \dfrac{2\sqrt{5}}{-2\sqrt{6}} - \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \dfrac{-2\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = -\dfrac{\sqrt{12}+\sqrt{18}+3\sqrt{30}}{12} = \underline{-\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+3\sqrt{30}}{12}}$

(2) 与式 $= \dfrac{1+i}{8+2i-12i-3i^2} = \dfrac{1+i}{11-10i} = \dfrac{(1+i)(11+10i)}{(11-10i)(11+10i)} = \dfrac{11+10i+11i+10i^2}{121+110i-110i-100i^2} = \underline{\dfrac{1+21i}{221}}$

4 与式 $= (x-2)(x+4)(x-3)(x+5) = (x^2+2x-8)(x^2+2x-15) = (x^2+2x)^2 - 23(x^2+2x) + 120$
$= x^4+4x^3+4x^2-23x^2-46x+120 = x^4+4x^3\underline{-19}x^2\underline{-46}x+120$

(別解) こちらの方法が大切.　$\underset{①}{(x-2)}\underset{②}{(x-3)}\underset{③}{(x+4)}\underset{④}{(x+5)}$　x^2の係数は、①,②,③,④ の4つから2つのxを選び、残りは、
定数項を選べばよいから、x^2の係数は、$(-2)(-3)+(-2)(+4)+(-2)(+5)+(-3)(+4)+(-3)(+5)+(+4)(+5) = \underline{-19}$
xの係数は、①,②,③,④ の4つから、1つのxを選んで残りは定数項を選べばよいから、xの係数は、
$(-2)(-3)(+4)+(-2)(-3)(+5)+(-2)(+4)(+5)+(-3)(+4)(+5) = 24+30-40-60 = 54-100 = \underline{-46}$
ついでに、x^3の係数は、$(-2)+(+4)+(-3)+(+5) = 4$

(問) $(x-2)(x-1)(x+2)(x+3)(x+4)$ の xの係数は□, x^2の係数は□, x^3の係数は□, x^4の係数は□,
$(x^2-4)(x^2+7x+12)(x-1) = (x^3-x^2-4x+4)(x^2+7x+12)$ と変形して、xの係数は、$(-4)\cdot(+12)+(+7)\cdot(+4) = \underline{-20}$
x^2の係数は、$(-1)\cdot(+12)+(+1)(+4)+(-4)\cdot(+7) = \underline{-36}$, x^3の係数は $(+1)(+12)+(-1)(+7)+(+1)(-4) = \underline{1}$
x^4の係数は $(+1)(+7)+(-1)(+1) = \underline{6}$, directに$x^2$の係数は $-2, -1, 2, 3, 4$ と並べておいて、${}_5C_3 = \frac{5\cdot4}{2} = 10$通りの異なる3つの積の和 $(-2)(-1)2+(-2)(-1)3+(-2)(-1)4+(-2)\cdot2\cdot3+(-2)\cdot2\cdot4+(-2)\cdot3\cdot4+(-1)\cdot2\cdot3+(-1)\cdot2\cdot4+(-1)\cdot3\cdot4$
$+2\cdot3\cdot4 = 4+6+8-12-16-24-6-8-12+24 = -36$

$\boxed{5}$ $\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$, $2<\sqrt{7}<3$ だから、$\sqrt{7}$ の整数部分は 2, $\therefore \sqrt{7}=2+\alpha$　$7=(2+\alpha)^2=4+4\alpha+\alpha^2$, $\alpha^2+4\alpha-3=0$ ---①

(その1) 割り算実行して、$f(\alpha)=\alpha^4+5\alpha^3-\alpha^2-\alpha+2=(\alpha^2+4\alpha-3)(\alpha^2+\alpha-2)+10\alpha-4$

①より $f(\alpha)=10\alpha-4=10(\sqrt{7}-2)-4=\underline{10\sqrt{7}-24}$ $(\because \alpha=\sqrt{7}-2)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \alpha^2+\alpha-2 \\
\hline
\alpha^2+4\alpha-3 & \alpha^4+5\alpha^3-\alpha^2-\alpha+2 \\
 & \alpha^4+4\alpha^3-3\alpha^2 \\
\cline{2-2}
 & \alpha^3+2\alpha^2-\alpha+2 \\
 & \alpha^3+4\alpha^2-3\alpha \\
\cline{2-2}
 & -2\alpha^2+2\alpha+2 \\
 & -2\alpha^2-8\alpha+6 \\
\cline{2-2}
 & 10\alpha-4
\end{array}
$$

