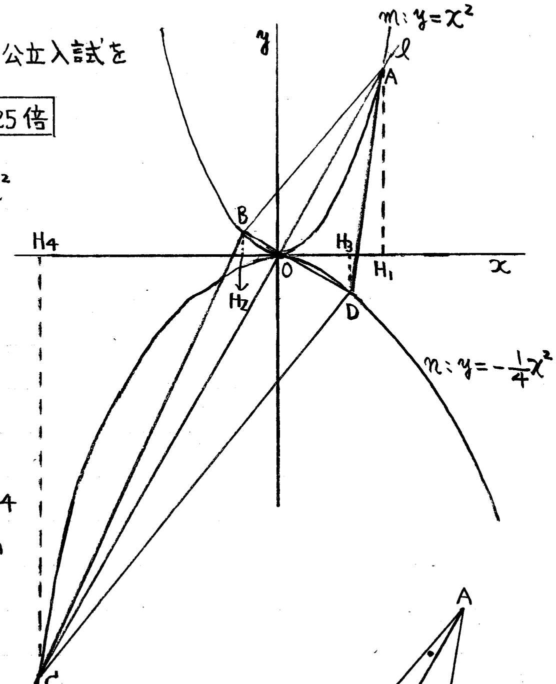
> [2] 直線ℓと放物線m：$y=x^2$がある.直線ℓと放物線mとの2つの交点をA,Bとし,原点をOとする.Aのx座標は,5であり,Bのx座標は,-1である.放物線n：$y=-\frac{1}{4}x^2$について,直線OAと放物線nとの交点のうち,Oでない点をC,直線OBと放物線nとの交点のうちOでない点をDとする.四角形ABCDの面積は,△ABOの面積の何倍か

[考] [1]の事実を知らない人,気付かない人でも,[補]がありますが,公立入試を意識して,[解]としました.

答 25倍



[解] 右図参照 A(5,25), B(−1,1), 直線OA：$y=5x$とn：$y=-\frac{1}{4}x^2$の交点Cのx座標は,$5x=-\frac{1}{4}x^2$, $x\neq0$から$5=-\frac{1}{4}x$,

$x=-20$ ∴C(−20,−100)

直線OB：$y=-x$とn：$y=-\frac{1}{4}x^2$の交点Dのx座標は,

$-x=-\frac{1}{4}x^2$, $x\neq0$から$-1=-\frac{1}{4}x$, $x=4$ ∴D(4,−4)

点A,B,C,Dからx軸へおろした垂線のあしをそれぞれ,点H_1, H_2, H_3, H_4とする.△OAB∽△OCDであることを示す.

OA：OC＝OH_1：OH_4＝5：20＝1：4, OB：OD＝OH_2：OH_3＝1：4

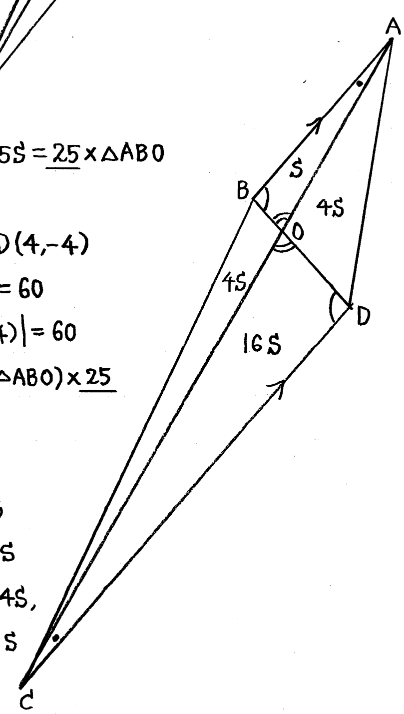
2組の辺の比とその間の角(∠AOB＝∠COD,対頂角)が等しい

∴△OAB∽△OCD,相似比は1：4

右図,△ABO＝S とすれば,相似比1：4より面積比1：16

∴△CDO＝16S, OA：OC＝1：4なので,△OBC＝4S,

△OAD＝△OBC＝4S よって 四角形ABCD＝S＋4S＋4S＋16S＝25S＝25×△ABO



[補] 実際に面積を求めてしまう. A(5,25), B(−1,1), C(−20,−100), D(4,−4)

$\triangle OAB=\frac{1}{2}|1\times5-(-1)\times25|=15$, $\triangle OBC=\frac{1}{2}|(-100)\times(-1)-(-20)\times1|=60$

$\triangle OCD=\frac{1}{2}|(-4)\times(-20)-4\times(-100)|=240$, $\triangle ODA=\frac{1}{2}|25\times4-5\times(-4)|=60$

よって 四角形ABCD＝15＋60＋240＋60＝375＝15×25＝△OAB(△ABO)×25

この三角形の面積については,P.15の(3)参照.

[補] △OAB∽△OCDを示さずに,OA：OC＝OH_1：OH_4＝5：20＝1：4だから

△OAB：△OBC＝OA：OC＝1：4＝S：4S (∵△OAB＝S), △OBC＝4S

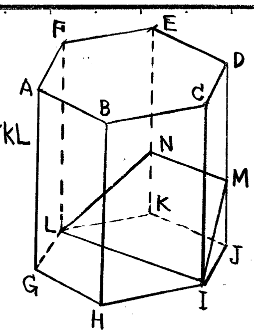
OB：OD＝OH_2：OH_3＝1：4, △OAB：△ODA＝1：4＝S：4S, △ODA＝4S,

△OBC：△OCD＝OB：OD＝OH_2：OH_3＝1：4＝4S：16S, △OCD＝16S

のようにもできますが,----

実際の公立入試でしたら,(1)△OAB∽△OCDを示せ or (1)AB//CDを示せ とかなっていることでしょう.

[類8] 右図のように、底面GHIJKLが1辺4cmの正六角形で、AG＝8cmの正六角柱ABCDEF-GHIJKLがある. 辺DJ上に点Mを、辺EK上に点Nを$DE /\!/ MN$となるようにとる. 立体MN-IJKLの体積が正六角柱ABCDEF-GHIJKLの体積の$\frac{1}{12}$倍になるときDM：MJを最も簡単な整数の比で表しなさい.
なお、途中の計算もかくこと.



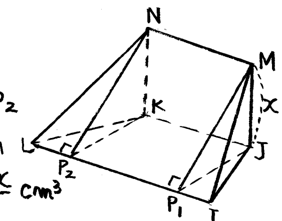
[考] 一見して、切断三角柱です. 頻出です. P.3の(4),(13),(14)など参照

[解] 立体MN-IJKLは、切断三角柱である. この体積をV'とする. ($MJ=x$ cm)
点M、点Nから線分ILへ、それぞれ垂線MP_1, NP_2をおろす. $IL\perp JP_1$, $IL\perp KP_2$でもある※. $\triangle IJP_1$は、30°, 60°, 90°の定三角定規だから、IJ＝4cm より $JP_1=2\sqrt{3}$ cm

$\triangle P_1JM=\frac{2\sqrt{3}x}{2}=\sqrt{3}x$ よって $V'=\triangle P_1JM\times\frac{IL+JK+MN}{3}=\sqrt{3}x\times\frac{8+4+4}{3}=\frac{16\sqrt{3}x}{3}$ cm³

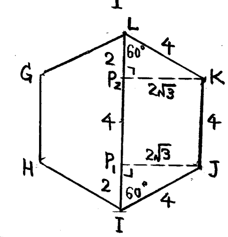
正六角柱の体積 $V=24\sqrt{3}\times8$ cm³　$V'=V\times\frac{1}{12}$ より

$\frac{16\sqrt{3}}{3}x=24\sqrt{3}\times8\times\frac{1}{12}=16\sqrt{3}$　∴ $x=3$　∴ $DM:MJ=8-3:3=5:3$



答 $\boxed{5:3}$

※三垂線の定理より



この底面の面積は
2×台形IJKL
$=2\times\frac{(8+4)\times2\sqrt{3}}{2}=24\sqrt{3}$

[補] $V'=$ 三角柱 ＋ 三角錐 $\times2=\frac{2\sqrt{3}x}{2}\times4+\frac{2\times2\sqrt{3}}{2}\times x\times\frac{1}{3}\times2=4\sqrt{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}x=\frac{16\sqrt{3}}{3}x$
のようにもできますが、切断三角柱の体積の求め方は、是非とも覚えて欲しい.

紙面が余りましたので、次の[問]をどうぞ (作図は、なるべく正確になるような方法を用いて!)

[問] 長さ3cmの線分ABは、A ―――――― B である.

(1) 一辺の長さAB＝3cmの正六角形ABCDEFを作図せよ. 正六角形の面積を求めよ. ACの長さを求めよ.

