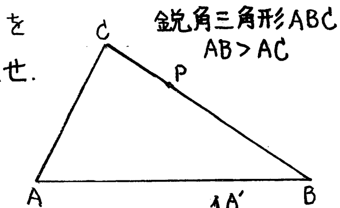
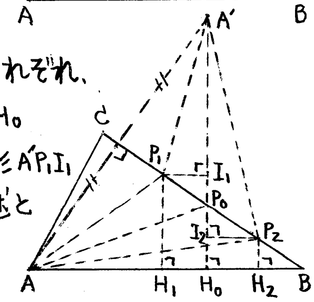
[類] a, b は、$0<b<a$ をみたす実数定数とする.(x, y) が $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ $(x>0, y>0)$ をみたすとき、$\sqrt{x^2+y^2}+y$ の最小値とそのときの (x, y) の値を求めよ.

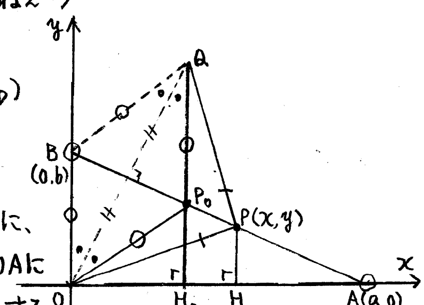
[考1] 例 右図、$\triangle ABC$ の辺 BC 上を動く点を P とする.点 P から辺 AB に垂線 PH をおろす.$AP+PH$ が最小となる点 P_0 を作図せよ.最小となる理由も示せ.



(カイ) 辺 BC に関して、点 A と対称な点を A' とする.点 A' から辺 BC に垂線 $A'H_0$ をおろし、$A'H_0$ と辺 BC の交点を P_0 とすればよい.



理由:線分 P_0C 上に点 P_1 をとり、点 P_1 から辺 AB、線分 $A'H_0$ にそれぞれ、垂線 P_1H_1、垂線 P_1I_1 をおろす.$AP_1+P_1H_1=A'P_1+P_1H_1>A'I_1+I_1H_0$ $=A'H_0=A'P_0+P_0H_0=AP_0+P_0H_0$ ($\because P_1H_1=I_1H_0$、$A'P_1$ は、直角三角形 $A'P_1I_1$ の斜辺だから、$A'P_1>A'I_1$) 線分 P_0B 上に点 P_2 があるときも、前述と同様に $AP_2+P_2H_2=A'P_2+P_2H_2>A'I_2+I_2H_0=A'P_0+P_0H_0$ $=AP_0+P_0H_0$ したがって、点 P_1、点 P_2 が点 P_0 に一致するとき、$AP_0+P_0H_0$ が最小となる.(余りにもくどい(カイ)でしたかねぇ~)



[解1] 点 $P(x, y)$ は、第I象限にある線分 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ $(0<x<a, 0<y<b)$ 上の点 P とする.点 P から線分 $0A$ に垂線 PH をおろすと、$\sqrt{x^2+y^2}+y=0P+PH$ の長さを表す.線分 AB に関する点 0 の対称点を Q とする.$0<b(0B)<a(0A)$ なので、点 Q から線分 $0A$ に、垂線 QH_0 をおろすことができる.($0<a<b$ ならば、点 Q から線分 $0A$ に垂線 QH_0 をおろすことはできない) QH_0 と線分 AB の交点を P_0 とする.

点 P が点 P_0 と異なる点のとき、$0P+PH=QP+PH>QH_0=QP_0+P_0H_0=0P_0+P_0H_0$ が成立し(折れ線と直線) 点 P_0 が求める最小値をとる点である.点 $P_0(x, y)$ の座標を求める.$B0 \parallel QP_0$ だから、ひし形 $0P_0QB$ となる.(中にある4つの直角三角形は全て合同) $\therefore 0B=0P_0=b=\sqrt{x^2+y^2}$ ---① , $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ ---②

②より、$y=\left(1-\dfrac{x}{a}\right)\times b=b-\dfrac{b}{a}x$ ---②' を①に代入.$x^2+\left(b-\dfrac{b}{a}x\right)^2=b^2$, $x^2-\dfrac{2b^2}{a}x+\dfrac{b^2}{a^2}x^2=0$,

$x(>0)$ でわって、$x-\dfrac{2b^2}{a}+\dfrac{b^2}{a^2}x=0$, $(a^2+b^2)x-2ab^2=0$, $\therefore x=\dfrac{2ab^2}{a^2+b^2}$, ②'に入れて $y=b-\dfrac{b}{a}\times\dfrac{2ab^2}{a^2+b^2}$

$=\dfrac{b(a^2+b^2)-2b^3}{a^2+b^2}=\dfrac{a^2b+b^3-2b^3}{a^2+b^2}=\dfrac{b(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$

求める最小値は、$0P_0+P_0H_0=b+y=b+\dfrac{b(a^2-b^2)}{a^2+b^2}=b\left(\dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)=\dfrac{2a^2b}{a^2+b^2}$

答	$(x, y)=\left(\dfrac{2ab^2}{a^2+b^2}, \dfrac{b(a^2-b^2)}{a^2+b^2}\right)$ のとき 最小値 $\dfrac{2a^2b}{a^2+b^2}$

[補] 図形で解けば、次頁のような解が得られます.a, b を4, 3などの数字にしてしまえば、高校入試でしょう.「中学から高校への架け橋」P.33の(2)ア,イにかきました.

[補] 図形で解く. $OB=OP_0=b$ を求めて, 三平方の定理, 相似などを用いる.

$AB=\sqrt{a^2+b^2}$, 直角三角形OABの面積を2通りで表して,

$\dfrac{ab}{2}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}\times OC}{2}$ $\therefore OC=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 直角三角形OCBを用いて,

$BP_0=2\times BC=2\sqrt{b^2-OC^2}=2\sqrt{b^2-\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}}=2b\sqrt{\dfrac{(a^2+b^2)-a^2}{a^2+b^2}}=\dfrac{2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

直角三角形OAB∽直角三角形H_0AP_0 より, $BO:P_0H_0=AB:AP_0$

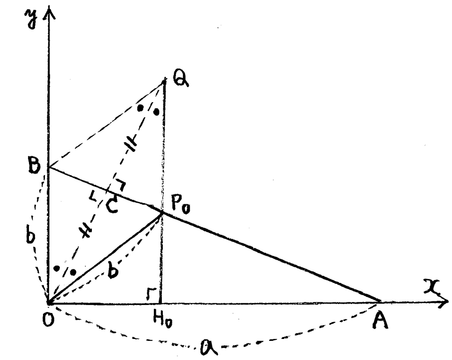
$b:P_0H_0=\sqrt{a^2+b^2}:\left(\sqrt{a^2+b^2}-\dfrac{2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=(\sqrt{a^2+b^2})^2:\left((\sqrt{a^2+b^2})^2-2b^2\right)$

$=(a^2+b^2):(a^2-b^2)$ $\therefore P_0H_0=\dfrac{b(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$

$AH_0=P_0H_0\times\dfrac{a}{b}=\dfrac{b(a^2-b^2)}{a^2+b^2}\times\dfrac{a}{b}=\dfrac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$

$OH_0=OA-AH_0=a-\dfrac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2}=a\left(\dfrac{(a^2+b^2)-(a^2-b^2)}{a^2+b^2}\right)=\dfrac{2ab^2}{a^2+b^2}$

$OP_0+P_0H_0=b+\dfrac{b(a^2-b^2)}{a^2+b^2}=b\left(\dfrac{(a^2+b^2)+(a^2-b^2)}{a^2+b^2}\right)=\dfrac{2a^2b}{a^2+b^2}$



[考2] 計算のみによる解です. 基本的には, $\sqrt{x^2+y^2}+y=k\,(>0)$ とおいて $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ と連立して, x が実数解をもつ条件に持ち込みますが, $0<x<a$, $0<y<b$, $k-y>0$ などの条件をみたさなければなりません.

[解2] $0<b<a$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ ---① $x>0, y>0$, ①より $y=b\left(1-\dfrac{x}{a}\right)$ ---①', $y>0$ より $1-\dfrac{x}{a}>0$, $a-x>0$,

$\therefore 0<x<a$ ---②, 同様に $0<y<b$ ---③ $\sqrt{x^2+y^2}+y=k\,(>0)$ とおく. $\sqrt{x^2+y^2}=k-y>0$ $\therefore 0<y<k$ ---④

$x^2+y^2=(k-y)^2=k^2-2ky+y^2$, $x^2+2ky-k^2=0$ に①'を代入 $x^2+2kb\left(1-\dfrac{x}{a}\right)-k^2=0$

$x^2-\dfrac{2bk}{a}x+2kb-k^2=0$ ---⑤ x は実数だから, 判別式 $\dfrac{D}{4}\geqq 0$ すなわち $\left(\dfrac{bk}{a}\right)^2-2bk+k^2\geqq 0$, $k(>0)$ でわって

$\dfrac{b^2}{a^2}k-2b+k\geqq 0$, $\left(\dfrac{b^2}{a^2}+1\right)k\geqq 2b$, $\therefore k\geqq\dfrac{2a^2b}{a^2+b^2}$ が必要.

$k=\dfrac{2a^2b}{a^2+b^2}$ のとき ⑤に入れて $x=\dfrac{bk}{a}=\dfrac{b}{a}\times\dfrac{2a^2b}{a^2+b^2}=\dfrac{2ab^2}{a^2+b^2}$, これを①'に入れて $y=b\left(1-\dfrac{1}{a}\times\dfrac{2ab^2}{a^2+b^2}\right)$

$=b\left(\dfrac{a^2+b^2-2b^2}{a^2+b^2}\right)=\dfrac{b(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$ この x, y が ②, ③, ④, をみたせば, k の最小値 $\dfrac{2a^2b}{a^2+b^2}$ が確定する.

② は, $0<\dfrac{2ab^2}{a^2+b^2}<a \Leftrightarrow 0<\dfrac{2b^2}{a^2+b^2}<1 \Leftrightarrow 0<2b^2<a^2+b^2 \Leftrightarrow (0<)\,b^2<a^2 \Leftrightarrow 0<b<a$ 成立.

③ は, $0<\dfrac{2ab^2}{a^2+b^2}<b \Leftrightarrow 0<\dfrac{2ab}{a^2+b^2}<1 \Leftrightarrow 0<2ab<a^2+b^2 \Leftrightarrow 0<(a-b)^2$ 成立

④ は, $0<\dfrac{2ab^2}{a^2+b^2}<k=\dfrac{2a^2b}{a^2+b^2} \Leftrightarrow 0<b<a$ 成立.