(その2) ①より $\alpha^2=-4\alpha+3$, $\alpha^3=-4\alpha^2+3\alpha=-4(-4\alpha+3)+3\alpha=19\alpha-12$

$\alpha^4=19\alpha^2-12\alpha=19(-4\alpha+3)-12\alpha=-88\alpha+57$

よって $f(\alpha)=(-88\alpha+57)+5(19\alpha-12)-(-4\alpha+3)-\alpha+2=(-88+95+4-1)\alpha+57-60-3+2$

$=10\alpha-4=10(\sqrt{7}-2)-4=\underline{10\sqrt{7}-24}$

(補) $\sqrt{7}=2.64575\cdots$ (菜に虫来ない), $\sqrt{6}=2.44949$ (似よよくよく), $\sqrt{5}=2.2360679\cdots$ (富士山麓オーム鳴く)

$\sqrt{3}=1.7320508\cdots$ (人並におごれや), $\sqrt{2}=1.41421356\cdots$ (人世,人世に人見頃)

割り算実行は,有効です. 次数下げの方法も覚える.

$\boxed{6}$ $\overset{\text{オメガ}}{\omega}=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ は、1の3乗根だから $\omega^3=1$, $\omega^3-1=0$ $(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$, $\omega\neq1$ から $\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^2=-\omega-1$

与式 $=(\omega^3)^{673}\omega^2+(\omega^3)^{333}\omega-(\omega^3)^{100}\omega+\omega-1=\omega^2+\omega-\omega+\omega-1=\omega^2+\omega-1=(-\omega-1)+\omega-1=\underline{-2}$

$\boxed{7}$ $\underline{x+y}=\dfrac{3+\sqrt{7}+3-\sqrt{7}}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}=\dfrac{6}{2}=\underline{3}$, $xy=\dfrac{1}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}=\dfrac{1}{2}$, $\underline{x^2+y^2}=(x+y)^2-2xy=3^2-2\cdot\dfrac{1}{2}=\underline{8}$

$x-y=\dfrac{(3+\sqrt{7})-(3-\sqrt{7})}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}=\dfrac{2\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$, $x^2-y^2=(x+y)(x-y)=3\sqrt{7}$, $\underline{x^4-y^4}=(x^2+y^2)(x^2-y^2)=8\cdot3\sqrt{7}=\underline{24\sqrt{7}}$

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=3\left(8-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{45}{2}$, $\underline{x^5+y^5}=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)=8\cdot\dfrac{45}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot3=180-\dfrac{3}{4}=\underline{\dfrac{717}{4}}$

$\underline{x^7y+xy^7}=xy(x^6+y^6)=\dfrac{1}{2}\left\{(x^3+y^3)^2-2(xy)^3\right\}=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{45}{2}\right)^2-2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\right\}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2025}{4}-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2024}{4}=\underline{253}$

(補) 解と係数の関係より、x, y は、2次式 $t^2-3t+\dfrac{1}{2}=0$ の解である. $x^2=3x-\dfrac{1}{2}$, $y^2=3y-\dfrac{1}{2}$ $(x>y)$

x^n, y^n をそれぞれかけて、$x^{n+2}=3x^{n+1}-\dfrac{1}{2}x^n$, $y^{n+2}=3y^{n+1}-\dfrac{1}{2}y^n$, 辺々たして、$x^{n+2}+y^{n+2}=3(x^{n+1}+y^{n+1})-\dfrac{1}{2}(x^n+y^n)$

辺々引いて、$x^{n+2}-y^{n+2}=3(x^{n+1}-y^{n+1})-\dfrac{1}{2}(x^n-y^n)$　$n=1$ を入れて、$x^3+y^3=3(x^2+y^2)-\dfrac{1}{2}(x+y)=3\cdot8-\dfrac{1}{2}\cdot3=\dfrac{45}{2}$

$x^3-y^3=3(x^2-y^2)-\dfrac{1}{2}(x-y)=3\cdot3\sqrt{7}-\dfrac{1}{2}\sqrt{7}=\dfrac{17\sqrt{7}}{2}$　$n=2$ を入れて $x^4+y^4=3(x^3+y^3)-\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)=3\cdot\dfrac{45}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot8=\dfrac{127}{2}$