(2) 一辺の長さAB＝3cmの正八角形ABCDEFGHを作図せよ. 正八角形の面積を求めよ. ACの長さを求めよ.

[カイ] (1) 作図：正三角形ABOをかき、Oを中心とする半径OA(OB)の円をかき、AO, BOの延長線と円との交点をそれぞれ、点D、点Eとする. Aを中心、半径ABの円をかき、円Oとの交点F, FOを延長し、円Oとの交点C. 正六角形ABCDEF.

(2) 作図：ABの垂直二等分線ℓをかく. ABの中点Mを中心とする半径MA(MB)の円とℓとの交点をO'とする. (左回りの$\triangle ABO'$は、$\angle BO'A=90°$の直角二等辺三角形) O'を中心とし、半径$O'A(O'B)$の円をかき、ℓとの交点をOとする.
(左回りの$\triangle ABO$は、円周角と中心角の関係より、$\angle BOA=\angle BO'A\times\frac{1}{2}=90°\times\frac{1}{2}=45°$の二等辺三角形) AO, BOの延長線と、円Oとの交点をそれぞれE, Fとする. Bを中心とし、半径BAの円をかき、円Oとの交点をCとする. Eを中心とし、半径EFの円をかき円Oとの交点をDとする. CO, DOの延長線と円Oとの交点をそれぞれG, Hとする.
正八角形ABCDEFGHとなる.

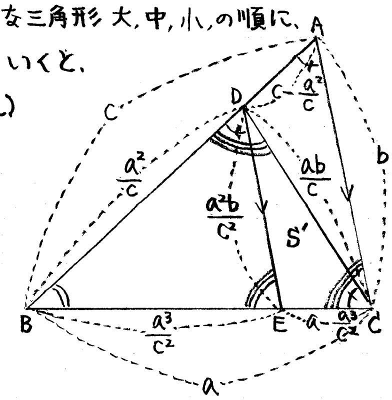
(1) 面積 ＝ 正三角形ABO×6 $=(3\times\frac{\sqrt{3}}{2})\times3\times\frac{1}{2}\times6=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times9=\frac{27\sqrt{3}}{2}$, $AC=(3\times\frac{\sqrt{3}}{2})\times2=3\sqrt{3}$

(2) 面積について $O'A(O'B)=OO'=AB\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$, $MO'=MA(MB)=\frac{3}{2}$, $OM=\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}$, 面積 $=\triangle OAB\times8=\left(3\times(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2})\right)\times\frac{1}{2}\times8$
$=12\times(\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{2})=18(\sqrt{2}+1)$, $AC=\sqrt{2}\times OA=\sqrt{2}\times\sqrt{(\frac{3}{2})^2+(\frac{3\sqrt{2}+3}{2})^2}=\sqrt{2}\times\frac{3}{2}\sqrt{1+(\sqrt{2}+1)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{4+2\sqrt{2}}=3\sqrt{2+\sqrt{2}}$

※正方形から、4つの直角二等辺三角形をひく. ACも、正方形を利用して求まるが、上は、作図を利用した[カイ]です.

[類1] △ABCは、BC＝a、CA＝b、AB＝c であり、次のような点D、点E をそれぞれ辺AB、辺BC上にとれるような△ABC である。∠BAC＝∠BCD＝∠BDE、このとき、BD、BE、CD、CE、DA、DE の長さをそれぞれ a、b、c で表せ。(まず、作図すること)

(考) 作図するには、∠A＜∠C であることが必要です。AC∥DE、3つの相似な三角形 大、中、小、の順に、辺をかくと、順に、長さが求まっていきます。(解)のように、辺をかいていくと、わかりやすいです。Hurry and steady wins the race.(急がば回れ)



(解) 右図より、△ABC∽△CBD∽△DBE

△ABC	∽	△CBD	∽	△DBE
AB＝c		CB＝a		DB＝$\frac{a^2}{c}$ (BD)
BC＝a		BD＝$\frac{a^2}{c}$		BE＝$\frac{a^3}{c^2}$
CA＝b		DC＝$\frac{ab}{c}$ (CD)		ED＝$\frac{a^2b}{c^2}$ (DE)

答: BD＝$\frac{a^2}{c}$、BE＝$\frac{a^3}{c^2}$
CD＝$\frac{ab}{c}$、CE＝$a-\frac{a^3}{c^2}$
DA＝$c-\frac{a^2}{c}$、DE＝$\frac{a^2b}{c^2}$

AB：CB＝BC：BD より $c:a=a:$BD、$c\times$BD＝a^2 ∴BD＝$\frac{a^2}{c}$　　DA＝$c-\frac{a^2}{c}$
AB：CB＝CA：DC より $c:a=b:$DC、$c\times$DC＝ab ∴DC＝CD＝$\frac{ab}{c}$
AB：DB＝BC：BE より $c:\frac{a^2}{c}=a:$BE、$c\times$BE＝$\frac{a^3}{c}$ ∴BE＝$\frac{a^3}{c^2}$　　CE＝$a-\frac{a^3}{c^2}$
AB：DB＝CA：ED より $c:\frac{a^2}{c}=b:$ED、$c\times$ED＝$\frac{a^2b}{c}$ ∴ED＝DE＝$\frac{a^2b}{c^2}$

(問) △CDEの面積をS′、△ABCの面積をSとすると、S＝$\square\times$S′

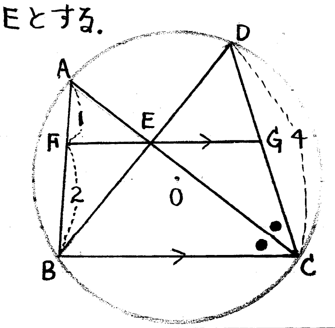
(カイ.1) S′：△CDB＝CE：BC＝$\left(a-\frac{a^3}{c^2}\right):a=(ac^2-a^3):ac^2=(c^2-a^2):c^2$ ---①
△CDB：S＝BD：AB＝$\frac{a^2}{c}:c=a^2:c^2$ ---②
①より $(c^2-a^2)\times$△CDB＝$c^2\times$S′ ---①′　②より $c^2\times$△CDB＝$a^2\times$S ---②′
①′、②′より △CDB＝$\frac{c^2}{c^2-a^2}\times$S′＝$\frac{a^2}{c^2}\times$S、両辺に $\frac{c^2}{a^2}$ をかけて S＝$\frac{c^4}{a^2(c^2-a^2)}\times$S′
(∠A＜∠C なので $c>a>0$、$c^2>a^2$)

(カイ.2) △ABC∽△DBE 相似比AB：DB＝$c:\frac{a^2}{c}=c^2:a^2$ なので面積比 S：△DBE＝$c^4:a^4$
$a^4\times$S＝$c^4\times$△DBE ----①　△DBE：△CDE＝BE：CE＝$\frac{a^3}{c^2}:\left(a-\frac{a^3}{c^2}\right)=a^3:(ac^2-a^3)=a^2:(c^2-a^2)$
△DBE：S′＝$a^2:(c^2-a^2)$　$a^2\times$S′＝$(c^2-a^2)\times$△DBE ---②
①、②より △DBE＝$\frac{a^4}{c^4}\times$S＝$\frac{a^2}{c^2-a^2}\times$S′、両辺に $\frac{c^4}{a^4}$ をかけて S＝$\frac{c^4}{a^4}\times\frac{a^2}{c^2-a^2}\times$S′＝$\frac{c^4}{a^2(c^2-a^2)}\times$S′

(更に問) BC＝4、CA＝5、AB＝6 のとき、△DBEの面積Sを求めよ。

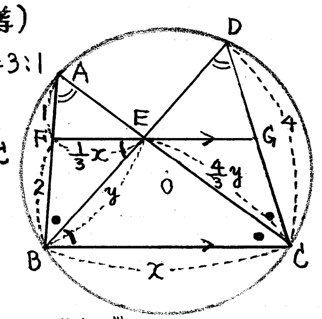
(カイ) $l=\frac{4+5+6}{2}=\frac{15}{2}$、△ABC＝$\sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}-4\right)\left(\frac{15}{2}-5\right)\left(\frac{15}{2}-6\right)}=\sqrt{\frac{15}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$ (ヘロンの公式)
BC＝a、CA＝b、AB＝c とおいて、上の(解)ようにかいて、△ABC∽△DBE 相似比AB：DB＝$c:\frac{a^2}{c}=c^2:a^2$
面積比 $c^4:a^4$　よって S＝△ABC$\times\frac{a^4}{c^4}=\frac{15\sqrt{7}}{4}\times\frac{4^4}{6^4}=\frac{15\sqrt{7}}{4}\times\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{15\sqrt{7}\cdot4}{3^2\cdot3^2}=\frac{5\sqrt{7}\cdot4}{3\cdot9}=\frac{20\sqrt{7}}{27}$

[類5]'右図のように△ABCと△BCDが円Oに内接している. ACとBDの交点をEとする.
線分ACは,∠BCDを2等分している. 点Eを通り, BCに平行な直線とAB, CDとの交点をそれぞれ点F, 点Gとする. AF=1, FB=2, DC=4のときBCの長さを求めよ. [解]は,いろいろとできますが,最速を考えよ.



