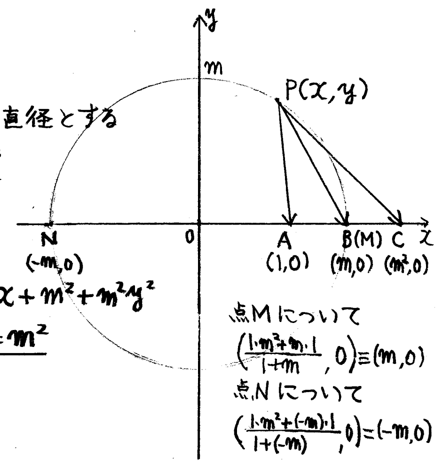
2025年 金沢大学入試問題(理系)解説

[1] 実数 $m>1$ について座標平面上に3点 $A(1,0)$, $B(m,0)$, $C(m^2,0)$ をとる. 点 $P(x,y)$ は, $AP:CP=1:m$ をみたしながら動くとする. 次の問いに答えよ. (1) 点 $P(x,y)$ の軌跡を求めよ
(2) 次の等式を証明せよ、$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=m(m+1)(m-x)$
(3) $y\neq 0$ とする. 点 $P(x,y)$ に対して $\angle APB=\angle BPC$ が成り立つことを示せ

[考] (1) 教科書の基本, アポロニウスの円です.
(2) (1)の式を利用して y を消去
(3) 角の二等分線の定理ですが, 内積を利用してもできます.



[解] (1) $AP:CP=1:m$ $(m>1)$ から, AC を $1:m$ に内分する点 $M(m,0)$, AC を $1:m$ に外分する点 $N(-m,0)$ とすると, 点Pの軌跡は, MNを直径とするアポロニウスの円である. よって求める点Pの軌跡は, $\underline{x^2+y^2=m^2}$

点Mについて $\left(\dfrac{1\cdot m^2+m\cdot 1}{1+m},0\right)=(m,0)$
点Nについて $\left(\dfrac{1\cdot m^2+(-m)\cdot 1}{1+(-m)},0\right)=(-m,0)$

(別解) 点 $P(x,y)$ とすると $AP:CP=1:m$ から $CP^2=m^2AP^2$
$(x-m^2)^2+y^2=m^2\{(x-1)^2+y^2\}$, $x^2-2m^2x+m^4+y^2=m^2x^2-2m^2x+m^2+m^2y^2$
$(1-m^2)x^2+(1-m^2)y^2=m^2(1-m^2)$, $m>1$ から $m^2\neq 1$ $\therefore \underline{x^2+y^2=m^2}$

(2) 左辺 $=\begin{pmatrix} m-x \\ -y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} m^2-x \\ -y\end{pmatrix}=(m-x)(m^2-x)+y^2=(m-x)(m^2-x)+(m^2-x^2)$
$=(m-x)(m^2-x)+(m+x)(m-x)=(m-x)(m^2+m)=m(m+1)(m-x)=$ 右辺 ($\because x^2+y^2=m^2$ より $y^2=m^2-x^2$)

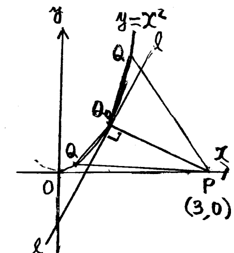
(3) $PA:PC=AB:BC$ が成立すれば, 角の二等分線の定理より $\angle APB=\angle BPC$ が成り立つ.
$PA^2=(x-1)^2+y^2=(x-1)^2+m^2-x^2=-2x+1+m^2$, $PC^2=(x-m^2)^2+y^2=(x-m^2)^2+m^2-x^2=-2m^2x+m^4+m^2$
$=m^2(-2x+1+m^2)$ $\therefore PA^2:PC^2=(-2x+1+m^2):m^2(-2x+1+m^2)=1:m^2$ $\therefore PA:PC=1:m$
$AB:BC=(m-1):(m^2-m)=(m-1):m(m-1)=1:m$ $\therefore PA:PC=AB:BC(=1:m)$ 示された.
(条件 $y\neq 0$ は, 3点P, A, Cが x 軸上に並ばず, $\angle APB$, $\angle BPC$ が存在する条件を表す.)

(別解) (2)の等式 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=m(m+1)(m-x)$ ---① を利用する.
$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\begin{pmatrix} 1-x \\ -y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} m-x \\ -y\end{pmatrix}=(1-x)(m-x)+y^2=m-x-mx+x^2+(m^2-x^2)=m-x-mx+m^2$
$=m(m+1)-(m+1)x=(m+1)(m-x)$, ①から $m\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ ⇔ 下行に続く
$m|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|\cos\angle APB=|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|\cos\angle BPC$ ⇔ $m|\overrightarrow{PA}|\cos\angle APB=|\overrightarrow{PC}|\cos\angle BPC$
⇔ $m\sqrt{(1-x)^2+y^2}\cos\angle APB=\sqrt{(m^2-x)^2+y^2}\cos\angle BPC$ ⇔ $m\sqrt{1-2x+x^2+m^2-x^2}\cos\angle APB=$
$\sqrt{m^4-2m^2x+x^2+m^2-x^2}\cos\angle BPC$ ⇔ $m\sqrt{1-2x+m^2}\cos\angle APB=\sqrt{m^4-2m^2x+m^2}\cos\angle BPC$
⇔ $m\sqrt{1-2x+m^2}\cos\angle APB=m\sqrt{1-2x+m^2}\cos\angle BPC$ ⇔ $\cos\angle APB=\cos\angle BPC$
$0<\angle APB<\pi$, $0<\angle BPC<\pi$, $0<\angle APB+\angle BPC<\pi$, より $\angle APB=\angle BPC$