$\underline{x^4-y^4}=3(x^3-y^3)-\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)=3\cdot\dfrac{17\sqrt{7}}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot3\sqrt{7}=\underline{24\sqrt{7}}$　$n=3$ を入れて $\underline{x^5+y^5}=3(x^4+y^4)-\dfrac{1}{2}(x^3+y^3)=3\cdot\dfrac{127}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{45}{2}$

$=\dfrac{762}{4}-\dfrac{45}{4}=\underline{\dfrac{717}{4}}$　$n=4$ を入れて $x^6+y^6=3(x^5+y^5)-\dfrac{1}{2}(x^4+y^4)=3\cdot\dfrac{717}{4}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{127}{2}=\dfrac{2151-127}{4}=\dfrac{2024}{4}=506$

$\underline{x^7y+xy^7}=xy(x^6+y^6)=\dfrac{1}{2}\cdot506=\underline{253}$

8 (1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}=(\sqrt{5})^2+2=\underline{7}$

(2) $x+\frac{1}{x}$ の値を求める. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+2=7+2=9$ $\therefore x+\frac{1}{x}=\pm 3$

$x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)=\underline{\pm 3\sqrt{5}}$

(3) $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\pm 3\,(7-1)=\underline{\pm 18}$

(4) $x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\sqrt{5}\,(7+1)=\underline{8\sqrt{5}}$

(5) $x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-x^2\cdot\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}\cdot x^3=7\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=7\left(x+\frac{1}{x}\right)(7-1)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=41\left(x+\frac{1}{x}\right)=41\cdot(\pm 3)=\underline{\pm 123}$

$x^5-\frac{1}{x^5}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)+x^2\cdot\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}\cdot x^3=7\cdot 8\sqrt{5}+\frac{1}{x}-x=56\sqrt{5}-\left(x-\frac{1}{x}\right)=56\sqrt{5}-\sqrt{5}=\underline{55\sqrt{5}}$

(補) $x-\frac{1}{x}=\sqrt{5}$ のとき $x^2-1=\sqrt{5}x$, $x^2-\sqrt{5}x-1=0$, $x=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{5+4}}{2}=\frac{\sqrt{5}\pm 3}{2}$ となり、xの値は2つ存在します.
$\alpha=\frac{\sqrt{5}+3}{2}$, $\beta=\frac{\sqrt{5}-3}{2}$ $(\alpha>0>\beta)$ とおく. $\frac{1}{\alpha}=\frac{2}{\sqrt{5}+3}=\frac{2(\sqrt{5}-3)}{5-9}=-\frac{\sqrt{5}-3}{2}=-\beta$, 同様に $\frac{1}{\beta}=-\alpha$ となる. $\beta=-\frac{1}{\alpha}$, $\alpha=-\frac{1}{\beta}$
解と係数の関係より、$\alpha+\beta=\sqrt{5}=\alpha-\frac{1}{\alpha}=-\frac{1}{\beta}+\beta=\beta-\frac{1}{\beta}$ ということ. $\alpha\beta=-1=\alpha\cdot\left(-\frac{1}{\alpha}\right)=\left(-\frac{1}{\beta}\right)\cdot\beta$ も納得できます.
したがって、この設問は、$x^2-\sqrt{5}x-1=0$ の解を α; β とするとき、$x-\frac{1}{x}=\alpha-\frac{1}{\alpha}=\beta-\frac{1}{\beta}=\sqrt{5}$ のとき (1)は、$\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}$ or $\beta^2+\frac{1}{\beta^2}$ の値を求めよ. すなわち $\alpha^2+(-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$ or $\beta^2+(-\alpha)^2=\beta^2+\alpha^2$ の値を求めよ. (2)は $\alpha+\frac{1}{\alpha}$ or $\beta+\frac{1}{\beta}$ すなわち $\alpha-\beta$ or $\beta-\alpha$ の値を求めよ. ということです. $x+\frac{1}{x}=\pm 3$ と2つの値があることも当然のことです.
$x^5+\frac{1}{x^5}=\alpha^5+\frac{1}{\alpha^5}=\alpha^5+(-\beta)^5=\alpha^5-\beta^5$ or $\beta^5+\frac{1}{\beta^5}=\beta^5+(-\alpha)^5=\beta^5-\alpha^5$ の値を求めよということでした.

9 16の解と係数の関係を利用します. 7の(補)を利用してみます. (別解)の $x^5+y^5+z^5$ のtroublesomeが身にしみます.