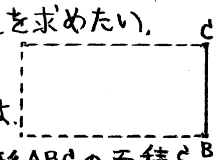
[考] いろいろな解き方が考えられますが, BC=x がからむ相似な三角形2組を利用するのが定石です.
補助線はなるべくひかない. 未知数は,多くて3つ x, y, z. 条件分析をします. (I) 円に内接. (II) ∠ACB=∠ACD, (III) BC//FG. まず,(II),(III)より等しい角に印をつける. 次に(I)円周角の定理より角をうつす. 角に印をつけるときに,どの角にもつけるものではありません. 目標は, BC=x がからむ相似な三角形を見つけること. 見つけ出す三角形には,与えられてある辺の長さ1, 2, 4がからまねばなりません. まず,△ABE∽△DCEは,角をうつす前に皆さん考えることでしょう. 角に印をつけると, 2角が等しい2つの三角形どれでしょうか. 私には,△BCE∽△EBFが見えてきます. この2組の相似な三角形を用いてみようとなりました. BC=x, BE=y, CE=z, zをもうけずに,△ABE∽△DCE 相似比3:4から $z=\frac{4}{3}y$ ですから,この条件を入れてしまって, CE=$\frac{4}{3}y$ とおいておくかということになりました. FEは, BC//FG, AF=1, FB=2 から FE=BC×$\frac{1}{3}=\frac{x}{3}$. (△ABC∽△AFE, 相似比 AB:AF=3:1)

[解] BC//FGより∠CBE=∠BEF(錯角), 円周角の定理より∠ACD=∠ABD (=∠ACB ∵条件)
△BCE∽△EBF (∵上行のことより, ∠ECB=∠FBE, ∠CBE=∠BEF 2角相等)
BC=x, BE=y とおく. BC//FEより△ABC∽△AFE, 相似比 AB:AF=3:1 だから EF=BC×$\frac{1}{3}=\frac{1}{3}x$, △ABE∽△DCE (∵円周角の定理より, ∠ABE=∠DCE, 対頂角より∠AEB=∠DEC, 2角相等) より BE:CE=AB:DC =3:4, ∴ y:CE=3:4, CE=$\frac{4}{3}y$
△BCE∽△EBF (BC, CE, EB)=($x, \frac{4}{3}y, y$), (EB, BF, FB)=($y, 2, \frac{1}{3}x$)
CE:BF=EB:FB より $\frac{4}{3}y:2=y:\frac{1}{3}x$, $\frac{4}{3}y\times\frac{1}{3}x=2y$
両辺をyでわって $\frac{\cancel{4}^{2}}{9}x=\cancel{2}^{1}$ ∴ $\underline{x=\frac{9}{2}}$ (各辺の比より, $\frac{4}{3}y:y=2:\frac{1}{3}x$ ですが相似比をかけば,このようにかきます.)



[補] この問いは「BCの長さのみを求めよ」です. いろいろな解のうち,どれが最速か. を問われる設問でした. 他に最速ありますか? 高校入試の良問です. 平行条件BC//FGをどのように捉えるかが大切でした.
[問] 最速でAEの長さを求めよ. [答$\sqrt{3}$] (図は,自分でかいて下さい)
(カイ) AE=xとおく. BC//FE, AF:FB=1:2より EC=2x, △AEB∽△DECより AE:DE=AB:DC ⇔ x:DE=3:4
DE=$\frac{4}{3}x$, △AEF∽△DCE (∵∠AEF=∠CEG=∠ECB=∠DCE, 円周角より∠EAF=∠CDE 2角相等) より
AE:DC=AF:DE ⇔ $x:4=1:\frac{4}{3}x$, $\frac{4}{3}x^2=4$, $\frac{1}{3}x^2=1$, $x^2=3$, ∴ $x=\sqrt{3}$=AE
(補) EC=2xは,必要なかったということですが, △AEF∽△DCEを利用する以上,かいておこうということでした.

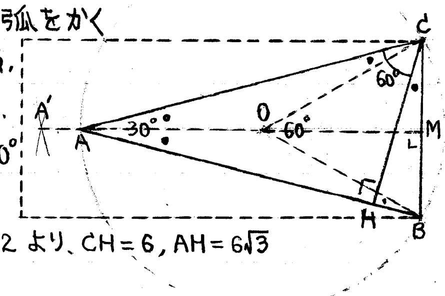
[類4] (1) $x^2=2-\sqrt{3}$ をみたす $x=\pm\sqrt{2-\sqrt{3}}$ であるが、この二重根号をはずして、xの値を求めたい。
$\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $a>b>0$, とおいて、a, b の値を求め、xの値を求めよ。
(2) $AB=AC$, 底角$\angle B=\angle C=75^\circ$ である二等辺三角形ABCを波線部内に作図せよ。
(3) (2)でかいた二等辺三角形ABCのとき、$AB=AC=12$ とする。(ア)二等辺三角形ABCの面積Sを求めよ、(イ)BCの長さを求めよ。



[解] (1) $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ $(a>b>0)$ の両辺を2乗する。$2-\sqrt{3}=(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2=(a+b)-2\sqrt{ab}=(a+b)-\sqrt{4ab}$
$a+b=2$ ---①, $4ab=3$ ---② とおいてよい※。①より $b=2-a>0$ を②に代入 $4a(2-a)=3$,
$8a-4a^2=3$, $4a^2-8a+3=0$ ---③　$b=2-a$ を条件 $a>b>0$ に代入 $a>2-a>0$ ∴$1<a<2$
③より $a^2-2a+\frac{3}{4}=0$, $(a-1)^2-1+\frac{3}{4}=0$, $(a-1)^2=\frac{1}{4}$, $a-1=\pm\frac{1}{2}$ ∴$a=\frac{3}{2}$ or $a=\frac{1}{2}$ であるが、
$1<a<2$ より $\underline{a=\frac{3}{2}}$, $\underline{b}=2-a=\underline{\frac{1}{2}}$ ∴$\underline{x}=\pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\pm\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)=\underline{\pm\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)}$

(補) とにかく、③を解の公式で解いて、$(a,b)=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ を求め、$a>b>0$ をみたす $(a,b)=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ としてもよいですが、高校での勉強を考えて、解のように、$1<a<2$ としました。2次式は、平方完成の方が、わかりやすい場合もあります。※①,②とおいていい理由は、本格的には、高校です。$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $a>b>0$

(2) 正三角形OBCをかき、点Oを中心として、半径OB(=OC)の円弧をかく
適当な半径で、点B、点Cを中心に円弧をかき交点をA'とする。
直線$A'O$と先にかいた円弧との交点をAとし、辺BCとの交点を、
Mとする。(点MはBCの中点)。円周角$\angle A=$中心角$\angle BOC\times\frac{1}{2}=30^\circ$



(3) (ア) 点Cから辺ABに垂線CHをおろす。30°, 90°, 60°の
直角三角形AHCの辺の比 $AC:CH:AH=2:1:\sqrt{3}$, $AC=12$ より、$CH=6$, $AH=6\sqrt{3}$
よって $\triangle ABC=\underline{S}=AB\times CH\times\frac{1}{2}=12\times 6\times\frac{1}{2}=\underline{36}$

(イ) $\underline{BC=l}$ とする。直角三角形BCH∽直角三角形BAM より $BC:BA=BH:BM$, $l:12=(12-6\sqrt{3}):\frac{l}{2}$
$\frac{l^2}{2}=12(12-6\sqrt{3})=12\times 6(2-\sqrt{3})$, $l^2=12^2(2-\sqrt{3})$ ∴$\underline{l}=12\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}=\underline{6(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$ (∵(1)より)

(別解1) 直角三角形BCHに三平方の定理を用いる。$BC^2=6^2+(12-6\sqrt{3})^2=6^2+6^2(2-\sqrt{3})^2$
$=6^2\{1+(2-\sqrt{3})^2\}=6^2(1+7-4\sqrt{3})=6^2\times 4(2-\sqrt{3})=12^2(2-\sqrt{3})$ ∴$BC=12\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}=6(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ ((1)より)