(補) 循環論法になる不安は, 残りますが, 角の二等分線の公式 $|\overrightarrow{PB}|^2=|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PC}|-|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|$ を証明してもよいかな?

② 実数$a>0$に対し、座標平面上の点P$(a,0)$をとる. 曲線$y=\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$ $(x\geqq 0)$をCとする. 点Qが曲線C上を動くとき、PQ^{2}の最小値を与える点Qのx座標をF(a)とし、PQ^{2}の最小値をG(a)とする. 次の問いに答えよ. (1) F(a)を求めよ. (2) $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{F(a)-a}{a^2}$を求めよ (3) $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{G(a)}{a^3}$を求めよ. ([解]は次頁)

[考] (1) 例 下に凸な増加関数. 曲線Cを$y=f(x)=x^2$ $(x\geqq 0)$とする. 点P$(3,0)$をとり、点Qを曲線C上の動点とする. PQの最小値と、そのときの点Qの座標を求めよ



(カイ) (その1) $y=f(x)=x^2$ --- ① 上に、点Q_0を点Q_0の接線lがPQ_0と垂直になるようにとる. 曲線①上にQ_0以外の点Qをとれば、曲線①が$x\geqq 0$では、下に凸な増加関数であることにより、$\angle PQ_0Q > \angle PQ_0 l$ $(=90^\circ)$であるから、鈍角三角形PQ_0Q ($\angle PQ_0Q$が鈍角)となる. ∴ $PQ_0 < PQ$となり、点Qが点Q_0に一致するとき、PQ_0が求める最小値となる.

点$Q_0(t, t^2)$とする. 接線lの傾きは、$y'=2x$だから、$2t\,(>0)$. PQ_0の傾きは$\frac{t^2}{t-3}$ (PQ_0がx軸に垂直になることはないので$t\neq 3$). 接線$l \perp PQ_0$より $2t\times\frac{t^2}{t-3}=-1$

$2t^3=-t+3$, $2t^3+t-3=0$, $(t-1)(2t^2+2t+3)=0$, $2t^2+2t+3=0$の判別式$\frac{D}{4}=1-6=-5<0$なので、$2t^2+2t+3=0$は実数解を持たない. ∴ $t=1$, $Q_0(1,1)$, $PQ_0=\sqrt{(3-1)^2+1^2}=\sqrt{5}$

(その2) 点Q(t,t^2) $(t\geqq 0)$とする. $PQ=\sqrt{(t-3)^2+t^4}=\sqrt{t^4+t^2-6t+9}$

$g(t)=t^4+t^2-6t+9$ $(t\geqq 0)$とおく. $g'(t)=4t^3+2t-6=2(2t^3+t-3)=2(t-1)(2t^2+2t+3)$

$2t^2+2t+3=2(t^2+t+\frac{3}{2})=2\{(t+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+\frac{6}{4}\}=2(t+\frac{1}{2})^2+\frac{5}{2}>0$, $g'(t)$は$t=1$の前後で符号を負から正に変え、$g(t)$は、極小値=最小値$=g(1)=1+1-6+9=5$をとる.

よって求めるPQの最小値は、$\sqrt{5}$, そのときのQの座標$(1,1)$

(問) 点$P_1(2,0)$, 点$P_2(1,1)$として. 曲線$y=-x^3+x$上の動点をQとする. $\triangle QP_1P_2$の最小値を求めよ

(カイ) (その1) $y=f(x)=-x^3+x$, $f(-x)=-(-x)^3+(-x)=x^3-x=-f(x)$なので、原点対称のグラフである.

$x\geqq 0$の増減表

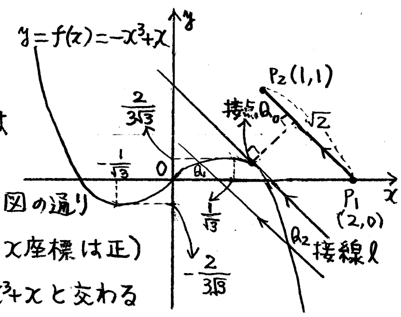
x	0	…	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	…
$f'(x)$	1	+	0	−
$f''(x)$	0	−	−	−
$f(x)$	0	↗	$f(\frac{1}{\sqrt{3}})$	↘

$f'(x)=-3x^2+1$, $f''(x)=-6x$,

極大値 $f(\frac{1}{\sqrt{3}})=-\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}$

したがって$y=f(x)=-x^3+x$のグラフは右のようであり、$x\geqq 0$では、上に凸.