よって $(x,y)=\left(\dfrac{2ab^2}{a^2+b^2}, \dfrac{b(a^2-b^2)}{a^2+b^2}\right)$ のとき求める最小値 $\dfrac{2a^2b}{a^2+b^2}$

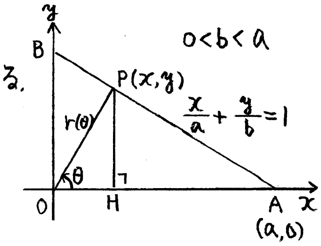
[考3] このような解をする人は, いないでしょうが, $\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ のとき $\sin\theta=\square$, $\cos\theta=\square$, は, 三角が実数 t で表されるので, 微分に, 便利です. 但し, $\dfrac{\theta}{2}\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $\theta\neq 2n\pi+\pi$ (n は整数) です. $OP=r(\theta)$, $\angle AOB=\theta$,
線分 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ $(x>0, y>0)$ 上の点 $P(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)$ とおきます (極方程式) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$
$OP+PH=r(\theta)+r(\theta)\sin\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$, $r(\theta)$ を $\sin\theta, \cos\theta, a, b$ で表し, 更に $\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ とおいて,
t の関数にします. $0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{4}$ だから $0<t<1$ の範囲で微分です. 理系微積のジャンルになりますが,
特に, 三角で表された分数関数の最大, 最小に利用できます. 他にも, 三角方程式(不等式)を解くときに,
いつでもではありませんが, 利用すると, hard な問いが解ける場合があります. $\theta\neq\pm\pi$ をお忘れなく!

[解3] 点P(x,y)は線分 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ $(0<x<a,\ 0<y<b)$ 上の点Pとする.

$\angle AOP=\theta$, $OP=r(\theta)$, とすると $x=r(\theta)\cos\theta$, $y=r(\theta)\sin\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおける.

$\dfrac{r(\theta)\cos\theta}{a}+\dfrac{r(\theta)\sin\theta}{b}=1$, $b\,r(\theta)\cos\theta+a\,r(\theta)\sin\theta=ab$.

$r(\theta)=\dfrac{ab}{b\cos\theta+a\sin\theta}$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ (極方程式) [補]参照



$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ とおく. $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{4}$ ∴ $0<t<1$

$\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1=2\cdot\dfrac{1}{1+t^2}-1=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}=2\cdot\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\cdot\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2t}{1+t^2}$

• $\sqrt{x^2+y^2}+y=r(\theta)+r(\theta)\sin\theta=r(\theta)(1+\sin\theta)=\dfrac{ab}{b\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+a\cdot\frac{2t}{1+t^2}}\left(1+\dfrac{2t}{1+t^2}\right)=\dfrac{ab(1+t)^2}{b(1-t^2)+2at}=f(t)$

$$f'(t)=\frac{ab}{\{b(1-t^2)+2at\}^2}\left\{2(1+t)(b-bt^2+2at)-(-2bt+2a)(1+t)^2\right\}=\frac{2ab(1+t)\{b-bt^2+2at-(-bt+a)(1+t)\}}{\{b(1-t^2)+2at\}^2}$$

$$=\frac{2ab(1-t)(b-bt^2+2at+bt+bt^2-a-at)}{\{b(1-t^2)+2at\}^2}=\frac{2ab(1-t)\{(a+b)t-(a-b)\}}{\{b(1-t^2)+2at\}^2}$$

$0<b<a$ より $0<a-b<a+b$ ∴ $0<\dfrac{a-b}{a+b}<1$, 増減表は左下の通り

t	0	$\cdots$	$\frac{a-b}{a+b}$	$\cdots$	1
$f'(t)$	×	$-$	0	$+$	×
$f(t)$	×	↘	極小	↗	×

$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{a-b}{a+b}$, $\cos\alpha=\dfrac{1-\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}}{1+\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}}=\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a+b)^2+(a-b)^2}=\dfrac{4ab}{2(a^2+b^2)}=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$

$\sin\alpha=\dfrac{2\cdot\frac{a-b}{a+b}}{1+\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}}=\dfrac{2(a-b)(a+b)}{(a+b)^2+(a-b)^2}=\dfrac{2(a^2-b^2)}{2(a^2+b^2)}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

$r(\alpha)=\dfrac{ab}{b\cos\alpha+a\sin\alpha}=\dfrac{ab}{b\cdot\frac{2ab}{a^2+b^2}+a\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}=\dfrac{ab(a^2+b^2)}{2ab^2+a(a^2-b^2)}=\dfrac{ab(a^2+b^2)}{a(a^2+b^2)}=b$

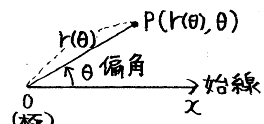
極小値 = 最小値 $=r(\alpha)(1+\sin\alpha)=b\left(1+\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)=b\cdot\dfrac{2a^2}{a^2+b^2}=\dfrac{2a^2b}{a^2+b^2}$

$OH=x=r(\alpha)\cos\alpha=b\cdot\dfrac{2ab}{a^2+b^2}=\dfrac{2ab^2}{a^2+b^2}$, $PH=y=r(\alpha)\sin\alpha=b\cdot\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{b(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$

[補] 極方程式と極座標の基本(詳しくは、Vol.III.理系微積を参照)

右図 $OP=r(\theta)$, $\angle POx=\theta$, として、点Pを$(r(\theta),\theta)$で表す. xy平面との関係は、

$x=r(\theta)\cos\theta$, $y=r(\theta)\sin\theta$, 極は、直交xy平面の原点O,



$x=r(\theta)\cos\theta$
$y=r(\theta)\sin\theta$
$x^2+y^2=\{r(\theta)\}^2$

(1) 円 $x^2+y^2=4$ は, $x=r(\theta)\cos\theta$, $y=r(\theta)\sin\theta$ を代入して $(r(\theta))^2=4$, $r(\theta)=2$

• 図形的に明らかに $r(\theta)=2$ です. 点Pとしては、例えば、$P\left(2,\dfrac{\pi}{4}\right)$, $P\left(2,\dfrac{4}{3}\pi\right)$ と表す.

• 逆に $r(\theta)=2$ のとき $\{r(\theta)\}^2=4$, $x^2+y^2=\{r(\theta)\}^2$ だから $x^2+y^2=4$

(2) $(-3,0)$を中心とする半径3の円は、$(x+3)^2+y^2=9$, 原点Oを極とすると、

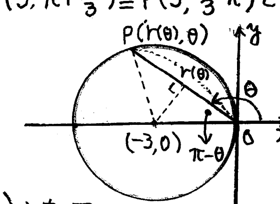
(その1) $x=r(\theta)\cos\theta$, $y=r(\theta)\sin\theta$ を代入 $(r(\theta)\cos\theta+3)^2+(r(\theta)\sin\theta)^2=9$, $\{r(\theta)\}^2+6r(\theta)\cos\theta=0$,

$\{r(\theta)\}\{r(\theta)+6\cos\theta\}=0$, $r(\theta)=0$ or $r(\theta)=-6\cos\theta$ ---① であるが①は $r(\theta)=0$ を含むので

$r(\theta)=-6\cos\theta$ $\left(\theta=\dfrac{\pi}{3}\right.$ とすると $r\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-3$ となるが $P\left(-3,\dfrac{\pi}{3}\right)\equiv P\left(3,\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)\equiv P\left(3,\dfrac{4}{3}\pi\right)$ とする$\Big)$

(その2) 右図 $|-3|\cos(\pi-\theta)=\dfrac{r(\theta)}{2}$, $r(\theta)=6\cos(\pi-\theta)=-6\cos\theta$

一般には、偏角は、$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ とかきます.



(その3) $r(\theta)=-6\cos\theta$ ならば $\{r(\theta)\}^2=-6r(\theta)\cos\theta$, $x^2+y^2=-6x$,

$(x+3)^2+y^2=9$,

注. 極を点$(-3,0)$とすると極方程式は $r(\theta)=3$ です. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\cos\theta\\3\sin\theta\end{pmatrix}$ となって

θをパラメータとする表示になります.

> [類3] xy 平面において $0 \leqq y^2 - x^2 \leqq 1$，かつ $0 \leqq xy \leqq \sqrt{2}$ が表す領域をDとする．
> (1) 領域Dを図示せよ　(2) 領域Dの面積Sを求めよ　[解]は次頁

[考] (2) 例 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx = I$ を求めよ．

(カイ) $x = \tan\theta$ とおく．$\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$，$\begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ \hline \theta & 0 \to \frac{\pi}{4} \end{array}$，$I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan^2\theta + 1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta$

$$I = \left[\frac{\tan\theta}{\cos\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}\,d\theta = \sqrt{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^3\theta}\,d\theta = \sqrt{2} - I + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta$$

$$\left(\begin{array}{ll} f(\theta) = \dfrac{1}{\cos\theta} & g'(\theta) = \dfrac{1}{\cos^2\theta} \\ f'(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta} & g(\theta) = \tan\theta \end{array}\right)$$

$$2I = \sqrt{2} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta = \sqrt{2} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = \sqrt{2} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$= \sqrt{2} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-t^2}\,dt = \sqrt{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt$$

$\sin\theta = t$，$\dfrac{dt}{d\theta} = \cos\theta$　$\begin{array}{c|c} \theta & 0 \to \frac{\pi}{4} \\ \hline t & 0 \to \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}$

$$= \sqrt{2} + \frac{1}{2}\Big[\log(1+t) - \log(1-t)\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} + \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{2} + \frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} + \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + \frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2 = \sqrt{2} + \log(\sqrt{2}+1)$$

$$\therefore\ I = \frac{\sqrt{2} + \log(\sqrt{2}+1)}{2}$$

ついでに (問) $I_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{x^2+1}\right)^n dx$ とする．I_0，I_1 (これは 例 の I)，I_2 を求めて，I_n ($n = 2, 3, \cdots$) の漸化式を導け

(カイ) $I_0 = \displaystyle\int_0^1 1\,dx = [x]_0^1 = 1$，$I_1 = I = \dfrac{\sqrt{2} + \log(\sqrt{2}+1)}{2}$，$I_2 = \displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1 = \frac{4}{3}$

$x = \tan\theta$ とおく．$\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$，$dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$，$\begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ \hline \theta & 0 \to \frac{\pi}{4} \end{array}$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^n \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{n+2}\theta}\,d\theta$$

$$= \left[\frac{\tan\theta}{\cos^n\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{n\sin^2\theta}{\cos^{n+2}\theta}\,d\theta = (\sqrt{2})^n - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{n(1-\cos^2\theta)}{\cos^{n+2}\theta}\,d\theta$$

$$= (\sqrt{2})^n - n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{n+2}\theta}\,d\theta + n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^n\theta}\,d\theta$$

$$= (\sqrt{2})^n - nI_n + nI_{n-2}$$

$f = \dfrac{1}{\cos^n\theta}$，$g' = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$f' = \dfrac{n\cos^{n-1}\theta\sin\theta}{\cos^{2n}\theta}$，$g = \tan\theta$