(別解2) $BC=l$ とする。直角三角形ABMに三平方の定理を用いる。$OM=\frac{\sqrt{3}}{2}l$, $OB=OA=l$
$12^2=\left(\frac{l}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}l+l\right)^2=\frac{1}{4}l^2+\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)^2l^2$, $12^2\times 4=l^2\{1+(\sqrt{3}+2)^2\}=l^2(1+7+4\sqrt{3})=l^2(8+4\sqrt{3})$
$l^2=\frac{12^2\times 4}{4(2+\sqrt{3})}=\frac{12^2}{2+\sqrt{3}}=12^2(2-\sqrt{3})$, $\underline{l}=12\sqrt{2-\sqrt{3}}=12\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}=\underline{6(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$ (∵(1)より)

[補] 二重根号については、P.37の(7)下参照

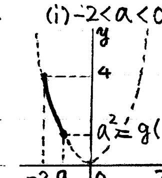
定義域と値域（1次関数と2次関数の値域が一致するなど----）

1 (1) 定義域 $-2 \leqq x \leqq a\ (a>-2)$ のとき1次関数 $y=px+q\ (p \neq 0)$ の値域を求めよ
(2) 定義域 $-2 \leqq x \leqq a\ (a>-2)$ のとき2次関数 $y=x^2$ の値域を a で場合わけして求めよ
(3) 定義域 $-2 \leqq x \leqq a\ (a>-2)$ のとき1次関数 $y=2x+4$ と2次関数 $y=x^2$ の値域が一致するような a の値を求めよ
(4) 定義域 $-2 \leqq x \leqq a\ (a>-2)$ のとき、2次関数 $y=x^2$ の値域は $0 \leqq y \leqq b$ であり、1次関数 $y=2x+3$ の値域は、$-1 \leqq y \leqq c$ である. $b=c$ となる a の値を求めよ.

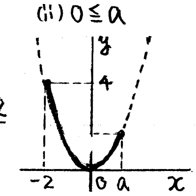
[考] x に定義域があるとき、x で表わされた関数 y の値域とは、定義域内の y の最小値を下限として、y の最大値を上限としたものです. すなわち、値域は、y の最小値 $\leqq y \leqq$ y の最大値です.
y が x の関数のとき $y=f(x)$, $y=g(x)$ --- などとかきます. 例えば、$y=f(x)=px+q\ (p \neq 0)$ ならば、$x=-2$ のときの y の値は、$y=f(-2)=p \times (-2)+q=-2p+q$, $y=g(x)=x^2$ ならば、$x=-2$ のとき $y=g(-2)=(-2)^2=4$, $x=a$ ならば、$y=g(a)=a^2$, $x=a+1$ ならば、$y=g(a+1)=(a+1)^2$, x に $x-1$ を入れて、$y=g(x)=x^2$ と異なる関数 $y=u(x)=g(x-1)=(x-1)^2$ などとかきます.（この場合、$y=u(x)=(x-1)^2$ は $y=g(x)=x^2$ を x 軸方向に $+1$ 平行移動したグラフ）

(1) $p>0$ と $p<0$ で場合わけ. (2) $y=g(x)=x^2$ は、y 軸対称なグラフです. $x=a$ の位置によって最小値, 最大値が違ってきます. 最小値だけを見ると、$-2 \leqq x < 0$ のとき y は、減少です.（x が大きくなるにつれて y は小さくなるということ）したがって (i) $-2<a<0$ のとき、最小値 m は、$m=g(a)=a^2$ で表すことができます. m は a の関数となりました. $a=-\frac{1}{2}$ のときは、定義域は、$-2 \leqq x \leqq -\frac{1}{2}$ となり、最小値は $g(-\frac{1}{2})=(-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{3}$ のときは、定義域は、$-2 \leqq x \leqq -\frac{2}{3}$ となり、最小値は、$g(-\frac{2}{3})=(-\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$ という具合です. すなわち、$-2<a<0$ のときは、定義域 $-2 \leqq x \leqq a$ での $y=g(x)=x^2$ の最小値 m は、常に、$m=g(a)=a^2$ で表すことができるということです. (ii) $0 \leqq a$ のときは、y の最小値は、常に 0 であり、最小値 $m=g(0)=0$ です. 最小値 m のグラフを、たて軸 m, よこ軸 a でかけば、右, 最下段のグラフとなります.

(i) $-2<a<0$

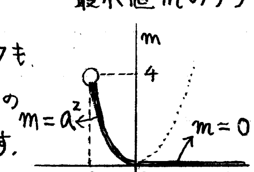


(ii) $0 \leqq a$

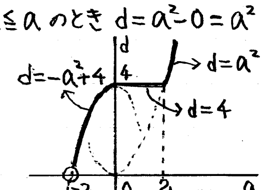


$-2 \leqq x \leqq a$ のときの最大値 M は、$y=g(x)=x^2$ のグラフ（y 軸対称）から、(i) $-2<a \leqq 2$ のときは、常に、$M=4$ となります. (ii) $2<a$ となると $M=g(a)=a^2$ です. (i), (ii) の場合わけの等号については、条件の $a>-2$ のとき以外は、全てにつけて OK です. (i) $-2<a \leqq 2$ (ii) $2 \leqq a$ です. 最小値も同じです. よこ軸 a の m のグラフも、M のグラフも必ず連続となるからです. すると、値域については、a の値が、$-2, 0, 2$ の3つの値で場合わけして、求めることになります. 最大値 M のグラフも、最小値 m のグラフと同一平面に描くとよくわかります. try! それでは、値域の幅 $d=$ 最大値 $-$ 最小値は、どのような a の関数となるでしょうか. 次のようです.
(i) $-2<a \leqq 0$ のとき $d=4-a^2$, (ii) $0 \leqq a \leqq 2$ のとき $d=4$, (iii) $2 \leqq a$ のとき $d=a^2-0=a^2$
このグラフは、右のようになります.

最小値 m のグラフ



白丸を除く



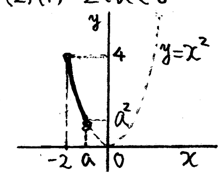
白丸を除く

[考] (3) 1次関数 $y=2x+4$ の値域は、最小値 $2\times(-2)+4=0$, 最大値 $2a+4$ から $0 \leqq y \leqq 2a+4$ ---① です。
2次関数 $y=x^2$ の値域は、(2)の[考]でのべたように、(i) $-2<a<0$ のときは、$(0<)\ a^2 \leqq y \leqq 4$ ---② です
したがって (i) $-2<a<0$ のとき ①, ② が一致することはありません。(ii) $0 \leqq a \leqq 2$ のとき、$y=x^2$ の最小値は 0, 最大値は 4, (iii) $2<a$ のとき $y=x^2$ の最小値は 0, 最大値は a^2

(4) $b=c$ だから「定義域 $-2 \leqq x \leqq a$ のとき $y=x^2$ の最小値は 0, 最大値 b, $y=2x+3$ の最小値 -1, 最大値 b」(3)との違いは、値域が同じではなく、最大値だけが同じということです。

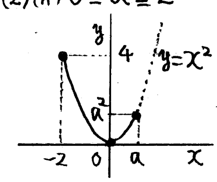
[解] (1) $y=f(x)=px+q\ (p \neq 0)$ とおく。(i) $p<0$ のとき、右肩下がり(減少)の直線だから、値域は、
$f(a) \leqq y \leqq f(-2)$ $\therefore\ ap+q \leqq y \leqq -2p+q$ (ii) $p>0$ のとき、右肩上がり(増加)の直線だから、
値域は $f(-2) \leqq y \leqq f(a)$ $\therefore\ -2p+q \leqq y \leqq ap+q$

(2)(i) $-2<a<0$



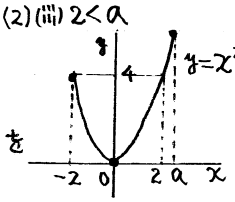
(2) $y=f(x)=x^2$ とおく。(i) $-2<a<0$ のとき $f(a) \leqq y \leqq f(-2)$ $\therefore\ a^2 \leqq y \leqq 4$
(ii) $0 \leqq a \leqq 2$ のとき $f(0) \leqq y \leqq f(-2)$ $\therefore\ 0 \leqq y \leqq 4$
(iii) $2<a$ のとき $f(0) \leqq y \leqq f(a)$ $\therefore\ 0 \leqq y \leqq a^2$