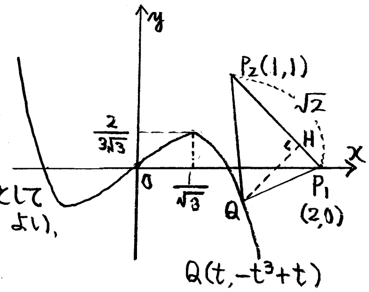
点$P_1(2,0)$, 点$P_2(1,1)$との位置関係は図の通り



P_1P_2に平行な$y=f(x)=-x^3+x$に接する接線l (接点Q_0のx座標は正)をひく. 求める最小値は$\triangle Q_0P_1P_2$の面積となる. ($y=f(x)=-x^3+x$と交わる平行線をひけば、$\triangle Q_1P_1P_2$ or $\triangle Q_2P_1P_2$は、線分P_1P_2からの距離が、$\triangle Q_0P_1P_2$のときよりも大きくなるので、$\triangle Q_0P_1P_2$が最小). $Q_0(t, -t^3+t)$とする. Q_0における接線lの傾き$f'(t)=-3t^2+1$とP_1P_2の傾き-1は等しいので$-3t^2+1=-1$, $3t^2=2$, $t>0$より $t=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $Q_0(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}})$, 直線$P_1P_2$: $x+y-2=0$

よって $\triangle Q_0P_1P_2=\frac{1}{2}\times P_1P_2\times\frac{|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}-2|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\left|\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}-2\right|=\left|\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}-1\right|=\left|\frac{2\sqrt{6}}{9}-1\right|=\left|\frac{2\sqrt{6}-9}{9}\right|=\frac{9-2\sqrt{6}}{9}$

(カイ)(その2) $y=f(x)=-x^3+x$ と線分 P_1P_2 は、右図のような位置にある



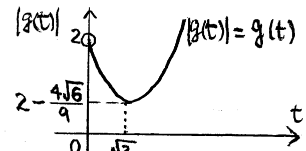
$y=f(x)=-x^3+x$ 上の点 $Q(t,-t^3+t)$ とする. 点Qから線分 P_1P_2 または、その延長上に垂線QHをおろす. $\triangle QP_1P_2$ の高さQHの最小値を求める. $(P_1P_2=\sqrt{2})$ 直線 P_1P_2 は、$y=-(x-2)$ すなわち $x+y-2=0$

$QH=\dfrac{|t-t^3+t-2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|t^3-2t+2|}{\sqrt{2}}$ の最小値を求める. 明らかに $t>0$ としてよい.

$g(t)=t^3-2t+2$, $t>0$ とおく. $g'(t)=3t^2-2$

$t>0$ では、$t=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ の前後で $g'(t)$ は符号を負から正に変える.

極小値 $g\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+2=2-\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=2-\frac{4\sqrt{6}}{9}$

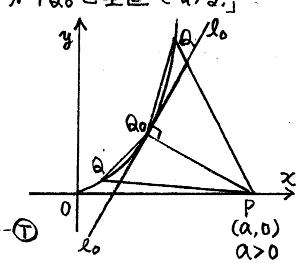


右グラフより、$|g(t)|=|t^3-2t+2|$ の最小値は $\left|g\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right|=2-\frac{4\sqrt{6}}{9}$

よって、求める $\triangle QP_1P_2$ の最小値は、$\frac{1}{2}\times P_1P_2\times\dfrac{2-\frac{4\sqrt{6}}{9}}{\sqrt{2}}=1-\frac{2\sqrt{6}}{9}=\frac{9-2\sqrt{6}}{9}$ $(\because P_1P_2=\sqrt{2})$

(補)(その1)は、$x>0$ では上に凸なグラフであるからこそ、得られた解です.
数Ⅲ、理系微積で、sin, cos, e^x, $\log x$ などが現われると、どうしても、グラフの凹凸を調べねばならず、(その2)の(カイ)では、hardになる場合が多いようです. それでは、本題の解です.

[解](1)(その1) 曲線C, $y=\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$ $(x\geqq 0)$, $y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\geqq 0$, $y''=\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}\geqq 0$ なので、曲線Cは、$x\geqq 0$ では、増加であり下に凸である. 曲線C上に、次のような点 Q_0 をとる.「点 Q_0 における接線 l_0 が PQ_0 と垂直である.」