$f\cdot g = \dfrac{\tan\theta}{\cos^n\theta}$

$f'\cdot g = \dfrac{n\cos^{n-1}\theta\sin^2\theta}{\cos^{2n+1}\theta} = \dfrac{n\sin^2\theta}{\cos^{n+2}\theta}$

$(n+1)I_n = (\sqrt{2})^n + nI_{n-2}$　$\therefore\ I_n = \dfrac{(\sqrt{2})^n + nI_{n-2}}{n+1}$　$(n = 2, 3, 4 \cdots)$

(補) n が偶数のときは，整関数の定積分です．$J_n = \displaystyle\int_0^1 (x^2+1)^n dx$ の漸化式は？

$$J_n = \Big[x(x^2+1)^n\Big]_0^1 - \int_0^1 2nx^2(x^2+1)^{n-1}\,dx$$

$f = (x^2+1)^n$，$g' = 1$

$f' = n(x^2+1)^{n-1}\cdot 2x$，$g = x$

$$= 2^n - \int_0^1 2n(x^2+1-1)(x^2+1)^{n-1}\,dx$$

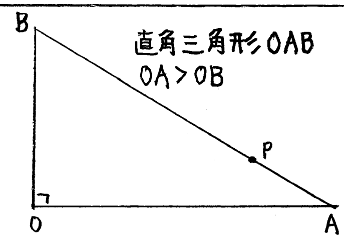
$$= 2^n - 2n\int_0^1 (x^2+1)^n dx + 2n\int_0^1 (x^2+1)^{n-1} dx$$

$$= 2^n - 2nJ_n + 2nJ_{n-1}$$

$(2n+1)J_n = 2^n + 2nJ_{n-1}$　$\therefore\ J_n = \dfrac{2^n + 2nJ_{n-1}}{2n+1}$，$(J_0 = 1,\ n = 1, 2, \cdots)$

更に，$J_n = \displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} {}_n C_k\, x^{2k}\,dx = \sum_{k=0}^{n} {}_n C_k \int_0^1 x^{2k}\,dx = \sum_{k=0}^{n} {}_n C_k \cdot \left[\frac{1}{2k+1}x^{2k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{{}_n C_k}{2k+1}$

[類] (1) 右図、$\angle AOB=90°$である直角三角形OABの辺AB上に、点Pをとり、点Pから辺OAに垂線PHをおろす. $OP+PH$の長さが最小となる点P_0と点H_0を作図せよ. 最小となる理由ものべよ.

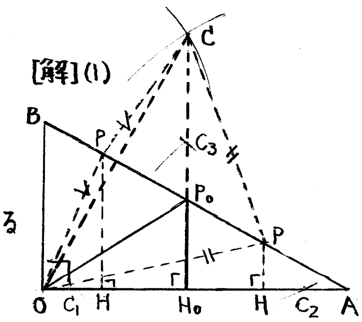


(2) (1)の直角三角形OABが$OA=4$, $OB=3$, $\angle AOB=90°$のとき、最小値$OP_0+P_0H_0$の長さを求めよ.

[考] (1) 辺ABに関して、点Oと対称な点Cをとります.

(2) $\angle AOB=90°$だから、点P_0は、特殊な位置にあり、相似、三平方の定理などが使えます. 点Oを原点とする座標平面を用いることもできます.

[解](1)



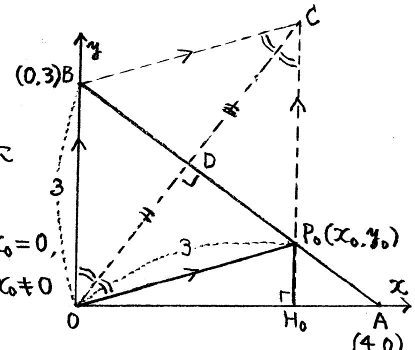
PH⊥OA

[解] (1) 辺ABに関して、点Oと対称な点Cをとり、点Cから、辺OAに垂線CH_0をおろす. 線分CH_0と辺ABの交点をP_0とすればよい. (具体的に、作図する方法は、点Bを中心とする半径BOの円と点Aを中心とする半径AOの円の交点をCとする. 次に、点Cを中心として、辺OAと交わる適当な円を描き、辺OAとの交点をC_1, C_2とする. 点C_1を中心として、適当な半径で円を描き、同じ半径で点C_2を中心として円を描く. 交点をC_3とする. 直線CC_3と辺OAの交点をH_0, 辺ABとの交点をP_0とする)

理由---辺AB上に点P_0と異なる点Pをとり、点Pから辺OAに垂線PHをおろす.

$OP+PH=CP+PH>CH_0=CP_0+P_0H_0=OP_0+P_0H_0$, ∴点Pが点$P_0$に一致するとき最小となる.

(2) (その1) $BO \parallel CP_0$だから、4つの角は等しい. ひし形OP_0CBとなる.



(中にある4つの直角三角形は合同) ∴$OB=OP_0=3$

点$P_0(x_0, y_0)$とすると、直角三角形OH_0P_0に三平方の定理を用いて、$x_0^2+y_0^2=3^2=9$ ---① 直線AB: $y=-\frac{3}{4}x+3$ 上に点$P_0(x_0, y_0)$はあるので、$y_0=-\frac{3}{4}x_0+3$ ---②

②を①に代入 $x_0^2+(-\frac{3}{4}x_0+3)^2=9$, $x_0^2+\frac{9}{16}x_0^2-\frac{18}{4}x_0=0$,

16をかけて $16x_0^2+9x_0^2-72x_0=0$, $25x_0^2-72x_0=0$, $x_0 \neq 0$

$25x_0-72=0$, ∴$x_0=\frac{72}{25}$, ②に入れて、$y_0=-\frac{3}{4}\cdot\frac{72}{25}+3$

$=-\frac{3\cdot 18}{25}+3=3\times\left(-\frac{18}{25}+\frac{25}{25}\right)=3\times\frac{7}{25}=\frac{21}{25}$ ∴ $\underline{OP_0+P_0H_0}=3+y_0=3+\frac{21}{25}=\frac{75+21}{25}=\underline{\frac{96}{25}}$

(補) $OP_0=3$に気付かなくても、対称点Cの座標を求めるとよいことですが、---- 直線OCの傾きは、直線AB, $y=-\frac{3}{4}x+3$ ---① に垂直だから $\frac{4}{3}$ ∴直線OCは $y=\frac{4}{3}x$ ---② ①, ②を連立して、[解](2)(その1)の図、点Dの座標を求める. $-\frac{3}{4}x+3=\frac{4}{3}x$, $-9x+36=16x$, $25x=36$, $x=\frac{36}{25}$

$y=\frac{4}{3}\times\frac{36}{25}=\frac{48}{25}$ ∴点$D\left(\frac{36}{25}, \frac{48}{25}\right)$. $\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}\overset{※}{=}2\left(\frac{36}{25}, \frac{48}{25}\right)=\left(\frac{72}{25}, \frac{96}{25}\right)$ ≡点Cの座標

※vector (高校)ですが、何となく理解はできるでしょう. (中学では、中点の座標の公式ですね)

次頁に続く

前頁(補)の続き、点P_0のx座標は、点Cのx座標$\frac{72}{25}$と同じであり、①に入れて $y=-\frac{3}{4}\times\frac{72}{25}+3$

$=3\left(-\frac{18}{25}+1\right)=3\times\frac{7}{25}=\frac{21}{25}$ ∴点$P_0\left(\frac{72}{25},\frac{21}{25}\right)$

三平方の定理(というより、2点間の距離の公式)より、$OP_0=\sqrt{\left(\frac{72}{25}\right)^2+\left(\frac{21}{25}\right)^2}=\frac{\sqrt{3^2\times24^2+3^2\times7^2}}{25}$

$=\frac{3\sqrt{576+49}}{25}=\frac{3\sqrt{625}}{25}=\frac{3\sqrt{25^2}}{25}=3$，$P_0H_0=P_0$の$y$座標$\frac{21}{25}$ だから $\underline{OP_0+P_0H_0}=3+\frac{21}{25}=\underline{\frac{96}{25}}$

(2)(その2) (2)(その1)2行目 ∴$OB=OP_0=3$ までは同じ(目標はP_0H_0の長さを求めること)

直角三角形OABの面積を2通りで表して $\frac{OA\times OB}{2}=\frac{AB\times OD}{2}$

$4\times3=5\times OD$，$OD=\frac{12}{5}$，直角三角形OAB∽直角三角形DOBの

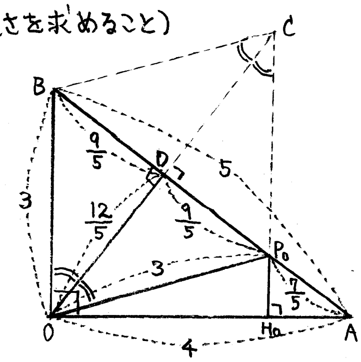
辺の比より、$BO:OA=BD:DO$，$3:4=BD:\frac{12}{5}$，$4\times BD=\frac{12\times3}{5}$

∴$BD=\frac{9}{5}$，$BP_0=2\times BD=2\times\frac{9}{5}=\frac{18}{5}$，$AP_0=AB-BP_0=5-\frac{18}{5}=\frac{7}{5}$

直角三角形OAB∽直角三角形H_0AP_0 より $BO:P_0H_0=AB:AP_0$

$3:P_0H_0=5:\frac{7}{5}=25:7$，$25\times P_0H_0=3\times7$，∴$P_0H_0=\frac{21}{25}$

よって $\underline{OP_0+P_0H_0}=3+\frac{21}{25}=\underline{\frac{96}{25}}$



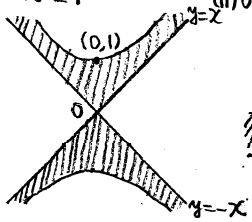
注、なるべく、三平方の定理は、用いないこと、相似の利用，面積の利用，具体的数値でなくて、
a，bなどの文字の場合は、三平方の定理を用いる方が、わかりやすくなる場合もあります。

[補] OA=8，OB=6 の場合の設問がありました。OA=4，OB=3 として解いて、結果を2倍すれば、解です。

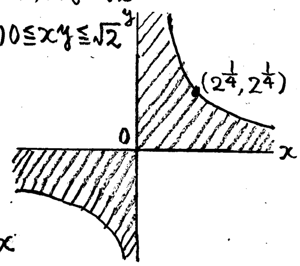
[解] (1) 領域の境界は、$0\leqq y^2-x^2\leqq 1$ のとき $(x+y)(x-y)=0$ ∴ $y=\pm x$, $x^2-y^2=-1$