(2)(ii) $0 \leqq a \leqq 2$



(3) $y=f(x)=2x+4$, $y=g(x)=x^2$ とおく。
(i) $-2<a<0$ のとき $f(-2) \leqq y \leqq f(a)$, $g(a) \leqq y \leqq g(-2)$ これが一致するから、
$f(-2)=g(a)$. $0=a^2$. $a=0$ これは、(i) $-2<a<0$ に不適※
(ii) $0 \leqq a \leqq 2$ のとき $f(-2) \leqq y \leqq f(a)$, $g(0) \leqq y \leqq g(-2)$ これが一致するから
$f(-2)=g(0)=0$, $f(a)=g(-2) \Leftrightarrow 2a+4=4$ $\therefore\ a=0$ 適する
(iii) $2<a$ のとき $f(-2) \leqq y \leqq f(a)$, $g(0) \leqq y \leqq g(a)$ これが一致するから、
$f(-2)=g(0)=0$, $f(a)=g(a) \Leftrightarrow 2a+4=a^2$, $a^2-2a-4=0$, $a=1\pm\sqrt{5}$
$a=1-\sqrt{5}<0$ は $2<a$ のときに不適 $a=1+\sqrt{5}>2$ は適する。$\therefore\ a=1+\sqrt{5}$
※(i) $-2<a \leqq 0$ とすれば、適することになります。(ii) $0 \leqq a \leqq 2$ のときに等号 $0=a$ をつけたので、(ii)の方で $a=0$ は適します。

(2)(iii) $2<a$



(4) $y=f(x)=2x+3\ (-2 \leqq x \leqq a)$ の最小値は $f(-2)=-1$, 最大値は $f(a)=2a+3=c=b$ ----①
$y=g(x)=x^2\ (-2 \leqq x \leqq a)$ の最小値が $0=g(0)$ なので、$a \geqq 0$ でなければならない
(i) $0 \leqq a \leqq 2$ のとき、最大値 $g(-2)=4$ これが ① に等しいとき $2a+3=b=4$, $a=\frac{1}{2}$ 適する。
(ii) $2<a$ のとき 最大値 $g(a)=a^2$ これが ① に等しいとき $2a+3=b=a^2$, $a^2-2a-3=0$,
$(a-3)(a+1)=0$, $a=3$ or $a=-1$ であるが (ii) $2<a$ より $a=3$, $b=9$

答	
答	(1) $p<0$ のとき $ap+q \leqq y \leqq -2p+q$, $p>0$ のとき $-2p+q \leqq y \leqq ap+q$ (2) (i) $-2<a<0$ のとき $a^2 \leqq y \leqq 4$, (ii) $0 \leqq a \leqq 2$ のとき $0 \leqq y \leqq 4$ (iii) $2<a$ のとき $0 \leqq y \leqq a^2$ (3) $a=0,\ 1+\sqrt{5}$　(4) $a=\frac{1}{2},\ 3$

平方数となるnの値 5 については、詳しい説明と(問)があります。P.61の(3)〜(7)

偏差値72以上の高校(大学は62以上)を目標とする人は、得点65%以上が欲しいです。

1 (1) $4-\sqrt{17}$ と $3-\sqrt{10}$ の大小を定めよ

(2) (ア) 56 と 24 をそれぞれ素因数分解せよ

(イ) 2^{56} と 5^{24} の大小を定めよ

2 $(a+b)^2-4ab+2a-2b=4$ ---① , $a<b$ ---② のとき $a-b$ の値を求めよ

3 一辺の長さ4の正四角錐O-ABCDの辺OA,辺BCのそれぞれの中点をM,Nとする.

(1) 正四角錐O-ABCDの表面積Sを求めよ.

(2) 正四角錐O-ABCDの体積Vを求めよ.

(3) 線分MNの長さlを求めよ

4 $\triangle ABC(\angle A=45^\circ, \angle B=60^\circ, AB=2)$ の$\angle A$を3等分する直線をひき、辺BCとの交点を点Bから近い順にそれぞれ、点D、点Eとする. (1) ADの長さを求めよ. (2) $\triangle ABD$の面積Sを求めよ.

5 (1) 6をたしても、ひいても平方数となるような整数nを求めよ.

(2) 自然数kをたしても、ひいても平方数となるような整数nが存在するとき、自然数kは、偶数，奇数のいずれか一方のときとなるが、自然数kは、偶数でなければならないことを証明せよ.

注、kは自然数でなくて、単に整数とかいても同じことになります. because 同じ整数kをたす、ひく.

[考] 1 $a>b$ を示すとき $a-b=$ ---->0 を示せばよい. 特別に $a>0, b>0$ のとき $\frac{a}{b}=$ ---->1 を示してもよい. (1)はどちらも負の数です,かき方をどうしますか？下に例 (2) $\frac{a}{b}>1$ が使えます.

2 $a-b$の値があるということですから $b=0$ とおいて $a<0$, $a^2+2a-4=0$ をみたすaの値ということですが、$a-b=x<0$ とおいてxだけの式にできます. または、$b=a-x$ $(a=b+x)$ を代入.

3 (1),(2) 定番です. (3) 線分MNを含む平面で切ることを考えます.

4 定三角定規が基本です. 図をきれいにかく. (1),(2) 解法はいろいろとありますが------

5 平方数の定義　$x=m^2$, かつmは整数で表わされる整数xを平方数という. このとき$x=m^2\geqq 0$. xは非負整数(負でない整数), 目標がxを求めることならば、mは非負整数とおいてよい.

1 の(1)の例 $\sqrt{5}-\sqrt{6}$ と $\sqrt{6}-\sqrt{7}$ の大小を調べよ.

(カイ) $\sqrt{5}-\sqrt{6}<\sqrt{6}-\sqrt{7} \Leftrightarrow 0<\sqrt{5}+\sqrt{7}<2\sqrt{6} \Leftrightarrow (\sqrt{5}+\sqrt{7})^2<(2\sqrt{6})^2 \Leftrightarrow 12+2\sqrt{35}<24 \Leftrightarrow 2\sqrt{35}<12$

$\Leftrightarrow \sqrt{35}<6 \Leftrightarrow 35<36$ 成立 $\therefore \sqrt{5}-\sqrt{6}<\sqrt{6}-\sqrt{7}$

もしも $\sqrt{5}-\sqrt{6}>\sqrt{6}-\sqrt{7}$ とするならば、同じようにかいて $\Leftrightarrow 35>36$ となり、不成立ですからはじめの仮定が間違っていることになります.

[解]

$\boxed{1}$ (1) $4-\sqrt{17}<3-\sqrt{10} \Leftrightarrow 0<1+\sqrt{10}<\sqrt{17} \Leftrightarrow (1+\sqrt{10})^2<(\sqrt{17})^2 \Leftrightarrow 11+2\sqrt{10}<17 \Leftrightarrow 2\sqrt{10}<6 \Leftrightarrow \sqrt{10}<3 \Leftrightarrow 10<9$

これは、成立しない。はじめの $4-\sqrt{17}<3-\sqrt{10}$ が間違いであった。上の計算から $4-\sqrt{17} \neq 3-\sqrt{10}$ は、自明。$\therefore \underline{4-\sqrt{17}>3-\sqrt{10}}$

(2) (ア) $56=8\times7=\underline{2^3\times7}$, $24=8\times3=\underline{2^3\times3}$

(イ) $\dfrac{2^{56}}{5^{24}}=\dfrac{(2^7)^8}{(5^3)^8}=\left(\dfrac{2^4\times2^3}{5^2\times5}\right)^8=\left(\dfrac{16\times8}{125}\right)^8=\left(\dfrac{128}{125}\right)^8>1^8=1$ $\therefore \underline{2^{56}>5^{24}}$

(補) $2^{ab}=(2^a)^b=(2^b)^a$, $2^{a+b}=2^a\times2^b$,

(別解) $2^{56}-5^{24}=\{(2^{28})^2-(5^{12})^2\}=(2^{28}+5^{12})(2^{28}-5^{12})=(2^{28}+5^{12})\{(2^{14})^2-(5^6)^2\}$

$=(2^{28}+5^{12})(2^{14}+5^6)(2^{14}-5^6)=(2^{28}+5^{12})(2^{14}+5^6)\{(2^7)^2-(5^3)^2\}$

$=(2^{28}+5^{12})(2^{14}+5^6)(2^7+5^3)(2^7-5^3)$, $2^7=2^4\times2^3=16\times8=128$, $5^3=125$ なので

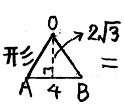
$2^7-5^3>0$, 波線部は正 $\therefore 2^{56}-5^{24}>0$ $\therefore \underline{2^{56}>5^{24}}$

$\boxed{2}$ ①は $a^2+2ab+b^2-4ab+2(a-b)-4=0$, $(a-b)^2+2(a-b)-4=0$, ②より $x=a-b<0$ とおけば、