点 Q_0 以外の点Qを曲線C上にとると、曲線Cが下に凸であるから、
$\angle PQ_0Q>\angle PQ_0l_0=90°$, したがって $\triangle PQ_0Q$ は鈍角三角形となり、$PQ>PQ_0$
したがって、点 Q_0 が PQ^2 を最小にする点である
$Q_0\left(F(a),\ \frac{1}{3}(F(a))^{\frac{3}{2}}\right)$ とおく. 接線 l_0 の傾き×PQ_0 の傾き$=-1$ から
$\frac{1}{2}(F(a))^{\frac{1}{2}}\times\dfrac{\frac{1}{3}(F(a))^{\frac{3}{2}}}{F(a)-a}=-1$ $(\because a>0$ だから $F(a)\neq a)$ $\frac{1}{6}(F(a))^2=-F(a)+a$ ----Ⓣ
$(F(a))^2+6F(a)-6a=0$, $F(a)>0$ だから $\underline{F(a)}=-3+\sqrt{9+6a}=\underline{\sqrt{6a+9}-3}$

(その2) 曲線C, $y=\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$ $(x\geqq 0)$ 上の点 $Q\left(t,\ \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)$ $(t>0)$ とおく. $PQ^2=g(t)=(t-a)^2+\left(\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)^2=(t-a)^2+\frac{1}{9}t^3$
$=\frac{1}{9}t^3+t^2-2at+a^2$, $g'(t)=\frac{1}{3}t^2+2t-2a$, $g'(t)=0$ を $t\geqq 0$ で解けば、$t_0=3\left(-1+\sqrt{1+\frac{2a}{3}}\right)=\sqrt{6a+9}-3$
$g'(t)$ は、$t_0=\sqrt{6a+9}-3$ の前後で符号を負から正へ変えるので、$g(t)$ は、極小値 $g(t_0)$ が最小値となる.
$\therefore \underline{F(a)}=t_0=\underline{\sqrt{6a+9}-3}$

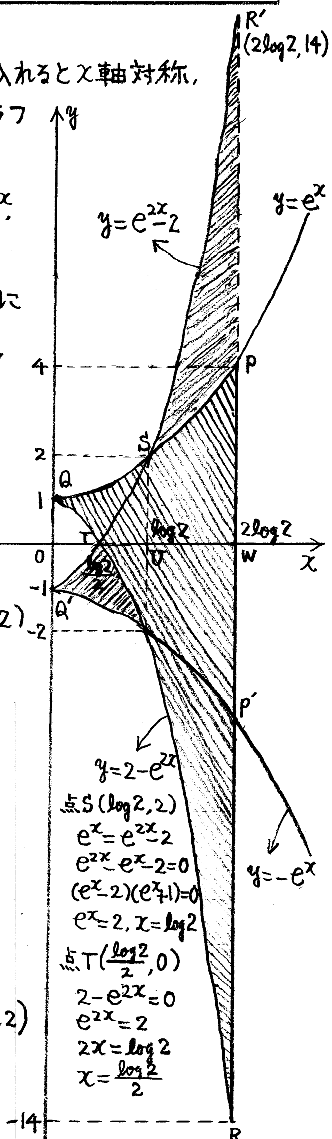
(2) [解](1)(その1)Ⓣより $F(a)-a=-\frac{1}{6}(F(a))^2$, $\dfrac{F(a)-a}{a^2}=-\frac{1}{6}\left\{\dfrac{F(a)}{a}\right\}^2=-\frac{1}{6}\left\{\dfrac{\sqrt{6a+9}-3}{a}\right\}^2=-\frac{1}{6}\left\{\dfrac{(6a+9)-9}{a(\sqrt{6a+9}+3)}\right\}^2$
$=-\frac{1}{6}\left\{\dfrac{6}{\sqrt{6a+9}+3}\right\}^2\to-\frac{1}{6}\left\{\frac{6}{6}\right\}^2=\underline{-\frac{1}{6}}$ $(a\to+0)$ (directに $F(a)=\sqrt{6a+9}-3$ を代入してもよい)

(3) $G(a)=(F(a)-a)^2+\left\{\frac{1}{3}(F(a))^{\frac{3}{2}}\right\}^2=\left\{-\frac{1}{6}(F(a))^2\right\}^2+\frac{1}{9}(F(a))^3=\frac{1}{36}(F(a))^4+\frac{1}{9}(F(a))^3=\frac{1}{9}(F(a))^3\left(\frac{1}{4}F(a)+1\right)$

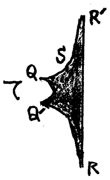
$\dfrac{G(a)}{a^3}=\frac{1}{9}\left(\dfrac{F(a)}{a}\right)^3\left(\frac{1}{4}F(a)+1\right)=\frac{1}{9}\left(\dfrac{\sqrt{6a+9}-3}{a}\right)^3\left(\frac{1}{4}(\sqrt{6a+9}-3)+1\right)=\frac{1}{9}\left(\dfrac{6}{\sqrt{6a+9}+3}\right)^3\left(\frac{1}{4}(\sqrt{6a+9}-3)+1\right)$

$\to\frac{1}{9}\times\left(\frac{6}{6}\right)^3\times\left(\frac{1}{4}\times 0+1\right)=\underline{\frac{1}{9}}$ $(a\to+0)$

③ 座標平面上の $0 \le x \le 2\log 2$ の範囲において、曲線 $y=e^x$ と曲線 $y=2-e^{2x}$, 直線 $x=2\log 2$ で囲まれた図形をDとする. 図形Dを x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ.