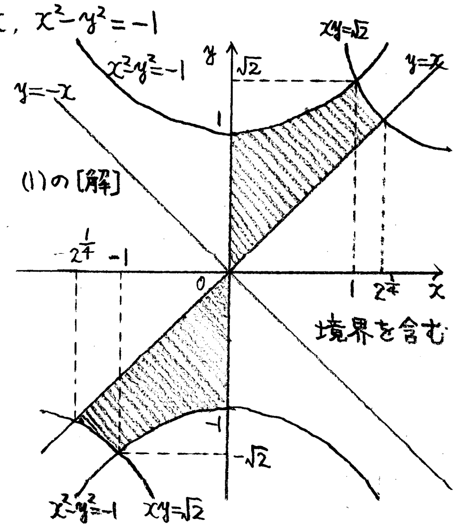
$0\leqq xy\leqq\sqrt{2}$ は、$x=0$, $y=0$, $xy=\sqrt{2}$

(i) $0\leqq y^2-x^2\leqq 1$



(ii) $0\leqq xy\leqq\sqrt{2}$





(2) $\dfrac{S}{2}=\displaystyle\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx+\int_1^{2^{\frac{1}{4}}}\frac{\sqrt{2}}{x}\,dx-\frac{2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)}{2}+\sqrt{2}\left[\log x\right]_1^{2^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (∵[考]例利用)

∴ $S=\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)+2\sqrt{2}\log 2^{\frac{1}{4}}-\sqrt{2}$

$=\log(\sqrt{2}+1)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\log 2=\underline{\log(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}\log\sqrt{2}}$

$xy=\sqrt{2}$ と $x^2-y^2=-1$ の交点

$x^2-\dfrac{2}{x^2}=-1$, $x^4+x^2-2=0$

$(x^2+2)(x^2-1)=0$, $x=\pm1$

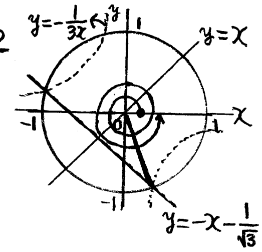
[類1] $\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}=\sqrt{3}$ ----(条件A)が成り立つとき、次の各問いに答えよ。
(1) $\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ　(2) $\sin^4\theta+\cos^4\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta$ の値を求めよ。
(3) (条件A)に加えて、さらに $-2\pi\leqq\theta\leqq2\pi$ かつ $\sin\theta<\cos\theta$ をみたす θ の個数を求めよ。

[考](3) $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\sqrt{3}$ と $x^2+y^2=1$ のグラフの交点を調べると、$(\cos\theta,\sin\theta)$ の定義より、θ の個数は、わかります。
[補1]は、さておき、[補2]を[解]としては、どうでしょうか。更に[類2]を解いて下さい。

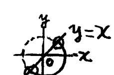
[解](1) $\sin\theta=y$, $\cos\theta=x$ とおく。$x^2+y^2=1$, $\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)^2=3$, $\frac{(x+y)^2}{(xy)^2}=3$, $x^2+y^2+2xy=3(xy)^2$, $x^2+y^2=1$,
$3(xy)^2-2(xy)-1=0$, $(3xy+1)(xy-1)=0$, $xy=1$ のとき $1=\sin\theta\cos\theta=\frac{\sin 2\theta}{2}$, $\sin 2\theta=2$
となって、$-1\leqq\sin2\theta\leqq1$ に不適 $\therefore 3xy+1=0$ $\therefore xy=\underline{\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{3}}$

(2) (条件A)より $\frac{x+y}{xy}=\sqrt{3}$, $x+y=\sqrt{3}xy=\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$
与式 $=y^4+x^4+xy=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2+xy=1-2\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{2}{9}-\frac{3}{9}=\underline{\frac{4}{9}}$

(3) 解と係数の関係より、$x(=\cos\theta)$, $y(=\sin\theta)$ は、2次式 $t^2+\frac{1}{\sqrt{3}}t-\frac{1}{3}=0$ の解である。
($\because$ (1),(2)より $xy=-\frac{1}{3}$, $x+y=-\frac{1}{\sqrt{3}}$), $y<x$ ($\sin\theta<\cos\theta$) より $t=\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}\pm\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}\right\}$
$=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{15}}{6}$ $\therefore (x,y)=\left(\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6},-\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}\right)$ この点は、第IV象限の点である。
$-2\pi\leqq\theta\leqq2\pi$ より、$-\frac{\pi}{2}<\theta<-\frac{\pi}{4}$ に1つ、$\frac{3}{2}\pi<\theta<\frac{7}{4}\pi$ に1つ $\underline{\theta\text{の解は、}2\text{つ}}$

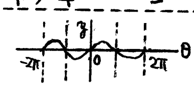


[補1] $y=f(\theta)=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}$, $-2\pi\leqq\theta\leqq2\pi$, 更に $\sin\theta<\cos\theta$ より

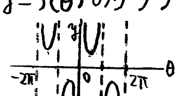


$\underline{-\frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{\pi}{4}}$, $\underline{\frac{5}{4}\pi<\theta\leqq2\pi}$, 波線の範囲で、$y=f(\theta)$ のグラフをかいてみる。

① $y=\sin\theta$

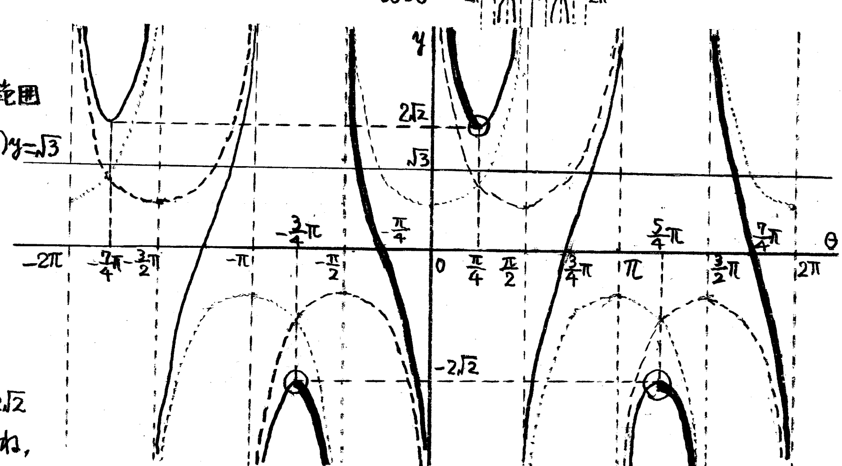


→ ①' $y=\frac{1}{\sin\theta}$



②' $y=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\sin(\theta+\frac{\pi}{2})}$ ①'をθ軸方向に$-\frac{\pi}{2}$平行移動 ②' $y=\frac{1}{\cos\theta}$

①'+②' $y=f(\theta)=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}$
$-\frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi<\theta\leqq2\pi$ の範囲
のグラフは右最太実線(白丸除く)
ここで、直線 $y=\sqrt{3}$ との交点を
調べると、θ の解は、
$-\frac{\pi}{2}<\theta<-\frac{\pi}{4}$ に1つ、
$\frac{3}{2}\pi<\theta<\frac{7}{4}\pi$ に1つ
計、2つあることがわかる。

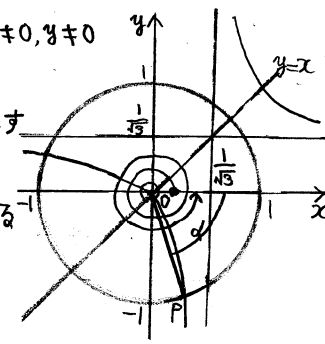


[問] $-2\pi\leqq\theta\leqq2\pi$ の範囲で $f(\theta)=2\sqrt{2}$
を解けば、6つの解がありますね。
Try! $\underline{\text{答. } -\frac{13}{12}\pi, -\frac{5}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi, -\frac{7}{4}\pi, \frac{\pi}{4}}$

(補2)(3) $\sin\theta=y$, $\cos\theta=x$、とおき $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\sqrt{3}$ かつ $x^2+y^2=1$ の交点のうち $y<x$ をみたす交点を求める。

$\frac{x+y}{xy}=\sqrt{3}$, $\sqrt{3}xy=x+y$, $xy-\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}y=0$, $(x-\frac{1}{\sqrt{3}})(y-\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{1}{3}$, $x\neq0, y\neq0$

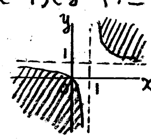
このグラフは、$xy=\frac{1}{3}$(双曲線)のグラフを x 軸方向に $\frac{1}{\sqrt{3}}$, y 軸方向に $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 平行移動したものである。$x^2+y^2=1$ との交点は、2個できるが $y<x$ をみたす交点は、図の点Pただ1つである。$\angle POx=\alpha$, α は正の鋭角とおくと、$\cos\theta$, $\sin\theta$ の定義より、求める $-2\pi\leqq\theta\leqq2\pi$ をみたす θ は $-\alpha$, $2\pi-\alpha$ の2個ある。

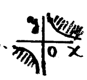
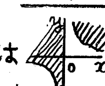


(問) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqq1$ の領域を図示せよ。

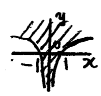
境界は、$(x-1)(y-1)=1$ (双曲線)と直線 $x=0$ と直線 $y=0$ である。

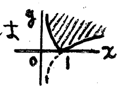
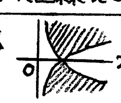
注、$(x-1)(y-1)\geqq1$ の領域との違いに注意

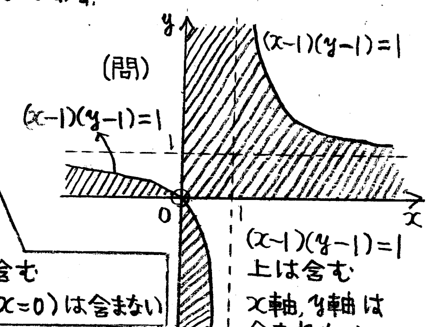

境界を含む

• $xy\geqq1$ は、 境界を含むですが $y\geqq\frac{1}{x}$ は 

$xy=1$ 上は含む
y 軸(直線 $x=0$)は含まない

• $y\geqq\log x^2$ は $y\geqq2\log|x|$  y 軸は含まない 境界は含む

• $y\geqq2|\log x|$ は  境界を含む　• $|y|\geqq2|\log x|$ は 



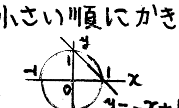
$(x-1)(y-1)=1$ 上は含む
x 軸, y 軸は含まれない
原点は含まれない

[類2] 次の三角方程式(1),(2)を $-2\pi\leqq\theta\leqq2\pi$ の範囲で解き、小さい順にかき並べよ。

(1) $\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=2\sqrt{2}$　(2) $\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}=2\sqrt{2}$

[考] 例1 $\cos\theta+\sin\theta=1$ を $-2\pi\leqq\theta\leqq2\pi$ の範囲でさまざまな方法で解き、小さい順にかき並べよ

(カイ.1) $\cos\theta=x$, $\sin\theta=y$ とおく、$x+y=1$, $x^2+y^2=1$ の交点を調べる。

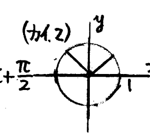


(一般角で無くても解はすぐに求まるが)