(1) $13=x^3+y^3+z^3=(x^3+y^3+z^3-3xyz)+3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$=1\cdot\{(x+y+z)^2-2xy-2yz-2zx-xy-yz-zx\}+3\cdot(-2)=1^2-3(xy+yz+zx)-6=-5-3(xy+yz+zx)$

$\therefore xy+yz+zx=\frac{-5-13}{3}=\underline{-6}$

(2), (3), 解と係数の関係より. 3次式 $t^3-t^2-6t+2=0$ の解が x, y, z である. $x^3=x^2+6x-2$ x^nをかけて.

$x^{n+3}=x^{n+2}+6x^{n+1}-2x^n$ 同様に $y^{n+3}=y^{n+2}+6y^{n+1}-2y^n$, $z^{n+3}=z^{n+2}+6z^{n+1}-2z^n$ 辺々たして.

$x^{n+3}+y^{n+3}+z^{n+3}=(x^{n+2}+y^{n+2}+z^{n+2})+6(x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1})-2(x^n+y^n+z^n)$ --- Ⓣ

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=1^2-2\cdot(-6)=13$

Ⓣに $n=1$ を入れて、$\underline{x^4+y^4+z^4}=(x^3+y^3+z^3)+6(x^2+y^2+z^2)-2(x+y+z)=13+6\cdot 13-2\cdot 1=13\cdot 7-2=\underline{89}$

Ⓣに $n=2$ を入れて、$\underline{x^5+y^5+z^5}=(x^4+y^4+z^4)+6(x^3+y^3+z^3)-2(x^2+y^2+z^2)=89+6\cdot 13-2\cdot 13=89+4\cdot 13=\underline{141}$

(別解) $\underline{x^4+y^4+z^4}=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)=13^2-2\{(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)\}=13^2-2(36+4)=\underline{89}$

$\underline{x^5+y^5+z^5}=(x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3)-(x^2y^3+z^3x^2+x^3y^2+y^2z^3+z^2x^3+y^3z^2)=13^2-\{x^2y^2(x+y)+y^2z^2(y+z)+z^2x^2(z+x)\}$

$=13^2-\{x^2y^2(1-z)+y^2z^2(1-x)+z^2x^2(1-y)\}=13^2-\{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-xyz(xy+yz+zx)\}$

$=13^2-\{(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)-(-2)(-6)\}=169-\{36-2(-2)\cdot 1-12\}=169-28=\underline{141}$

10 $\dfrac{c}{4a+4b}=\dfrac{a}{4b+4c}=\dfrac{b}{4c+4a}=k$ とおく. $c=(4a+4b)k$, $a=(4b+4c)k$, $b=(4c+4a)k$, 辺々たして. $a+b+c=8(a+b+c)k$

$(a+b+c)(8k-1)=0$ が必要である. (i) $a+b+c=0$ のとき $\dfrac{c}{-4c}=\dfrac{a}{-4a}=\dfrac{b}{-4b}=k$ $\therefore k=-\dfrac{1}{4}$ ($a=b=c=0$ ならば与式の分母が0となり不合理)

(ii) $k=\dfrac{1}{8}$ のとき $c=\dfrac{a+b}{2}$, $a=\dfrac{b+c}{2}$, $b=\dfrac{c+a}{2}$, すなわち $a+b=2c$ ---①, $b+c=2a$ ---②, $c+a=2b$ ---③

③より, $c=2b-a$ を①,② に代入 $a+b=2(2b-a)=4b-2a$ $\therefore 3a=3b$, $a=b$, $b+(2b-a)=2a$, $3b=3a$ $\therefore b=a$

$c=a=b$ のとき成立　したがって, 求める値は $\underline{-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8}}$ (値のみは4点, $a=b=c$ の十分が示されない場合−1点という事)

11 右, わり算実行により, $P(x)=(x^2+3x+4)(x^2-3x+a+5)+(b-3a-3)x-4a-3$

余り $(b-3a-3)x-4a-3=-2x+1$ より.