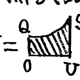


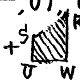
[考] まず、全体のグラフ, x軸回転だから、x軸に対称なグラフもかきましょう. yに$-y$を入れるとx軸対称,
$y=2-e^{2x}$のグラフについて. $y=e^x$のxに$2x$を入れると$y=e^{2x}$は、$y=e^x$のグラフをx軸方向に$\frac{1}{2}$倍したもの, 更にyに$-y$を入れると$-y=e^{2x}$つまり$y=-e^{2x}$は$y=e^{2x}$をx軸対称にしたもの、更にy軸方向に$+2$平行移動すると$y=2-e^{2x}$.
しかし、具体的に点をとって結ぶ方が実戦的.($y=2-e^{2x}$, $y'=-2e^{2x}<0$, ∴減少)
図形Dをかいたら、x軸対称な図形D′もかき入れます. x軸対称なグラフは、yに$-y$を入れるとよい. $y=2-e^{2x} \xrightarrow{x軸対称} -y=2-e^{2x}$ つまり $y=e^{2x}-2$



[解] 図形Dは、右図 

, 回転体の切り口は、図形Dをx軸対称に描いて
曲線PQは $y=e^x$, 曲線QRは $y=2-e^{2x}$, 直線PRは $x=2\log 2$
それぞれx軸に対称な曲線は P′Q′は $y=-e^x$, Q′R′は $y=e^{2x}-2$
交点 $S(\log 2, 2)$, $T(\frac{\log 2}{2}, 0)$, $U(\log 2, 0)$, $W(2\log 2, 0)$

$V=$ 

の回転体V_1 + 

の回転体V_2 − 

の回転体V_3, $\log 2=a$ $(e^a=2)$

- $V_1=\pi\int_0^a (e^x)^2dx=\pi\int_0^a e^{2x}dx=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^a=\frac{\pi}{2}(e^{2a}-1)=\frac{\pi}{2}(2^2-1)=\frac{3}{2}\pi$
- $V_2=\pi\int_a^{2a}(e^{2x}-2)^2dx=\pi\int_a^{2a}(e^{4x}-4e^{2x}+4)dx=\pi\left[\frac{1}{4}e^{4x}-2e^{2x}+4x\right]_a^{2a}$
  $=\pi\left\{\frac{1}{4}(e^{8a}-e^{4a})-2(e^{4a}-e^{2a})+4a\right\}=\pi\left\{\frac{1}{4}(2^8-2^4)-2(2^4-2^2)+4\log 2\right\}$
  $=\pi\left\{\frac{16}{4}(16-1)-2(16-4)+4\log 2\right\}=\pi(60-24+4\log 2)=\pi(36+4\log 2)$
- $V_3=\pi\int_0^{\frac{a}{2}}(e^{2x}-2)^2dx=\pi\left[\frac{1}{4}e^{4x}-2e^{2x}+4x\right]_0^{\frac{a}{2}}=\pi\left(\frac{1}{4}e^{2a}-2e^a+2a-\frac{1}{4}+2\right)$
  $=\pi\left(\frac{4}{4}-4+2\log 2+\frac{7}{4}\right)=\pi\left(-\frac{5}{4}+2\log 2\right)$

よって $V=V_1+V_2-V_3=\pi\left(\frac{3}{2}+36+4\log 2+\frac{5}{4}-2\log 2\right)=\pi\left(\frac{6+144+5}{4}+2\log 2\right)$
$=\pi\left(\frac{155}{4}+2\log 2\right)$

[補] Slow and steady wins the race. よほど careful にしないと mistake します. 確実に計算をすすめる.
計算の方法, 体積の求め方に、何かうまい方法がありますかねぇ〜.

4 次の式によって与えられる数列 $\{a_n\}\{b_n\}\{x_n\}$ がある. $a_n=\sum_{k=1}^{n}k$, $b_n=\sum_{k=1}^{n}k^2$, $x_n=\sum_{k=1}^{n}ka_k$,
次の問いに答えよ. (1) $\frac{b_n}{a_n}$ が整数となる n をすべて求めよ (2) $x_n=\frac{1}{2}(a_n^2+b_n)$ を示せ.
(3) $\frac{x_n}{a_n}$ が整数となる n をすべて求めよ

[考] (1) $n=1,2,3,\cdots$ です. n を mod 3 で考えます. (2) $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=\sum_{k=1}^{n}k^3$
(3) 12 でわり切れるような整数 n を求めることになります. $12=3\times4$, 3と4は互いに素ですから,
まず mod 3 (or mod 4) で整数 n を定め. 更に mod 4 (or mod 3) です.