一般角で解けば (i) $\theta=2n\pi$ のとき $-2\pi, 0, 2\pi$, (ii) $\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ のとき $-2\pi+\frac{\pi}{2}=-\frac{3}{2}\pi$, $\frac{\pi}{2}$

よって求める解は、$-2\pi, -\frac{3}{2}\pi, 0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$

(カイ.2) 合成 $\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=1$, $\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta+\frac{\pi}{4}=2n\pi+\frac{\pi}{4}$, $2n\pi+\frac{3}{4}\pi$, $\theta=2n\pi$, $2n\pi+\frac{\pi}{2}$

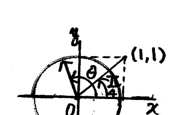


以下(カイ.1)に同じ

(カイ.3) 和→積 $\cos\theta+\sin\theta=\cos\theta+\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=2\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{2\theta-\frac{\pi}{2}}{2}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})=1$

$\cos(\theta-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta-\frac{\pi}{4}=2n\pi+\frac{\pi}{4}$, $2n\pi-\frac{\pi}{4}$, $\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$, $2n\pi$　以下(カイ.1)に同じ

(カイ.4) vector 内積 $\binom{1}{1}\binom{\cos\theta}{\sin\theta}=1$, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})=1$, $\cos(\theta-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}$

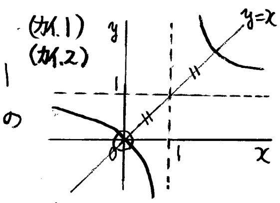


以下(カイ.3)に同じ

(カイ.5) $x+y=1$, $x^2+y^2=1$, $(x+y)^2-2xy=1$, $1^2-2xy=1$, $xy=0$, 解と係数の関係より、

x, y は $t^2-t=0$ の解 $(x,y)=(1,0),(0,1)$ ∴ $\theta=2n\pi$, $2n\pi+\frac{\pi}{2}$　以下(カイ.1)に同じ

例2 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ のグラフ



(カイ.1) 両辺にxyをかけて $x+y=xy$, $x\neq0,\ y\neq0$　$xy-x-y=0$, $(x-1)(y-1)=1$

$xy=1$ (双曲線)のグラフをx軸方向に1, y軸方向に1平行移動したもの

(カイ.2) $x+y=xy$, $x\neq0,\ y\neq0$, $y(x-1)=x$, $x=1$ ならば, yの値が存在しない. ∴$x\neq1$

$y=\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$

[類2] 本題の鍵

(1)が解ければ, (2)は(1)を利用できます. (1)は, 一般解を求めましょう. (2)は, $-\cos\theta=-\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin(\theta-\frac{\pi}{2})$

$\sin\theta=\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos(\theta-\frac{\pi}{2})$ または $-\cos\theta=\cos(\pi-\theta)$, $\sin\theta=\sin(\pi-\theta)$ を利用します.

[解] (1) $\sin\theta=y$, $\cos\theta=x$ とおく. $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=2\sqrt{2}$, $x^2+y^2=1$, $x+y=2\sqrt{2}xy$, $x\neq0$, $y\neq0$, $(x+y)^2=8(xy)^2$,

$8(xy)^2-2xy-(x^2+y^2)=0$, $8(xy)^2-2(xy)-1=0$, $(4xy+1)(2xy-1)=0$

(i) $xy=\frac{1}{2}$ のとき $x+y=2\sqrt{2}xy=\sqrt{2}$, 解と係数の関係より, x,y は $t^2-\sqrt{2}t+\frac{1}{2}=0$ の実数解

$(t-\frac{1}{\sqrt{2}})^2=0$ ∴$(x,y)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ ∴$\theta=2n\pi+\frac{\pi}{4}$ (nは整数)《$(\cos\theta,\sin\theta)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$》

(ii) $xy=-\frac{1}{4}$ のとき $x+y=2\sqrt{2}\times(-\frac{1}{4})=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 解と係数の関係より x,y は $t^2+\frac{1}{\sqrt{2}}t-\frac{1}{4}=0$ の実数解

$t=\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}+1}\right\}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$　$(x,y)=(\cos\theta,\sin\theta)=\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right),\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$

このようなθは求まらないので, [補] $\cos\theta+\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ---① かつ $\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$ ---② をみたすθ

を求める. 右グラフより, 座標は, 点P_1, 点P_2であるから, ①を解けばよい.

合成して $\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}$ [補] $\frac{\pi}{12}$の三角に気付く?

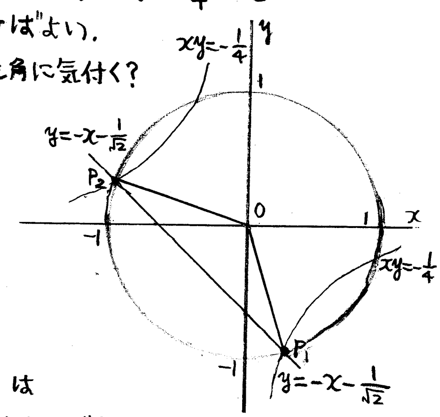
∴$\theta+\frac{\pi}{4}=2n\pi-\frac{\pi}{6}$ または, $\theta+\frac{\pi}{4}=2n\pi-\frac{5}{6}\pi$

$\theta=2n\pi-\frac{5}{12}\pi$, $\theta=2n\pi-\frac{13}{12}\pi$

$-2\pi\leqq\theta\leqq2\pi$ では, (i)より $-2\pi+\frac{\pi}{4}=-\frac{7}{4}\pi$, $\frac{\pi}{4}$,

(ii)より $-\frac{5}{12}\pi$, $2\pi-\frac{5}{12}\pi=\frac{19}{12}\pi$, $-\frac{13}{12}\pi$, $2\pi-\frac{13}{12}\pi=\frac{11}{12}\pi$

小さい順に並べて $-\frac{7}{4}\pi,\ -\frac{13}{12}\pi,\ -\frac{5}{12}\pi,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{11}{12}\pi,\ \frac{19}{12}\pi$



(2) $\sin\theta=\cos(\theta-\frac{\pi}{2})$, $-\cos\theta=\sin(\theta-\frac{\pi}{2})$ なので $\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}=2\sqrt{2}$ は

$\frac{1}{\cos(\theta-\frac{\pi}{2})}+\frac{1}{\sin(\theta-\frac{\pi}{2})}=2\sqrt{2}$ となる. これは(1)のθに$\theta-\frac{\pi}{2}$を入れたものである.

よって, θの一般解は, $\theta-\frac{\pi}{2}=2n\pi+\frac{\pi}{4}$, $\theta=2n\pi+\frac{3}{4}\pi$, $\theta-\frac{\pi}{2}=2n\pi-\frac{5}{12}\pi$, $\theta=2n\pi+\frac{\pi}{12}$

$\theta-\frac{\pi}{2}=2n\pi-\frac{13}{12}\pi$, $\theta=2n\pi-\frac{7}{12}\pi$, したがって $-2\pi\leqq\theta\leqq2\pi$ の範囲では,

$-2\pi+\frac{3}{4}\pi=-\frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $-2\pi+\frac{\pi}{12}=-\frac{23}{12}\pi$, $\frac{\pi}{12}$, $-\frac{7}{12}\pi$, $2\pi-\frac{7}{12}\pi=\frac{17}{12}\pi$

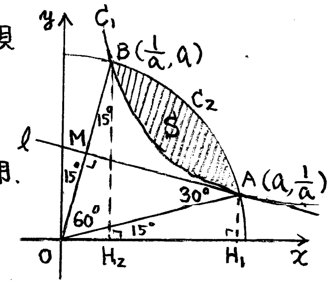
小さい順に並べると, $-\frac{23}{12}\pi,\ -\frac{5}{4}\pi,\ -\frac{7}{12}\pi,\ \frac{\pi}{12},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{17}{12}\pi$

(問) $\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}$ のθの一般解を整数nの1つの式で表せ

(カイ) $\pi+\frac{\pi}{6}$, $2\pi-\frac{\pi}{6}$, $3\pi+\frac{\pi}{6}$, $4\pi-\frac{\pi}{6}$, $5\pi+\frac{\pi}{6}$, ---- だから $\theta+\frac{\pi}{4}=n\pi+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}$ ∴$\theta=n\pi+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}$

nは, 0以下の整数でも成立　　nは整数

[類2] 双曲線 $y=\frac{1}{x}$ の第I象限にある部分と原点中心の第I象限にある部分をそれぞれ C_1, C_2 とする．C_1 と C_2 は異なる2点 A，B で交わり，点 A における C_1 の接線 l と線分 OA のなす角は，$\frac{\pi}{6}$ である．C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ．



[考1] 円 C_2 の半径，∠AOB の大きさ，を定めなければなりません．角度は，定三角定規に，関係する角度である筈？．直線 $y=x$ に関する対称性から，$A(a, \frac{1}{a})$ $B(\frac{1}{a}, a)$，接線 l の傾き，OB の傾き，を考える．∠AOB が求まりますねぇ～．次に円 C_2 の半径が求まります．次は「架け橋」P.1の(2)，P.2の(18)ウ下の利用．

[解1] $A(a, \frac{1}{a})$ とおけば，直線 $y=x$ に関する対称性から，$B(\frac{1}{a}, a)$ とおける．

$y=\frac{1}{x}$，$y'=-\frac{1}{x^2}$ より，点 $A(a, \frac{1}{a})$ における接線 l の傾きは，$-\frac{1}{a^2}$，OB の傾きは，$\frac{a}{\frac{1}{a}}=a^2$ だから $(-\frac{1}{a^2})\times a^2=-1$ より，接線 l と OB は垂直に交わる．接線 l と OB の交点を M とすると，∠OMA＝90°，∠OAM＝30° より ∠AOB＝60°，正三角形 OAB となる．円 C_2 の半径を r とすると，OA＝AB＝r より，

$a^2+\frac{1}{a^2}=(a-\frac{1}{a})^2+(\frac{1}{a}-a)^2=2(a-\frac{1}{a})^2=2a^2-4+\frac{2}{a^2}=r^2$，$\therefore a^2+\frac{1}{a^2}=4=r^2$ $\therefore r=2$．

点 A，点 B から，x 軸上に，それぞれ垂線 AH_1，BH_2 をおろす．図形 OAB の面積を S' とすると，

S'＋直角三角形 AOH_1＝図形 BH_2H_1A＋直角三角形 BOH_2，直角三角形 AOH_1＝直角三角形 BOH_2，

よって S'＝図形 $BH_2H_1A=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{1}{x}dx=[\log x]_{\frac{1}{a}}^{a}=\log a-\log\frac{1}{a}=\log a+\log a=2\log a=\log a^2$

$xy=1$ と $x^2+y^2=4$ の交点の x 座標が a だから，$a^2+\frac{1}{a^2}=4$，$a^4-4a^2+1=0$，$a^2=2\pm\sqrt{3}$ であるが，