$b-3a-3=-2$ かつ $-4a-3=1$

$\therefore \underline{a=-1}$, $\underline{b}=3a+1=\underline{-2}$

よって $P(x)=(x^2+3x+4)(x^2-3x+4)-2x+1$

$\dfrac{-3+\sqrt{7}i}{2}=\alpha$ とおけば, $-3+\sqrt{7}i=2\alpha$　$2\alpha+3=\sqrt{7}i$, $(2\alpha+3)^2=(\sqrt{7}i)^2$

$4\alpha^2+12\alpha+9=-7$　$4\alpha^2+12\alpha+16=0$　$\therefore \alpha^2+3\alpha+4=0$

$P(\alpha)=(\alpha^2+3\alpha+4)(\alpha^2-3\alpha+4)-2\alpha+1=0-2\alpha+1=-2\cdot\dfrac{-3+\sqrt{7}i}{2}+1=\underline{4-\sqrt{7}i}$

$$
\begin{array}{r}
x^2-3x+(a+5) \\
x^2+3x+4\,\overline{)\,x^4 \qquad +ax^2 \quad +bx \quad +17} \\
x^4+3x^3+4x^2 \qquad\qquad\qquad \\
\hline
-3x^3+(a-4)x^2 \qquad\qquad \\
-3x^3-9x^2-12x \qquad\quad \\
\hline
(a+5)x^2+(b+12)x \qquad \\
(a+5)x^2+(3a+15)x+4a+20 \\
\hline
(b-3a-3)x+(-3-4a)
\end{array}
$$

12 $P(x)=(x-2)^2Q_1(x)+4x-3=(x+1)Q_2(x)-4$　$\therefore P(2)=5$, $P(-1)=-4$ ---①

$P(x)$ を1次式 $\underline{x-2}$ でわった余りは, $P(2)=\underline{5}$

$P(x)$ を2次式 $\underline{(x-2)(x+1)}$ でわった余りは, 高々1次式 $ax+b$ とおけて $P(x)=(x-2)(x+1)Q_3(x)+ax+b$

①より, $P(2)=2a+b=5$, $P(-1)=-a+b=-4$, 辺々引いて $3a=9$　$a=3$, $b=a-4=-1$　$\therefore$ 求める余りは $\underline{3x-1}$

$P(x)$ を3次式 $(x-2)^2(x+1)$ でわった余りは, 高々2次式 ax^2+bx+c であるから $P(x)=(x-2)^2(x+1)Q_4(x)+ax^2+bx+c$

とおけるが, $(x-2)^2$ でわった余りが $4x-3$ だから $ax^2+bx+c=a(x-2)^2+4x-3$ でなければならない.

すなわち $P(x)=(x-2)^2(x+1)Q_4(x)+a(x-2)^2+4x-3$　①より $P(-1)=9a-4-3=-4$　$9a=3$　$\therefore a=\dfrac{1}{3}$

したがって $\underline{(x-2)^2(x+1)}$ でわった余りは, $\dfrac{1}{3}(x-2)^2+4x-3=\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{3}+4x-3=\underline{\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{8}{3}x-\dfrac{5}{3}}$

(別解) $P'(x)=2(x-2)Q_1(x)+(x-2)^2Q_1'(x)+4=2(x-2)(x+1)Q_4(x)+(x-2)^2Q_4(x)+(x-2)^2(x+1)Q_4'(x)+2ax+b$

$P(2)=5=4a+2b+c$, $P(-1)=-4=a-b+c$, $P'(2)=4=4a+b$　これを解けば $a=\dfrac{1}{3}$, $b=\dfrac{8}{3}$, $c=-\dfrac{5}{3}$

13 与恒等式に $(x-1)^2(x+1)$ を両辺にかけて. $x=a(x+1)+b(x-1)(x+1)+c(x-1)^2$ ---㋐ も恒等式

$x=1$ を入れて $1=2a$　$\therefore \underline{a=\dfrac{1}{2}}$, $x=-1$ を入れて $-1=4c$　$\therefore \underline{c=-\dfrac{1}{4}}$, $x=0$ を入れて $0=a-b+c$, $\underline{b}=a+c=\underline{\dfrac{1}{4}}$

(補) 与恒等式に $x=1$, $x=-1$ を代入することは, できませんが, ㋐にすると $x=1$, $x=-1$ を代入してもよいことになり, a, b, c を求めたならば, $x\neq1$, $x\neq-1$ のとき, ㋐の両辺を $(x-1)^2(x+1)$ でわって与恒等式が成り立ちます.