[解] (1) $\frac{b_n}{a_n}=\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2n+1}{3}$ は整数だから, mod 3 で分子 $=2n+1\equiv0$, $-n+1\equiv0$, $n\equiv1$ ∴ $n=3m+1$ $(m=0,1,2,\cdots)$

(2) 右辺 $=\frac{1}{2}(a_n^2+b_n)=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+\sum_{k=1}^{n}k^2\right\}=\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}k^2\right\}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2(k+1)$
左辺 $=x_n=\sum_{k=1}^{n}ka_k=\sum_{k=1}^{n}k\times\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2(k+1)$ ∴ $x_n=\frac{1}{2}(a_n^2+b_n)$ $\left[=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2(k+1)\right]$

(3) $\frac{x_n}{a_n}=\frac{\frac{1}{2}(a_n^2+b_n)}{a_n}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{b_n}{a_n}\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2n+1}{3}\right\}=\frac{3n(n+1)+2(2n+1)}{12}=\frac{3n^2+7n+2}{12}$
したがって $3n^2+7n+2=N$ が $12(=3\times4)$ の倍数であれば $\frac{x_n}{a_n}$ は整数となる.
3と4は互いに素だから, N が3の倍数 かつ 4の倍数であればよい
mod 3 で $N\equiv n-1\equiv0$, $n\equiv1$, ∴ $n=3l+1$ $(l=0,1,2,\cdots)$
$N=3(3l+1)^2+7(3l+1)+2=27l^2+18l+3+21l+7+2=27l^2+39l+12=3(9l^2+13l+4)$ $(l=0,1,2,\cdots)$
$9l^2+13l+4=N'$ が4の倍数であればよい. mod 4 で $N'\equiv l^2+l\equiv l(l+1)\equiv0$ ※注 ∴ $l\equiv0$ or $l+1\equiv0$
(i) $l\equiv0$ のとき $l=4m$ $(m=0,1,2,\cdots)$ $n=3\times4m+1=12m+1$ $(m=0,1,2,\cdots)$
(ii) $l+1\equiv0$ のとき $l\equiv-1\equiv3$, $l=4m+3$ $(m=0,1,2,\cdots)$ $n=3(4m+3)+1=12m+10$ $(m=0,1,2,\cdots)$
したがって, 求める n は $n=12m+1$ or $n=12m+10$ $(m=0,1,2,\cdots)$

[補] (2) ですが, 左辺 $x_n=\sum_{k=1}^{n}ka_k$ を n の式で表せば, $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2)=\frac{1}{2}\left\{\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$
ここまでの stage で, 右辺 $=\frac{1}{2}(a_n^2+b_n)=\frac{1}{2}\left\{\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$ と等しくなってしまいます. 何やら, 設問としての意図がつかめません.「帰納法で示せ」などとあれば, 話は別ですが-------

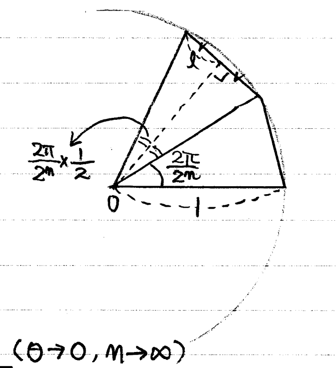
※注. $4=2^2$ だから, $l\equiv0$ or $l+1\equiv0$ ですが---- (問) mod 6 で $n(n+1)\equiv0$ となる自然数 n を求めよ
(かい) $6=2\times3$, 2と3は互いに素なので $n(n+1)$ が2かつ3の倍数であればよいが, 連続する2つの整数の積は, 必ず2の倍数なので $n(n+1)$ が3の倍数であればよい (mod 3 で $n(n+1)\equiv0$).
よって $n=3m$ or $n=3m-1$ $(m=1,2,\cdots)$ ($n=2,3,5,6,8,9,\cdots$ のときであり, $n=6m$ or $n=6m-1$ のときではありません.

$3n^2+7n+2=N$ が12の倍数のとき, mod 12 で $N=3n^2+7n+2=(3n+1)(n+2)\equiv0$ だから mod 12 で $3n+1\equiv0$ or $n+2\equiv0$ である. などと決してしてはいけません. $12=3\times4$, 3と4は互いに素だから, N は, 3の倍数かつ4の倍数. mod 3 で $N\equiv(0+1)(n+2)=n+2\equiv0$, ∴ $n\equiv-2\equiv1$ ∴ $n=3l+1$, $n=1,2,3,\cdots$ であるから, $l=0,1,2,\cdots$, このとき $N=(3(3l+1)+1)(3l+1+2)=(9l+4)(3l+3)=3(9l+4)(l+1)$, $N'=(9l+4)(l+1)$ が4の倍数
mod 4 で $N'\equiv l(l+1)\equiv0$ 以下 [解] (3) 同様

1 半径1の円に内接する正2^n角形$(n \geqq 2)$の面積をS_n，周の長さをL_nとする．次の問に答えよ
(1) $S_n = 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}$，$L_n = 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^n}$ を示せ (2) $\frac{S_n}{S_{n+1}} = \cos\frac{\pi}{2^n}$，$\frac{S_n}{L_n} = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2^n}$ を示せ
(3) $\lim_{n\to\infty} S_n$，$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}$ を求めよ．(4) $\lim_{n\to\infty} 2^n\frac{S_2}{L_2}\cdot\frac{S_3}{L_3}\cdots\frac{S_n}{L_n}$ を求めよ．