$\angle AOH_1=15°$ より，$\frac{1}{a^2}=2-\sqrt{3}$ であり，$a^2=2+\sqrt{3}$ $\therefore S'=\log(2+\sqrt{3})$

求める面積 S＝扇形 OAB $-S'=\frac{1}{2}r^2\times\frac{\pi}{3}-S'=\frac{4}{2}\times\frac{\pi}{3}-\log(2+\sqrt{3})=\underline{\frac{2}{3}\pi-\log(2+\sqrt{3})}$

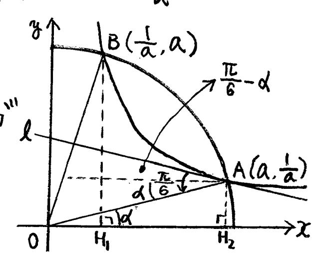
(補)「架け橋」P.1の(2)が効きました．図形的考察を忘れてはなりません．

[考2] 数式で，点 A，点 B の座標を求める．角度 $\frac{\pi}{6}$ をどのように処理するか．$A(a, \frac{1}{a})$，$\overrightarrow{AO}=-a-\frac{1}{a}i$

接線 l の方向を表す複素数は，$y'=-\frac{1}{x^2}$，傾き $-\frac{1}{a^2}$ $\therefore -a^2+i$

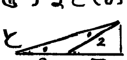
$\arg\frac{-a-\frac{1}{a}i}{-a^2+i}=\frac{\pi}{6}$ により a が求まり，円の半径 r＝OA，[考1]の図を参照して，

$S'=\triangle BOH_2$＋図形 $BH_2H_1A-\triangle AOH_1$＝図形 BH_2H_1A，(補)に極方程式による S' が求めてあります．積分計算演習と思って下さい．a の値は，傾きを tan で表して，加法定理を用いても求まります．一般には，この方法ですが．[補]



$\tan\alpha=\frac{\frac{1}{a}}{a}=\frac{1}{a^2}$，接線 l の傾き $\tan(\pi-(\frac{\pi}{6}-\alpha))=-\frac{1}{a^2}\Leftrightarrow-\tan(\frac{\pi}{6}-\alpha)=-\frac{1}{a^2}$

∠AOB が有名角であると予想すると（おそらく60°）AB＝OA を調べてみることになります．

または，$\angle AOx=15°$？ とすると  を利用して，$\tan 15°=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$ でしょう．[解2] は，次頁

[解2] 点A$(a,\frac{1}{a})$, 点B$(\frac{1}{a},a)$とする. $\overrightarrow{AO}=-a-\frac{1}{a}i$, 接線$l$の方向を表す複素数は, $y'=-\frac{1}{x^2}$, 傾き$-\frac{1}{a^2}$

∴ $-a^2+i$　$\arg\frac{-a-\frac{1}{a}i}{-a^2+i}=\frac{\pi}{6}$, $\arg\frac{(-a-\frac{1}{a}i)(-a^2-i)}{a^4+1}=\frac{\pi}{6}$, $\arg\{(a^3-\frac{1}{a})+2ai\}=\frac{\pi}{6}$

$(a^3-\frac{1}{a})+2ai=k(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}k+\frac{1}{2}ki$　∴ $a^3-\frac{1}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}k$, $2a=\frac{1}{2}k$,

$a^3-\frac{1}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4a=2\sqrt{3}a$, $a^4-2\sqrt{3}a^2-1=0$, $a^2=\sqrt{3}\pm\sqrt{4}=\sqrt{3}\pm 2$, $a^2>0$ ∴ $a^2=2+\sqrt{3}$

円の半径 $r^2=a^2+\frac{1}{a^2}=2+\sqrt{3}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})=4$ ∴ $r=2$

ここで, $AB^2=(a-\frac{1}{a})^2+(\frac{1}{a}-a)^2=2(a-\frac{1}{a})^2=2(a^2+\frac{1}{a^2}-2)=2(4-2)=4=r^2$

∴ $OA=OB=AB(=2)$となり, 正三角形OAB.

図形OAB$^{B}_{O\,A}$ $=\triangle BOH_1+$図形$^{B}_{H_1H_2}A-\triangle AOH_2=$図形$^{B}_{H_1H_2}A=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{1}{x}dx=[\log x]_{\frac{1}{a}}^{a}=\log a-\log\frac{1}{a}$

$=\log a+\log a=\log a^2=\log(2+\sqrt{3})$

よって, 求める面積 $S=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}-\log(2+\sqrt{3})=\underline{\frac{2}{3}\pi-\log(2+\sqrt{3})}$

[補] $\angle AOx=\alpha$とおく. OAの傾き$\tan\alpha=\frac{\frac{1}{a}}{a}=\frac{1}{a^2}$, 接線$l$の傾き $\tan\{\pi-(\frac{\pi}{6}-\alpha)\}=-\frac{1}{a^2}$,

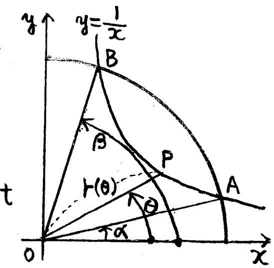
$-\tan(\frac{\pi}{6}-\alpha)=-\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^2}=\tan(\frac{\pi}{6}-\alpha)=\frac{\tan\frac{\pi}{6}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{6}\tan\alpha}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{a^2}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{a^2}}=\frac{a^2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a^2+1}$

$a^2(a^2-\sqrt{3})=\sqrt{3}a^2+1$, $a^4-2\sqrt{3}a^2-1=0$ ∴ $a^2=\sqrt{3}\pm\sqrt{4}=\sqrt{3}\pm 2$, $a^2>0$ ∴ $a^2=2+\sqrt{3}$

[補] 双曲線$y=\frac{1}{x}\ (x>0)$上の点Pとする. $\angle POx=\theta$, $OP=r(\theta)$とすれば,

点P$(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)$であり, $r(\theta)\sin\theta=\frac{1}{r(\theta)\cos\theta}$, $(r(\theta))^2\sin\theta\cos\theta=1$,

$(r(\theta))^2=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{2}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{2}{\sin 2\theta}$



$\angle AOx=\alpha$, $\angle BOx=\beta$

図形$^{B}_{O\,A}$ $=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(r(\theta))^2d\theta=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{2}{\sin 2\theta}d\theta=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\sin 2\theta}d\theta$

$\begin{cases}\cos 2\theta=t\\ \frac{dt}{d\theta}=-2\sin 2\theta\\ \sin 2\theta\,d\theta=-\frac{1}{2}dt\end{cases}$

$f(\theta)=\int\frac{1}{\sin 2\theta}d\theta=\int\frac{\sin 2\theta}{(\sin 2\theta)^2}d\theta=\int\frac{\sin 2\theta}{1-(\cos 2\theta)^2}d\theta=\int\frac{1}{1-t^2}\cdot(-\frac{1}{2})dt$

$=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{2}(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t})dt=-\frac{1}{4}(\log(1+t)-\log(1-t))=\frac{1}{4}\log\frac{1-t}{1+t}$

$=\frac{1}{4}\log\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}=\frac{1}{4}\log\frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}=\frac{1}{4}\log(\tan\theta)^2=\frac{1}{2}\log(\tan\theta)$

よって, 図形$^{B}_{O\,A}$ $=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\sin 2\theta}d\theta=\frac{1}{2}[\log(\tan\theta)]_{\alpha}^{\beta}=\frac{1}{2}(\log(\tan\beta)-\log(\tan\alpha))=\frac{1}{2}\log(\frac{\tan\beta}{\tan\alpha})$

$\tan\alpha=\frac{\frac{1}{a}}{a}=\frac{1}{a^2}$, $\tan\beta=\frac{a}{\frac{1}{a}}=a^2$, $\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}=\frac{a^2}{\frac{1}{a^2}}=a^4=(a^2)^2=(2+\sqrt{3})^2$なので

図形$^{B}_{O\,A}$ $=\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})^2=\log(2+\sqrt{3})$　troublesomeな計算でしたが, 積分演習には, いいね.

- 更に $\int\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}d\theta=\int\frac{\cos\theta}{\sin\theta\cos^2\theta}d\theta=\int\frac{\cos\theta}{\sin\theta(1-\sin^2\theta)}d\theta=\int\frac{1}{t(1-t^2)}dt$　$(t=\sin\theta,\ dt=\cos\theta d\theta)$

$=\int(\frac{1}{t}+\frac{t}{1-t^2})dt=\log t-\frac{1}{2}\log(1-t^2)=\log(\sin\theta)-\frac{1}{2}\log(1-\sin^2\theta)=\log(\sin\theta)-\frac{1}{2}\log(\cos\theta)^2$

$=\log(\sin\theta)-\log(\cos\theta)=\log(\frac{\sin\theta}{\cos\theta})=\log(\tan\theta)$

- 何となく. $\{\log(\tan\theta)\}'=\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{\tan\theta}=\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta\cos^2\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$　∴ $\int\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}d\theta=\log(\tan\theta)$

南山 理系

[類4] nを正の整数とする. 3次方程式 $x^3+3nx^2-(3n+2)=0$ について, 次の問いに答えよ.
(1) すべての正の整数nについて, 上の3次方程式は, 正の解をただ1つしかもたないことを証明せよ
(2) 各正の整数nに対して, 上の3次方程式の正の解をa_nとする. 極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

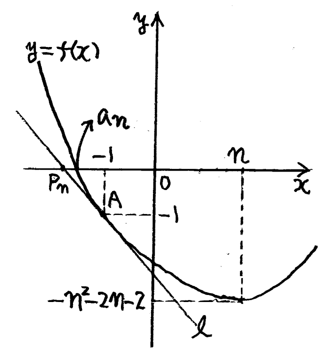
[考] 例 nを自然数とする. 2次方程式 $x^2-2nx-2n-2=0$ の2つの実数解のうち, 小さい方の解をa_nとする. $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(カイ.1) $a_n^2-2na_n-2n-2=0$, $a_n=n-\sqrt{n^2+2n+2}=\dfrac{(n-\sqrt{n^2+2n+2})(n+\sqrt{n^2+2n+2})}{n+\sqrt{n^2+2n+2}}$

$=\dfrac{n^2-(n^2+2n+2)}{n+\sqrt{n^2+2n+2}}=\dfrac{-2n-2}{n+\sqrt{n^2+2n+2}}=\dfrac{-2-\frac{2}{n}}{1+\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}}\to\dfrac{-2}{1+\sqrt{1}}=-1$ ($n\to\infty$のとき)