かけなし

14 一般に部分分数に分けるには、例えば $\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}$ のようにおきます。分母が1次式，2次式，3次式 --- ならば、分子は、それぞれ、定数，1次式，2次式，--- とおくということです。次には、恒等式として、a,b,c を求めればよい。a,b,c を求めると $a=\frac{1}{3},b=-\frac{1}{3},c=-\frac{2}{3}$ となり $\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}\right)$ となります。理系微積で用います。この設問の場合には、じっと見つめて、数値をあてはめてみる。次の設問から、変な数値ではない。

$\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\underline{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(x+1)(x+2)}\right)}$　$x=1$ のとき $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)$，$x=2$ のとき $\frac{1}{2\cdot3\cdot4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)$

--- $x=5$ のとき $\frac{1}{5\cdot6\cdot7}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5\cdot6}-\frac{1}{6\cdot7}\right)$　辺々たせば、途中が消えて、求める値は $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{6\cdot7}\right)=\underline{\frac{5}{21}}$

15 (i) $a=0$ のとき $0\cdot x=b$　(ア) $b=0$ ならば、$0\cdot x=0$ だから x は全ての数　(イ) $b\neq0$ ならば x は解なし。

(ii) $a\neq0$ ならば、$x=\frac{b}{a}$

答	$a=0$ かつ $b=0$ ならば x は全ての数 $a=0$ かつ $b\neq0$ ならば、x は解なし，$a\neq0$ ならば $x=\frac{b}{a}$

(補) (ii) は、分子 $b=0$ ならば、x の値が 0 となるだけです。分母 $=0$，分母 $\neq0$ に分けるだけです。

このような設問の場合には、そうでなくても、答はキチンとかきましょう。

16 $\underline{\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}}$ --- Ⓣ

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ の両辺を a でわって（3次式だから $a\neq0$）$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$ この解が α,β,γ だから

$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=(x-\gamma)(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta)=x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x-\gamma x^2+(\gamma\alpha+\beta\gamma)x-\alpha\beta\gamma$

$=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma\ (=0)$　よって、係数比較により、Ⓣ が得られる。

P.37の (14) の (カ) [類2] の (3) です。

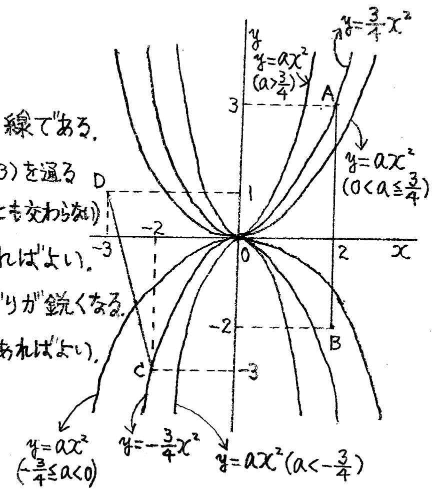
(解) (3) 放物線 $y=ax^2$ ---- ① だから $a\neq0$

(i) $a>0$ のとき ① は、原点を頂点とする、y 軸に対称な下に凸である放物線である。a が大きくなるにつれて、トンガリが鋭くなるから、① が点 A(2,3) を通る a の値のときより、大きくなると、線分 AB と交わらない。(線分 CD とも交わらない)

点 A(2,3) を通るとき $3=4a$ ∴ $a=\frac{3}{4}$ よって $\underline{0<a\leq\frac{3}{4}}$ であればよい。

(ii) $a<0$ のとき、① は、上に凸であり、a が 0 より小さくなるにつれて、トンガリが鋭くなる。

点 C(−2,−3) を通るとき、$-3=4a$ ∴ $a=-\frac{3}{4}$ よって $\underline{-\frac{3}{4}\leq a<0}$ であればよい。



(補) (考) の一般形 $mx-y+n=0$ とすると、(1) は $(3m-2+n)(2m+2+n)\leq0$ かつ $(-2m+3+n)(-3m-1+n)\leq0$ の領域を (m,n) 平面に図示することになります。結果は、勿論 (解) と同じです。

(3) を「線分 AB と交わり、線分 CD とは交わらない a の範囲を求めよ。」とすれば、a の範囲は、どうなるか

(カイ) $a>0$ のとき、点 D(−3,1) を通るときの a の値より大きくて、点 A(2,3) を通るときの a の値以下であればよい。

$1=9a$ ∴ $a=\frac{1}{9}$，$3=4a$ ∴ $a=\frac{3}{4}$ だから $\underline{\frac{1}{9}<a\leq\frac{3}{4}}$

$a<0$ のときは、線分 AB と交わり、線分 CD と交わらないような a の範囲はない。