[解] (1) $S_n = \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\frac{2\pi}{2^n}\times 2^n = 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}$

右図 $l = 1\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{2^n}\times\frac{1}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2^n}$ $L_n = 2l\times 2^n = 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^n}$



(2) $\frac{S_n}{S_{n+1}} = \frac{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}}{2^n\sin\frac{\pi}{2^n}} = \frac{2^{n-1}\sin\frac{2\pi}{2^n}}{2^n\sin\frac{\pi}{2^n}} = \frac{2^{n-1}\cdot 2\sin\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^n}}{2^n\sin\frac{\pi}{2^n}} = \cos\frac{\pi}{2^n}$

$\frac{S_n}{L_n} = \frac{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}}{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^n}} = \frac{2^{n-1}\sin\frac{2\pi}{2^n}}{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^n}} = \frac{2^{n-1}\cdot 2\sin\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^n}}{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^n}} = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2^n}$

(3) $\frac{\pi}{2^{n-1}} = \theta$ とおくと $n\to\infty$ のとき $\theta\to 0$ $S_n = \frac{\pi}{\theta}\sin\theta = \pi\cdot\frac{\sin\theta}{\theta} \to \underline{\pi}$ $(\theta\to 0, n\to\infty)$

(2)より $\frac{S_2}{\cancel{S_3}}\cdot\frac{\cancel{S_3}}{\cancel{S_4}}\cdots\cdots\frac{\cancel{S_n}}{S_{n+1}} = \cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}$ $\therefore \lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{S_2}{S_{n+1}}$

$S_2 = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2$ $S_{n+1}\to\pi$ であるから，求める極限 $\lim\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n} = \underline{\frac{2}{\pi}}$

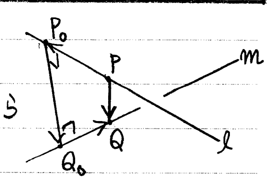
(4) (2)より，$\frac{S_2}{L_2}\cdot\frac{S_3}{L_3}\cdots\cdots\frac{S_n}{L_n} = \overbrace{\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2^2}\right)\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2^3}\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2^n}\right)}^{n-1\text{項}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}\right)$

よって，求める極限 $\lim_{n\to\infty}2^n\frac{S_2}{L_2}\cdot\frac{S_3}{L_3}\cdots\frac{S_n}{L_n} = 2\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n} = 2\cdot\frac{2}{\pi} = \underline{\frac{4}{\pi}}$

[補] $\lim_{n\to\infty} S_n$ は半径1の円の面積πです．

2 直線l：$(x,y,z) = (5,0,0) + s(1,-1,0)$ 上に点P_0，直線m：$(x,y,z) = (0,0,2) + t(1,0,2)$ 上に点Q_0があり，$\overrightarrow{P_0Q_0}$ はベクトル$(1,-1,0)$と$(1,0,2)$の両方に垂直である．次の問いに答えよ．
(1) P_0，Q_0の座標を求めよ． (2) $|\overrightarrow{P_0Q_0}|$ を求めよ．
(3) 直線l上の点P，直線m上の点Qについて $\overrightarrow{PQ}$ を $\overrightarrow{PP_0}$，$\overrightarrow{P_0Q_0}$，$\overrightarrow{Q_0Q}$ で表せ．また $|\overrightarrow{PQ}|^2 = |\overrightarrow{PP_0} + \overrightarrow{Q_0Q}|^2 + 16$ を示せ

[解] (1) $P_0(5+s, -s, 0)$，$Q_0(t, 0, 2+2t)$ $\overrightarrow{P_0Q_0} = (t-5-s, s, 2+2t)$



$\overrightarrow{P_0Q_0}$ はlの方向vector $(1,-1,0)$ とmの方向vector $(1,0,2)$ の両方に垂直だから

$\begin{pmatrix} t-5-s \\ s \\ 2+2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ より $t-5-s-s = 0$ $t-2s = 5$

$\begin{pmatrix} t-5-s \\ s \\ 2+2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ より $t-5-s+4+4t = 0$ $5t-s = 1$

$\left.\right\}$ $5(5+2s)-s = 1$ $9s = -24$ $s = -\frac{8}{3}$，$t = -\frac{1}{3}$

求める $\underline{P_0\left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 0\right)\ Q_0\left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{4}{3}\right)}$

(2) $|\overrightarrow{P_0Q_0}|^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4^2(2^2+2^2+1)}{3^2} = 4^2$ $\underline{|\overrightarrow{P_0Q_0}| = 4}$