$\therefore \underline{\lim_{n\to\infty} a_n=-1}$

(カイ.2) $y=f(x)=x^2-2nx-2n-2=x^2-2-2n(x+1)$ を考える. この2次関数は, 自然数nにかかわらず, 点A$(-1,-1)$を通る. $f'(x)=2x-2n=2(x-n)$
$f''(x)=2>0$ だから, 下に凸な関数であり, $x\leqq n$ では $f'(x)\leqq 0$ だから, 減少関数である. 点A$(-1,-1)$における, 接線lの式は,
$y=2(-1-n)(x+1)-1=-2(n+1)(x+1)-1$, この直線$l$と$x$軸との交点の$x$座標を$P_n$とすれば, $0=-2(n+1)(P_n+1)-1$
$2(n+1)(P_n+1)=-1$, $P_n+1=-\dfrac{1}{2(n+1)}$, $P_n=-1-\dfrac{1}{2(n+1)}$
$P_n=-1-\dfrac{1}{2(n+1)}<a_n<-1$ であり, $n\to\infty$ のとき $-1-\dfrac{1}{2(n+1)}\to-1$
だから, ハサミウチの原理により, $\underline{\lim_{n\to\infty} a_n=-1}$



(カイ.3) $x^2-2=2n(x+1)$, $x=-1$は解でないので, $n=\dfrac{x^2-2}{2(x+1)}=f(x)$ のグラフを考え, 直線$y=n$との交点のx座標のうち小さい方をa_nとする. (この解に $-1<x$ のグラフは, 必要ありませんが…)

$f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x(x+1)-1\cdot(x^2-2)}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x+2}{2(x+1)^2}$, $x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$ なので, $f'(x)>0$

であり, $f(x)$は増加関数. $f''(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^3}$ (下※)

x	…	-1	…
$f'(x)$	$+$	×	$+$
$f''(x)$	$+$	×	$-$
$f(x)$	↗	×	↗

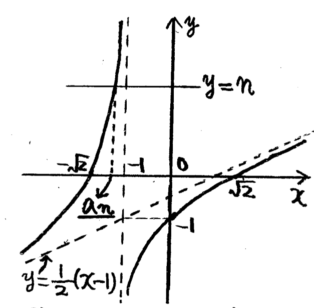
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-\frac{2}{x}}{2(1+\frac{1}{x})}=\pm\infty$ (複号同順)

$\lim_{x\to-1-0} f(x)=\dfrac{-1}{-0}=+\infty$, $\lim_{x\to-1+0} f(x)=\dfrac{-1}{+0}=-\infty$

$y=f(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)-\dfrac{1}{2(x+1)}$,

$x\to\pm\infty$ のとき $-\dfrac{1}{2(x+1)}\to0$ だから漸近線は

$y=\dfrac{1}{2}(x-1)$



この問いに $-1<x$ のグラフは, 必要ありません.

※ $f''(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(2x+2)(x+1)^2-2(x+1)(x^2+2x+2)}{(x+1)^4}=\dfrac{1}{\cancel{2}}\cdot\dfrac{\cancel{2}(x+1)^2-\cancel{2}(x^2+2x+2)}{(x+1)^3}=-\dfrac{1}{(x+1)^3}$

$\underline{a_n}$は, グラフの通りで, $n\to\infty$ のとき $a_n\to-1$ $\therefore \underline{\lim_{n\to\infty} a_n=-1}$

[解1] (1),(2) $y=f(x)=x^3+3nx^2-(3n+2)=(x^3-2)+3n(x^2-1)$ ---㋣ とおく.

$f'(x)=3x^2+6nx=3x(x+2n)$, $f''(x)=6x+6n=6(x+n)$ $(n=1,2,---)$

$x\geqq 0$ のとき $f'(x)\geqq 0$ だから増加関数, $f''(x)>0$ だから下に凸, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $f(0)=-(3n+2)$

更に㋣より, $y=f(x)$ のグラフは, 正の整数 n にかかわらず, 定点 $A(1,-1)$ $((-1,-1))$ を通る.

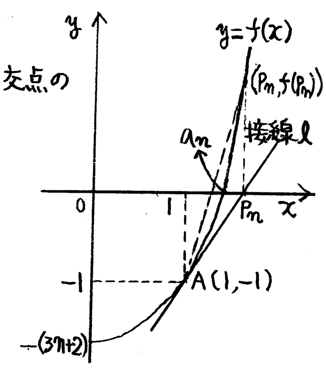
したがって $x\geqq 0$ における $y=f(x)$ のグラフは右のようである. このことから,

3次方程式 $f(x)=0$ は, 正の解 a_n をただ1つしかもたない. $(1<a_n)$

点 $A(1,-1)$ における接線 l は, $y=3(1+2n)(x-1)-1$, 接線 l と x 軸の交点の x 座標を P_n とすれば, $0=3(1+2n)(P_n-1)-1$, $P_n-1=\dfrac{1}{3(1+2n)}$

$P_n=1+\dfrac{1}{3(1+2n)}$, $1<a_n<P_n=1+\dfrac{1}{3(1+2n)}\to 1$ ($n\to\infty$ のとき)

ハサミウチの原理により, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1}$



(補) $x<0$ の解については, この設問には, 関係ありません.

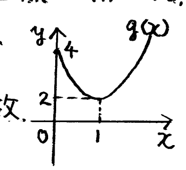
[解2] $x^3+3nx^2-(3n+2)=0$, $3n(x^2-1)=-(x^3-2)$, $x\neq\pm 1$ ($x=\pm 1$ は解でない) ので,

$n=-\dfrac{x^3-2}{3(x^2-1)}=f(x)$ とおく. $f'(x)=-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3x^2(x^2-1)-2x(x^3-2)}{(x^2-1)^2}=-\dfrac{x(x^3-3x+4)}{3(x^2-1)^2}$

$x\geqq 0$ で $y=f(x)$ のグラフを考える. 直線 $y=n$ $(n=1,2,---)$ と $y=f(x)$ の交点の x 座標が a_n である.

$g(x)=x^3-3x+4$ とおく. $g'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$, $0\leqq x\leqq 1$ では $g'(x)<0$, 減少,

$1\leqq x$ では $g'(x)>0$, 増加, 極小値 $g(1)=2$, $g(0)=4$ だから $x\geqq 0$ では, $g(x)$ のグラフは右のよう. $\therefore g(x)>0$ $(x\geqq 0)$ したがって, $x\geqq 0$ では, $f'(x)\leqq 0$ であり, $f(x)$ は減少関数.



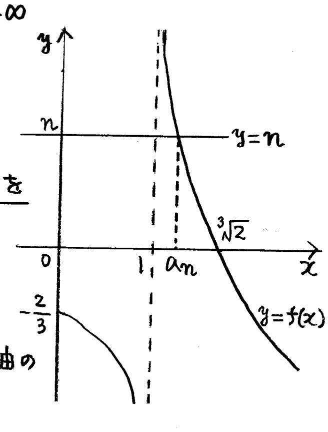
$f(x)$ の増減表

x	0	---	1	---
$f'(x)$	0	$-$	☒	$-$
$f(x)$	$f(0)$	↘	☒	↘

$f(0)=-\dfrac{2}{3}$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}-\dfrac{x-\frac{2}{x^2}}{3(1-\frac{1}{x^2})}=-\dfrac{\infty}{3}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=-\dfrac{-2}{-0}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=-\dfrac{-2}{+0}=+\infty$



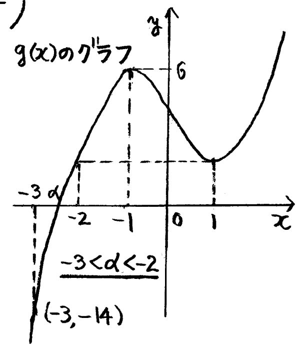
右グラフより, n が正の整数のとき, $f(x)=0$ は, 1より大きい<u>正の解 (a_n) をただ1つしかもたない</u>ことが示されたと同時に $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1}$ がわかる.

[補] 点 $A(1,-1)$ と点 $(P_n, f(P_n))$ を結ぶ直線は, $y=\dfrac{f(P_n)-(-1)}{P_n-1}(x-1)-1$. この直線と x 軸の交点の x 座標は, $x=1+\dfrac{P_n-1}{f(P_n)+1}$ $\therefore 1+\dfrac{P_n-1}{f(P_n)+1}<a_n<P_n$ が成立します.

[問] $y=f(x)=\dfrac{x^3-2}{3(x^2-1)}$ のグラフをかけ. 凹凸は調べなくてもよいが, 漸近線は求めよ. 漸近線を考えると, 凹凸の判断も, ある程度はできる. (カイ)は, P.38の(4),(5)にあります. このような設問が, 大学入試に出ることは, ありません. 出るとすれば, 漸近線と, 変曲点の有無, でしょう.

P.38の(3)(問)の(カイ)です。$y=f(x)=-\frac{x^3-2}{3(x^2-1)}$ のグラフ

(カイ) $y=f(x)=-\frac{x^3-2}{3(x^2-1)}$, $f'(x)=-\frac{x(x^3-3x+4)}{3(x^2-1)^2}$ (前頁参照) $\left(=-\frac{x^4-3x^2+4x}{3(x^2-1)^2}\right)$



$g(x)=x^3-3x+4$ とおく。$g'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

g(x)の増減表

x	---	-1	---	1	---
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	$g(-1)$	↘	$g(1)$	↗

極大値 $g(-1)=6$

極小値 $g(1)=2$

$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim_{x\to\pm\infty} x^3\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)=\pm\infty$ (複号同順)

g(x)のグラフは、右のようであり、$g(-3)=-14$, $g(-2)=2$ だから、$g(x)=0$ は実数解 α $(-3<\alpha<-2)$ をただ1つもつ。($g(\alpha)=\alpha^3-3\alpha+4=0$ ---①)

$f'(x)=-\frac{x(x-\alpha)Q(x)}{3(x^2-1)^2}$ $(-3<\alpha<-2)$　$x^3-3x+4=(x-\alpha)Q(x)$, 2次式 $Q(x)$ の x^2 の係数は1, $Q(x)=0$ の解は虚数, ∴全ての実数 x で $Q(x)>0$

f(x)の増減表

x	---	α	---	-1	---	0	---	1	---
$f'(x)$	$-$	0	$+$	╳	$+$	0	$-$	╳	$-$
$f(x)$	∞ ↘	$f(\alpha)$	↗ ∞	╳	$-\infty$ ↗	$f(0)$	↘ $-\infty$	╳	∞ ↘ $-\infty$

極小値 $f(\alpha)=-\frac{\alpha^3-2}{3(\alpha^2-1)}=-\frac{(3\alpha-4)-2}{3(\alpha^2-1)}=-\frac{\alpha-2}{\alpha^2-1}>0$ (∵①)

極大値 $f(0)=-\frac{2}{3}$

$f(x)=-\frac{x^3-2}{3(x^2-1)}=-\frac{1}{3}x-\frac{x-2}{3(x^2-1)}$ ---②

②より $\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{x-2}{3(x^2-1)}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1-\frac{2}{x}}{3(x-\frac{1}{x})}\right)=\mp 0$ だから、$y=-\frac{1}{3}x$ は漸近線である。