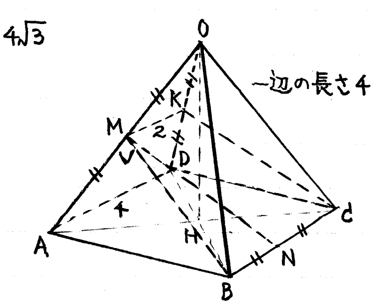
$x^2+2x-4=0$, $x<0$, $\therefore x=\underline{a-b=-1-\sqrt{5}}$

(補) $a-b=x<0$, $b=a-x$ を①に入れて、$(2a-x)^2-4a(a-x)+2a-2(a-x)=4$,

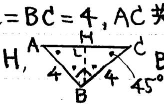
$4a^2-4ax+x^2-4a^2+4ax+2a-2a+2x-4=0$, $x^2+2x-4=0$, $x<0$ $\therefore x=\underline{a-b=-1-\sqrt{5}}$

$\boxed{3}$ (1) 側面は一辺の長さ4の正三角形、正三角形  $=4\times2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=4\sqrt{3}$

$\therefore \underline{S}=4\times4\sqrt{3}+4^2=\underline{16(\sqrt{3}+1)}$

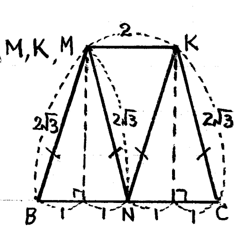


(2) $\triangle OAC \equiv \triangle BAC$ ($\because OA=BA=4$, $OC=BC=4$, AC共通、三辺相等)

正四面体 O-ABCD の高さ $OH=BH$,  $BH=4\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

$\therefore \underline{V}=4^2\times2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{3}=\underline{\dfrac{32\sqrt{2}}{3}}$

(3) 線分MNを含む平面MBCKで切ると切り口は等脚台形MBCK, OA, OD の中点M, K,



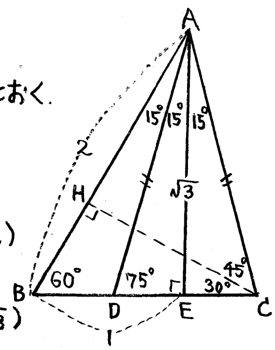
中点連結定理より $MK=2$, BMは正三角形OABの点Bからの垂線なので $BM=2\sqrt{3}$

右図のようになるので $BM=\underline{MN=2\sqrt{3}}$ ($=KN=CK$)

(別解) 線分MNを含む△OANで切ると、$AN=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$, $ON=2\sqrt{3}$

△OANに中線定理を用いると、$AN^2+ON^2=2(OM^2+MN^2)$ だから $(\sqrt{20})^2+(2\sqrt{3})^2=2(2^2+MN^2)$

$32=2(4+MN^2)$, $16=4+MN^2$, $MN^2=12$, $\underline{MN=2\sqrt{3}}$



④(解1)(三平方の定理を用いない)右図のように、二等辺三角形ADCとなる.

(1) AD＝ACだからACの長さを求める.点Cから辺ABに垂線CHをおろす.$AC=x$とおく.

定三角定規の辺の比より.$CH=AH=\frac{x}{\sqrt{2}}$, $BH=CH\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{x}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{x}{\sqrt{6}}$

$AH+BH=2$ より $\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x}{\sqrt{6}}=2$. 両辺に$\sqrt{6}$をかけて.$\sqrt{3}x+x=2\sqrt{6}$

$(\sqrt{3}+1)x=2\sqrt{6}$, $x=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1}=\frac{2\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{3-1}=\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)=\underline{3\sqrt{2}-\sqrt{6}=AD}(=AC)$

(2) 角の二等分線の定理より.$BA:AE=BD:DE=2:\sqrt{3}$ ∴$BD:BE=2:(2+\sqrt{3})$

∴$\triangle ABD=$直角三角形$ABE\times\frac{2}{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{4-3}=\underline{2\sqrt{3}-3=S}$

(解2)(直角三角形ADEを利用する)

(1) 角の二等分線の定理より.$BA:AE=BD:DE=2:\sqrt{3}$ ∴$DE=BE\times\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=1\times\sqrt{3}(2-\sqrt{3})=\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$

直角三角形ADEに三平方の定理を用いて、$AD^2=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}(2-\sqrt{3}))^2=3(1+(2-\sqrt{3})^2)$

$=3(1+7-4\sqrt{3})=3(8-4\sqrt{3})=6(4-2\sqrt{3})$ ∴$\underline{AD}=\sqrt{6}\times\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)=\underline{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}$

(2) $BD=BE\times\frac{2}{2+\sqrt{3}}=\frac{2}{2+\sqrt{3}}$, $\triangle ABD=\underline{S}=BD\times AE\times\frac{1}{2}=\frac{2}{2+\sqrt{3}}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\sqrt{3}(2-\sqrt{3})=\underline{2\sqrt{3}-3}$

⑤(1) 詳しく.説明をした後で解をかきます.不定方程式は.絞り込みが大切です.(o.n)＝キ.(e.n)＝グ

$n+6=l^2$---① $n-6=m^2$---② l,mは非負整数(負でない整数, lは0以上の整数)とおける

例えば.$(l,m)=(4,2)(-4,-2)$のとき.いずれのときも$n=10$となりますので. l,mは0以上の整数.

$n+6=l^2\geqq 0$ かつ $n-6=m^2\geqq 0$ だから $n\geqq -6$ かつ $n\geqq 6$ ∴求める整数nは$n\geqq 6$ ですが.これは.

かく必要はありません.(l,m)を求めると.必ず$n\geqq 6$になっている. ①,②から $n+6>n-6$より.

$l^2>m^2\geqq 0$. $l\geqq 0, m\geqq 0$ だから $l>m\geqq 0$ ---③ これは.絞り込みに用います.

①+②より $2n=l^2+m^2$. この左辺$2n$は偶数(even number)だから右辺l^2+m^2もeven number.

(奇数は.odd numberという) (e.n)+(e.n)＝(e.n), (e.n)+(o.n)＝(o.n), (o.n)+(o.n)＝(e.n)だから.

(l^2,m^2)＝((o.n),(o.n)) or ((e.n),(e.n)), l^2が(o.n)ならば.lは(o.n), l^2が(e.n)ならばlは(e.n)

のように絞り込めます. ①−②より $12=l^2-m^2=(l+m)(l-m)$ ①+②と同様 (l,m)＝((e.n),(e.n)) or

((o.n),(o.n)), 左辺12は(e.n) よって右辺$(l+m)$と$(l-m)$の積$(l+m)(l-m)$も(e.n)となるには、

$(l+m, l-m)$＝((o.n),(o.n))((o.n),(e.n))((e.n),(o.n))((e.n),(e.n)) の4つの場合のうち ((o.n),(o.n))

を除く残り3つの場合です.更に暗記事項です. $(l+m)$と$(l-m)$の和 $(l+m)+(l-m)=2l$ は

even number ですから $(l+m, l-m)$＝((o.n),(o.n)) or ((e.n),(e.n))のいずれか.したがって.

$(l+m, l-m)$＝((e.n),(e.n))のみとなります.この設問では.これを用います.更に絞り込みます.

③より $l+m\geqq l-m>0$, 以上のことをまとめてしまうと. $12=(l+m)(l-m)$ かつ $l+m\geqq l-m>0$ かつ

$(l+m, l-m)$＝((e.n),(e.n)) となります. $12=(\pm12\times\pm1),(\pm6\times\pm2),(\pm4\times\pm3),(\pm2\times\pm6),(\pm1\times\pm12)$

ですから.$(l+m, l-m)=(6,2)$のみが.この条件をみたします. $(l,m)=(4,2)$ となるから.

①より $n=l^2-6=4^2-6=10$. (②に入れて $n=m^2+6=2^2+6=10$ でもOK)ということになります.

※(o.n)＝キ, (e.n)＝グ とかきこんで.わかりやすくして下さい.考えながらかきこむこと.

(2). (1)をしっかり理解すれば.わかります.整数nの値を求めよではないので $l\geqq 0, m\geqq 0$ は必要ない.

題意は.整数nが1個でも存在するということ.とすれば. kが奇数 $k=2k'-1$ ならば. 1つもないということ.