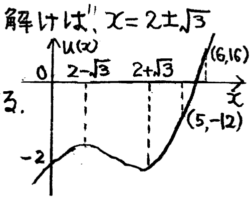
- $x\to\infty$ のとき $y=f(x)$ は、下の方から、$y=-\frac{1}{3}x$ に近付き、$x\to-\infty$ のとき、$y=f(x)$ は、上の方から、$y=-\frac{1}{3}x$ に近付くことがわかる。----Ⓣ
- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}-\frac{x^3-2}{3(x^2-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}-\frac{x-\frac{2}{x^2}}{3(1-\frac{1}{x^2})}=-\frac{\pm\infty}{3}=\mp\infty$ (複号同順)
- $\lim_{x\to-1\pm0} f(x)=\lim_{x\to-1\pm0}-\frac{x^3-2}{3(x^2-1)}=-\frac{-3}{\mp0}=\mp\infty$ (複号同順)
- $\lim_{x\to1\pm0} f(x)=\lim_{x\to1\pm0}-\frac{x^3-2}{3(x^2-1)}=-\frac{-1}{\pm0}=\pm\infty$ (複号同順)
- $y=f(x)=-\frac{x^3-2}{3(x^2-1)}$ と漸近線 $y=-\frac{1}{3}x$ は、$-\frac{x^3-2}{3(x^2-1)}=-\frac{1}{3}x$, $x^3-2=x(x^2-1)=x^3-x$ ∴$x=2$
∴$(2,-\frac{2}{3})$ と一度だけ交わる。---③
- 極小値 $f(\alpha)=-\frac{\alpha-2}{\alpha^2-1}$ は、③から、漸近線 $y=-\frac{1}{3}x$ の上方にある。
- ③とⓉより、$x\to\infty$ のとき、$2<x$ の範囲に、変曲点 $(\beta, f(\beta))$ が存在することがわかる。

(補) $f''(x)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{(4x^3-6x+4)(x^2-1)^2-2(x^2-1)\cdot2x\cdot(x^4-3x^2+4x)}{(x^2-1)^4}=-\frac{1}{3(x^2-1)^3}\{(4x^3-6x+4)(x^2-1)-4x\times(x^4-3x^2+4x)\}=-\frac{1}{3(x^2-1)^3}(4x^5-6x^3+4x^2-4x^3+6x-4-4x^5+12x^3-16x^2)=-\frac{2x^3-12x^2+6x-4}{3(x^2-1)^3}$

$=-\frac{2(x^3-6x^2+3x-2)}{3(x^2-1)^3}$, $u(x)=x^3-6x^2+3x-2$ とおく。x に負の数を入れると $u(x)<0$ よって $u(x)=0$ となる x は、正の数である。($u(0)=-2<0$), $u'(x)=3x^2-12x+3=3(x^2-4x+1)=0$ を解けば、$x=2\pm\sqrt{3}$

$u(x)=x^3-6x^2+3x-2=(x^2-4x+1)(x-2)-6x$, $u(2\pm\sqrt{3})=-6(2\pm\sqrt{3})<0$,

$u(5)=125-150+15-2=-12$, $u(6)=16$, よって、$5<\beta<6$ に変曲点 $(\beta, f(\beta))$ が存在する。



以上をもって、$y=f(x)=-\frac{x^3-2}{3(x^2-1)}$ のグラフは、P.38の(5)(次頁)のようになる。

$y=f(x)=-\dfrac{x^3-2}{3(x^2-1)}$ のグラフ

$f(x)=0$ を解けば、$x=\sqrt[3]{2}$

$f(-3)=-\dfrac{-27-2}{3\cdot 8}=\dfrac{29}{24}$，$f(-2)=-\dfrac{-8-2}{3\cdot 3}=\dfrac{10}{9}$

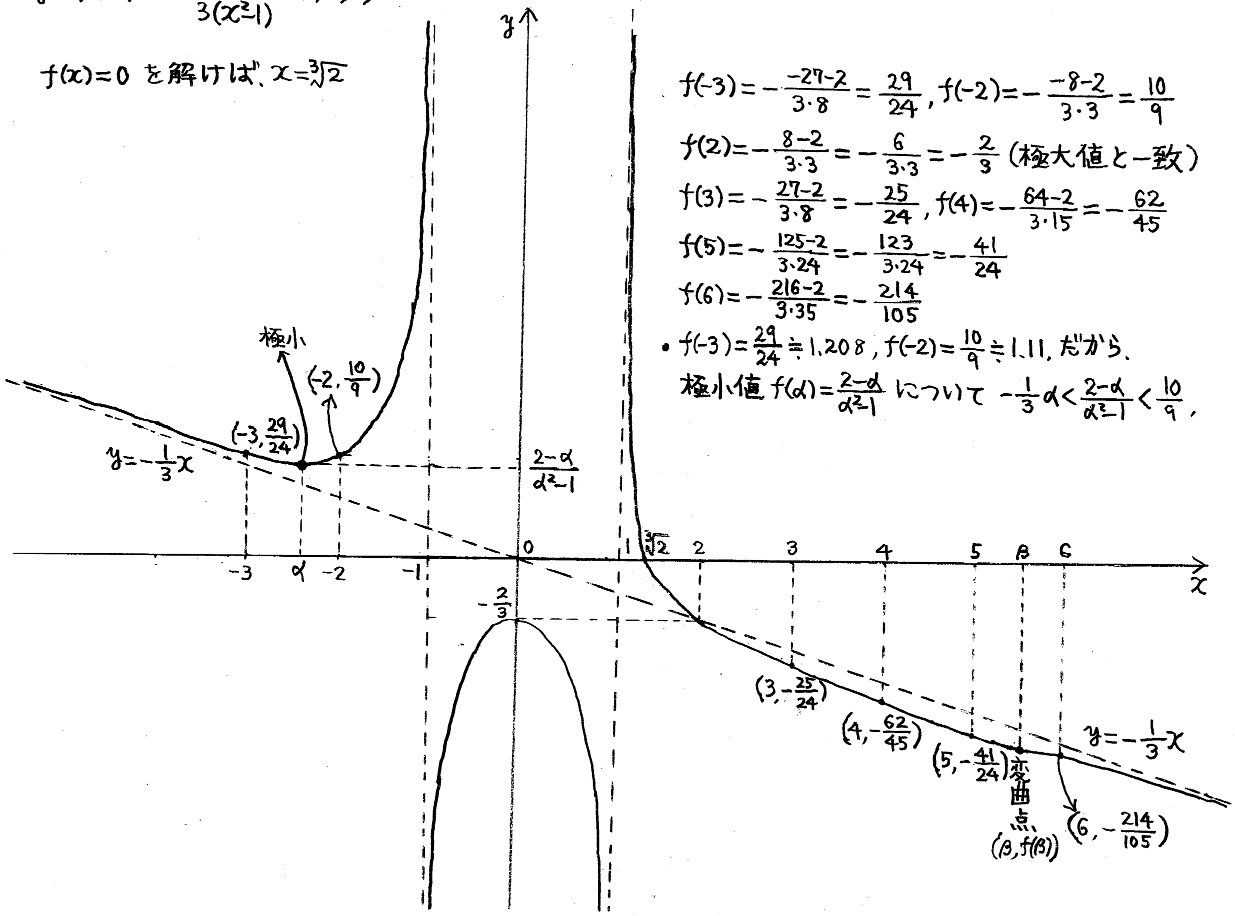
$f(2)=-\dfrac{8-2}{3\cdot 3}=-\dfrac{6}{3\cdot 3}=-\dfrac{2}{3}$ (極大値と一致)

$f(3)=-\dfrac{27-2}{3\cdot 8}=-\dfrac{25}{24}$，$f(4)=-\dfrac{64-2}{3\cdot 15}=-\dfrac{62}{45}$

$f(5)=-\dfrac{125-2}{3\cdot 24}=-\dfrac{123}{3\cdot 24}=-\dfrac{41}{24}$

$f(6)=-\dfrac{216-2}{3\cdot 35}=-\dfrac{214}{105}$

- $f(-3)=\dfrac{29}{24}\fallingdotseq 1.208$，$f(-2)=\dfrac{10}{9}\fallingdotseq 1.11$ だから、
  極小値 $f(\alpha)=\dfrac{2-\alpha}{\alpha^2-1}$ について $-\dfrac{1}{3}\alpha<\dfrac{2-\alpha}{\alpha^2-1}<\dfrac{10}{9}$，



[補] 大学では、もっと詳しく、グラフをかくような課題があります。大学時の山田致知先生(実習解剖学)の解剖実習を思い出しました。今の解剖学と違い、全て、ラテン語(学術用語)で覚えねばならず、実習は、昼1時半頃から始まり、真夜中12時をこえることもたびたびありました。大変だったです。

P. 68 の [補]

$\triangle ABC=\sin 3\theta\cos\theta$ $(0<\theta<\frac{\pi}{3})$ が最大となるときの角を α とすれば、求めるものは $AB=\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=\cdots=3-4\sin^2\alpha$ です。$\sin\alpha$ を求めるとすれば、$\triangle ABC$ は4次式？ そこで、AB を $\cos 2\alpha$ で表して、$\triangle ABC$ も $\cos 2\theta$ で表す。$\triangle ABC$ を最大にする $\cos 2\theta$ を求めれば、よいので $\cos 2\theta=t$ とおき、$0<2\theta<\frac{2}{3}\pi$ だから $\sin 2\theta=\sqrt{1-t^2}$，

$\triangle ABC=\frac{1}{2}(\sin 4\theta+\sin 2\theta)=\frac{1}{2}(2t\sqrt{1-t^2}+\sqrt{1-t^2})=\dfrac{\sqrt{1-t^2}(2t+1)}{2}=f(t)$ とおく，$-\frac{1}{2}<t(=\cos 2\theta)<1$

$f'(t)=\frac{1}{2}\left(\dfrac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}(2t+1)+2\sqrt{1-t^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\dfrac{-t(2t+1)}{\sqrt{1-t^2}}+\dfrac{2(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}\right)=\dfrac{-2t^2-t+2-2t^2}{2\sqrt{1-t^2}}=\dfrac{-(4t^2+t-2)}{2\sqrt{1-t^2}}$

t	$-\frac{1}{2}$	---	$\frac{-1+\sqrt{33}}{8}$	---	1
$f'(t)$	╳	+	0	−	╳
$f(t)$	╳	↗	極大	↘	╳

極大 = 最大 = $f\left(\frac{-1\pm\sqrt{33}}{8}\right)$　$t=\frac{-1+\sqrt{33}}{8}=\cos 2\alpha$

$AB=3-4\sin^2\alpha=3-4\cdot\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}=3-2(1-\cos 2\alpha)=1+2\cos 2\alpha$

$=1+2\cdot\dfrac{-1+\sqrt{33}}{8}=1+\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}=\underline{\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}}$