5 (1) $n+6=l^2$ ---① $n-6=m^2$ ---②, l, m は、0以上の整数とおく. $n+6>n-6$ なので $l^2>m^2\geqq 0$, $l>m\geqq 0$ ---③ ①−②より $12=l^2-m^2=(l+m)(l-m)$ ---④, 左辺12は偶数なので、$(l+m)$と$(l-m)$が、ともに奇数ということはない. $(l+m)$と$(l-m)$の2数の和 $(l+m)+(l-m)=2l$, これは偶数なので、$(l+m)$と$(l-m)$は、ともに奇数かまたはともに偶数 よって $(l+m)$と$(l-m)$はともに偶数 ③より $l+m\geqq l-m>0$ なので ④をみたすものは $(l+m, l-m)=(6,2)$ ただ1つ. $(l, m)=(4,2)$ なので ①より $n=l^2-6=4^2-6=10$, ($n=m^2+6=2^2+6=10$ でもよい)

(2) (その1) 自然数 k をたしてもひいても平方数となるような整数 n が存在するとき、自然数 k が、偶数でないとする. すなわち $k=2k'-1$, k' は自然数 とおく.
$n+(2k'-1)=l^2$ ---①, $n-(2k'-1)=m^2$ ---②, l, m は整数, をみたす整数 n が存在するとする.
①−②より $4k'-2=l^2-m^2=(l+m)(l-m)$ ---③ 左辺 $4k'-2=2(2k'-1)$ は、偶数なので、右辺 $(l+m)(l-m)$ も偶数であり、$(l+m)$と$(l-m)$がともに奇数ということはない
一方 $(l+m)$と$(l-m)$の和 $(l+m)+(l-m)=2l$ は偶数だから、$(l+m)$と$(l-m)$は、ともに、奇数 またはともに偶数 である. 波線部から $(l+m)$と$(l-m)$はともに偶数である.
$l+m=2a$, $l-m=2b$, a, b は整数 とおける. これを③に入れて $4k'-2=2a\times 2b$
$2k'-1=2ab$, この左辺は奇数, 右辺は偶数となり不合理, これは、自然数 k が奇数としたことから導き出された矛盾である. よって自然数 k は偶数でなければならない

(補) k が正の偶数, すなわち, $k=2k'$, k' は自然数のとき $n+2k'=l^2$ ---① $n-2k'=m^2$ ---②
l, m は0以上の整数とおく. $n+2k'>n-2k'$ ($\because$ k' は自然数) なので $l^2>m^2\geqq 0$, $l>m\geqq 0$ ---③
①−②より $4k'=l^2-m^2=(l+m)(l-m)$ ---④ 左辺 $4k'$ は偶数なので $(l+m)$と$(l-m)$がともに奇数ということはない. $(l+m)$と$(l-m)$の2数の和 $(l+m)+(l-m)=2l$, これは偶数なので $(l+m)$と$(l-m)$はともに奇数またはともに偶数である. (奇偶は一致する) よって $(l+m)$と$(l-m)$は、ともに偶数. ③より $l+m\geqq l-m>0$, $l+m=2a$, $l-m=2b$, a, b は $a\geqq b\geqq 1$ をみたす自然数とおける. $l=a+b$, $m=a-b$, ④に入れて $k'=ab$, このとき $n=l^2-2k'=(a+b)^2-2ab=a^2+b^2$
(1)では, $k'=3$, $a=3$, $b=1$ です. もしも $k=8$ ならば $k'=4=ab$, $a\geqq b\geqq 1$ より $(a, b)=(4,1)(2,2)$ となり $n=a^2+b^2=4^2+1^2=17$ または $n=2^2+2^2=8$ となります. $k=100$ ならば、$k'=50=ab$, $a\geqq b>1$ より $(a, b)=(50,1)(25,2)(10,5)$ となり、$n=a^2+b^2=50^2+1^2=2501$, または $n=25^2+2^2=629$, $n=10^2+5^2=125$,

(その2) $n+k=l^2$ ---① $n-k=m^2$ ---②, l, m は整数, k は与えられた自然数, n は整数
①+②より $2n=l^2+m^2$, $n=\dfrac{l^2+m^2}{2}$ このような整数 n が存在するとき、l^2+m^2 は偶数.
l^2 と m^2 は、ともに奇数かまたはともに偶数 $\Leftrightarrow$ l と m はともに奇数かまたはともに偶数
(i) l と m がともに奇数のとき $l=2s+1$, $m=2t+1$, s, t は整数とおける. ①−②より $2k=l^2-m^2$
$=(l+m)(l-m)=(2s+2t+2)(2s-2t)=4(s+t+1)(s-t)$ $\therefore k=2(s+t+1)(s-t)$ $\therefore k$ は偶数
(ii) l と m がともに偶数のとき $l=2s$, $m=2t$, s, t は整数とおける. ①−②より $2k=(l^2-m^2)$
$=(l+m)(l-m)=(2s+2t)(2s-2t)=4(s+t)(s-t)$ $\therefore k=2(s+t)(s-t)$ $\therefore k$ は偶数
よって(i),(ii)いずれの場合も k は偶数でなければならない.
注. (i),(ii)いずれの場合も n が整数になるということではありません. n が整数になるときには k は必ず偶数のときに限るということです

(その3) $n+k=l^2$ ---① $n-k=m^2$ ---② , l, m は整数, k は与えられた自然数のとき, この①,②をみたす整数 n が存在するならば, ①−②より $2k=l^2-m^2$, l, m は整数 となる l, m も存在する.
$k=\dfrac{l^2-m^2}{2}$, k は自然数 , l^2-m^2 は偶数でなければならない. l^2 と m^2 は, ともに奇数かまたは, ともに偶数でなければならない. よって l と m はともに奇数かまたはともに偶数.

(i) l と m がともに奇数のとき $l=2s+1$, $m=2t+1$, s, t は整数とおける.
このとき $k=\dfrac{l^2-m^2}{2}=\dfrac{(l+m)(l-m)}{2}=\dfrac{(2s+2t+2)(2s-2t)}{2}=\dfrac{4(s+t+1)(s-t)}{2}=2(s+t+1)(s-t)$
よって k は偶数.

(ii) l と m がともに偶数のとき $l=2s$, $m=2t$, s, t は整数とおける.
このとき $k=\dfrac{l^2-m^2}{2}=\dfrac{4s^2-4t^2}{2}=2(s^2-t^2)=2(s+t)(s-t)$ よって k は偶数

(補) (i), (ii) いずれのときも n が整数になるということではありません. 整数 n が存在するならば, k が奇数ということはありえない. k が偶数であることが必要ということです.
例えば, $k=6$ のとき (i) は $6=2(s+t+1)(s-t)$, $3=(s+t+1)(s-t)$, $s>t\geqq 0$ として
$\begin{cases} s+t+1=3 \\ s-t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s+t=2 \\ s-t=1 \end{cases} \Leftrightarrow (s, t)=\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ となりますので, s, t は整数になりません.

(1)の[別解]をします.

$n+6=l^2$ ---① , $n-6=m^2$ ---② . l, m は非負整数 ①+②より $2n=l^2+m^2$, $n=\dfrac{l^2+m^2}{2}$
l^2+m^2 は偶数でなければならない. l^2 と m^2 はともに奇数かまたは, ともに偶数.
l と m はともに奇数かまたはともに偶数

(i) l と m がともに奇数のとき $l=2s+1$, $m=2t+1$, s, t は非負整数とおける.
①−②より $12=l^2-m^2=(l+m)(l-m)=(2s+2t+2)(2s-2t)=4(s+t+1)(s-t)$
$3=(s+t+1)(s-t)$ ①,②から $n+6>n-6$ ∴ $l^2>m^2\geqq 0$, $l>m\geqq 0$,
$2s+1>2t+1\geqq 0$ ∴ $s>t\geqq 0$ ∴ $s+t+1>s-t>0$
$s+t+1=3$, $s-t=1 \Leftrightarrow s+t=2$, $s-t=1$, $\Leftrightarrow (s, t)=\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ 不適

(ii) l と m がともに偶数のとき $l=2s$, $m=2t$, s, t は非負整数とおける
①−②より $12=l^2-m^2=(l+m)(l-m)=(2s+2t)(2s-2t)=4(s+t)(s-t)$
$3=(s+t)(s-t)$ (i)と同じ $l>m\geqq 0$ より $2s>2t\geqq 0$, $s>t\geqq 0$
∴ $s+t\geqq s-t>0$ $s+t=3$, $s-t=1$, ∴ $(s, t)=(2, 1)$, $(l, m)=(4, 2)$
よって ①より $n=l^2-6=4^2-6=10$ (②より $n=m^2+6=2^2+6=10$ でもOK)

(補) ①−②より $12=l^2-m^2=(l+m)(l-m)$ まではよいのですが, 絞りこみをしなくて,
$(l+m, l-m)=(\pm 1, \pm 12)(\pm 2, \pm 6)(\pm 3, \pm 4)(\pm 4, \pm 3)(\pm 6, \pm 2)(\pm 12, \pm 1)$ (複号同順)
の全12通りを求める人がいます. これは, いただけません. このような設問は, どのように絞りこんでいくかが数学力です.

次頁に[問]あります. 絞りこみをしてchallenge!

[問1] 18をたしても42をたしても平方数となる整数nの値を求めよ.[答.7,−17]

(解) $n+18=l^2$ ---①, $n+42=m^2$ ---② l, mは非負整数とおく.
$n+42>n+18$ から $m^2>l^2\geqq 0$ ∴$m>l\geqq 0$ ---③
②−①より $24=m^2-l^2=(m+l)(m-l)$ ---④, 24は偶数なので(m+l)と(m−l)がともに奇数ということはない(実際ともに奇数ということはありませんが---) 更に$(m+l)$と$(m-l)$の和
$(m+l)+(m-l)=2m$ は偶数だから$(m+l)$と$(m-l)$の奇偶は一致する.
2つの破線部より,$(m+l)$と$(m-l)$はともに偶数, ③より $m+l\geqq m-l>0$
よって ④より $(m+l, m-l)=(12,2)(6,4)$ $(m,l)=(7,5)(5,1)$
(i) $(m,l)=(7,5)$のとき ①より $n=l^2-18=5^2-18=\underline{7}$ (ii) $(m,l)=(5,1)$のとき $n=l^2-18=1^2-18=\underline{-17}$

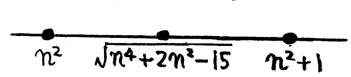
[問2] 150をたしてもひいても平方数となる整数nの値を求める.次の(1),(2)に答えよ.
(1) 300を素因数分解せよ (2) 整数nの値を求めよ.[答.250,634,5626]

(解) (1) $300=100\times 3=4\times 25\times 3=\underline{2^2\times 3\times 5^2}$

(2) $n+150=l^2$ ---①, $n-150=m^2$ ---② l, mは非負整数とおく. $n+150>n-150$ なので $l^2>m^2\geqq 0$
∴$l>m\geqq 0$ ---③ ①−②より $300=l^2-m^2=(l+m)(l-m)$, 300は偶数なので
$(l+m)$と$(l-m)$がともに奇数ということはない. 更に$(l+m)$と$(l-m)$の和
$(l+m)+(l-m)=2l$ は偶数なので$(l+m)$と$(l-m)$の奇偶は一致する.
2つの破線部より$(l+m)$と$(l-m)$はともに偶数, ③より $l+m\geqq l-m>0$ ---④
(1)の素因数分解 $300=2^2\times 3\times 5^2$ より $l+m$と$l-m$は,ともに2を素因数にもつ.
④より$(l+m)$と$(l-m)$は,3×5^2をふりわけて (i) $(l+m, l-m)=(2\times 3\times 5^2, 2)=(150,2)$
(ii) $(l+m, l-m)=(2\times 5^2, 2\times 3)=(50,6)$ (iii) $(l+m, l-m)=(2\times 3\times 5, 2\times 5)=(30,10)$
(i)のとき $l=76$ ①より $n=l^2-150=76^2-150=5776-150=\underline{5626}$
(ii)のとき $l=28$, $n=28^2-150=\underline{634}$ (iii)のとき $l=20$, $n=20^2-150=400-150=\underline{250}$

(補) P.61の(4)中段の(補)を用いると,$k=150$, $k'=75=ab$, $a\geqq b>1$ より $(a,b)=(75,1)(25,3)(15,5)$
の3組となり,$n=a^2+b^2=75^2+1=\underline{5626}$, $n=25^2+3^2=\underline{634}$, $n=15^2+5^2=\underline{250}$ が得られます.
整数問題は,高度な素数を扱う設問以外は,理解,技法を習得してしまえば,中学生でも,
大学入試問題が解けるようになります.大きな得点源となることでしょう.

次頁[問.5]の(解2)
$(1\leqq)\, n^2<\sqrt{n^4+2n^2-15}<n^2+1$ となる整数nのとき,平方数は存在しない.左の不等式より $n^4<n^4+2n^2-15$,
$15<2n^2$, $7.5<n^2$, $8<n^2$, $3\leqq n$のとき平方数は存在しない. $n^4+2n^2-15=(n^2+5)(n^2-3)>0$, $n^2+5>0$,
$n^2>3$, ∴$n\geqq 2$ したがって $n=2$ のとき $2^4+2\times 2^2-15=16+8-15=9=3^2$ だから平方数
求めるものは,$n=2$のとき平方数9



[問.3] $n!+3$ が平方数となる自然数 n の値とそのときの平方数を求めよ．但し，$n!=n\times(n-1)\times\cdots\times3\times2\times1$

(考) $n=1,2,3,4,\cdots$ と実験します．$n\geqq4$ では，平方数にならないみたいですが‥‥‥

(解) (i) $n=1$ のとき $1!+3=4=2^2$ となり平方数である． (ii) $n=2$ のとき $2!+3=2\times1+3=5$ となり平方数でない

(iii) $n=3$ のとき $3!+3=3\times2\times1+3=9=3^2$ となり平方数である．

(iv) $n\geqq4$ のとき $n!+3=l^2$，l は自然数とおく．左辺の $n!$ は偶数だから，奇数3をたした $n!+3$ は奇数．

すると，右辺 l^2 は奇数 $\therefore l$ は奇数，$l=2m-1$，m は自然数とおく．

$n!+3=(2m-1)^2=4m^2-4m+1=4m(m-1)+1$ ※

左辺 $n!+3$ は $n\geqq4$ だから $n!$ は4の倍数であり，$n!+3$ を4でわった余りは3である．

ところが，右辺 $4m(m-1)+1$ は4でわった余りは1であるから，等号が成立することはない

すなわち $n\geqq4$ のとき平方数となることはない．

以上より，求めるものは $n=1$ のとき平方数4，$n=3$ のとき平方数9 である．

(補)※ (iv) $n\geqq4$ のとき $n!+2=4m(m-1)$ 左辺は4でわって2余る．右辺は4でわり切れる

または，左辺は8でわって2余る．右辺は8でわり切れる．

[問.4] n^2+16 が平方数となる負でない整数 n の値とそのときの平方数を求めよ

(解1) $n^2+16=l^2$，l は自然数とおく．$16=l^2-n^2=(l+n)(l-n)$ $l+n\geqq l-n>0$，$(l+n)$ と $(l-n)$ の積は，偶数16だから $(l+n)$ と $(l-n)$ がともに奇数ではない．$(l+n)$ と $(l-n)$ の和 $(l+n)+(l-n)=2l$，偶数だから $(l+n)$ と $(l-n)$ の奇偶は一致する．よって $(l+n)$ と $(l-n)$ はともに偶数．

$(l+n,l-n)=(8,2)(4,4)$ $\therefore(l,n)=(5,3)(4,0)$ $\therefore n=3$ のとき平方数25，$n=0$ のとき平方数16

n $\sqrt{n^2+16}$ $n+1$ ($\sqrt{n^2+16}$ は，幅1の整数にはさまれる．)

(解2) $(0\leqq)n<\sqrt{n^2+16}<n+1$ をみたす整数 n のとき，平方数は存在しない．$0\leqq n^2<n^2+16<(n+1)^2=n^2+2n+1$

$16<2n+1$，$\frac{15}{2}(=7.5)<n$，$\therefore 8\leqq n$ のとき n^2+16 の平方数は存在しない．$n=0$ のとき $16=4^2$，

$n=1$ のとき17，$n=2$ のとき20，$n=3$ のとき $25=5^2$，$n=4$ のとき32，$n=5$ のとき41，$n=6$ のとき52，

$n=7$ のとき65，以上より，求めるものは，$n=0$ のとき平方数16，$n=3$ のとき平方数25

[問.5] n^4+2n^2-15 が平方数となる自然数 n の値とそのときの平方数を求めよ．

(解1) $n^4+2n^2-15=l^2$，l は負でない整数とおく．$(n^2+1)^2-16=l^2$，$(n^2+1)^2-l^2=16$，$(n^2+1+l)(n^2+1-l)=16$，

$n^2+1+l\geqq n^2+1-l>0$，(n^2+1+l) と (n^2+1-l) の積が16(偶数)だから (n^2+1+l) と (n^2+1-l) がともに奇数ということはない．(n^2+1+l) と (n^2+1-l) の和 $(n^2+1+l)+(n^2+1-l)=2(n^2+1)$ (偶数)だから (n^2+1+l) と (n^2+1-l) の奇偶は一致する．よって (n^2+1+l) と (n^2+1-l) はともに偶数．

$(n^2+1+l,n^2+1-l)=(8,2),(4,4)$，$(n^2+1,l)=(5,3),(4,0)$，$(n,l)=(2,3)(\sqrt{3},0)$

したがって $n=2$ のとき平方数9 $n^2+1=4$ かつ $l=0$ をみたす自然数 n は存在しない

(解.2) P.61の(6)下にあります．Best解です．(問.4)の(解2)のようにする．