(3) $\underline{\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP_0} + \overrightarrow{P_0Q_0} + \overrightarrow{Q_0Q}}$ $|\overrightarrow{PQ}|^2 = |\overrightarrow{PP_0} + \overrightarrow{Q_0Q} + \overrightarrow{P_0Q_0}|^2 = |\overrightarrow{PP_0} + \overrightarrow{Q_0Q}|^2 + \overrightarrow{PP_0}\cdot\overrightarrow{P_0Q_0} + \overrightarrow{Q_0Q}\cdot\overrightarrow{P_0Q_0} + |\overrightarrow{P_0Q_0}|^2 = |\overrightarrow{PP_0} + \overrightarrow{Q_0Q}|^2 + 16$

($\because$ $\overrightarrow{PP_0}$ // lの方向vector $(1,-1,0)$，$\overrightarrow{Q_0Q}$ // mの方向vector $(1,0,2)$ であるから，$\overrightarrow{PP_0}\cdot\overrightarrow{P_0Q_0} = 0$，$\overrightarrow{Q_0Q}\cdot\overrightarrow{P_0Q_0} = 0$，$|\overrightarrow{P_0Q_0}| = 4$)

3 (1) $f(t)$ を $0 \leqq t \leqq 1$ で連続な関数とする. $\tan x = t$ とおいて $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^1 f(t)\,dt$ であることを示せ.

(2) (1)を用いて0以上の整数nに対し $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x}\,dx$ の値を求めよ.

また $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx \leqq \frac{1}{n+1}$ を示せ

(3) 0以上の整数nと $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ をみたすxに対し $\displaystyle\frac{1-\tan^2 x+\tan^4 x-\cdots+(-1)^n\tan^{2n} x}{\cos^2 x} = 1-(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)} x$ を示せ

(4) (2)と(3)を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2k+1}$ の値を求めよ.

[解] (1) $\tan x = t$ とおくと, $\displaystyle\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\begin{array}{c|c} x & 0 \to \frac{\pi}{4} \\ \hline t & 0 \to 1 \end{array}$ なので $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^1 f(t)\,dt$ $\left(\because \frac{1}{\cos^2 x}dx = dt\right)$

(2) (1)より $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^1 t^n\,dt = \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{n+1}}$

$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ では $0 \leqq \tan x \leqq 1$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \cos x \leqq 1$, $0 \leqq \tan^n x \leqq 1$, $\frac{1}{2} \leqq \cos^2 x \leqq 1$

$1 \leqq \dfrac{1}{\cos^2 x}\ (\leqq 2)$ の両辺に $0 \leqq \tan^n x$ をかけると $\tan^n x \leqq \dfrac{\tan^n x}{\cos^2 x}$

よって $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{n+1}$

(3) 左辺の分子は初項1, 公比 $-\tan^2 x\,(\neq 1)$, 項数 $n+1$ 項 である等比数列の和, $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$ であるから, 左辺 $= (1+\tan^2 x)\cdot\dfrac{1-(-\tan^2 x)^{n+1}}{1-(-\tan^2 x)} = 1-(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)} x =$ 右辺

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan^2 x+\tan^4 x-\cdots+(-1)^n\tan^{2n} x}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\{1-(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)} x\}\,dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)} x\,dx \cdots$ ①

①の左辺 $\displaystyle= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\tan^{2k} x}{\cos^2 x}\,dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^{2k} x}{\cos^2 x}\,dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\left[\frac{1}{2k+1}\tan^{2k+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{1}{2k+1}$

①の右辺について $\displaystyle 0 \leqq \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}}(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)} x\,dx\right| = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2(n+1)} x\,dx \leqq \frac{1}{(2n+2)+1} = \frac{1}{2n+3}$ ($\because$ (2)より)

$n\to\infty$ のとき $\dfrac{1}{2n+3} \to 0$ なのでハサミウチの原理により, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)} x\,dx \to 0\ (n\to\infty)$

したがって ①の極限をとると $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2k+1} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$

④ $n \geqq 3$とする。1個のサイコロをn回ふる。このn回の試行のうちで6の目がちょうど2回、しかも続けて出るpro.をP_nとする。次の問いに答えよ。 (1) P_3, P_4を求めよ。

(2) P_nを求め、$P_{n+1}-\frac{5}{6}P_n=\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$であることを示せ。

(3) $S_n=P_3+P_4+\cdots+P_n$として $\lim_{n\to\infty}S_n$を求めよ。必要ならば$|r|<1$のとき$\lim_{n\to\infty}nr^n=0$は使ってよい。

[解] (1), (2) 6の目が続けて出るpro. $\frac{1}{6^2}$、残り$n-2$回は$\frac{5}{6}$のpro.で6の目が出ないとして、

独立試行の定理を用いると、$P_n={}_{n-1}C_1\left(\frac{1}{6^2}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}=(n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$

$$P_3=2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{5}{6}=\underline{\frac{5}{108}}\qquad P_4=3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2=\underline{\frac{25}{432}}$$

$$\overbrace{\square\square\cdots\square\boxed{66}\square\square\square\square}^{n-1\text{回}}$$

$\boxed{66}$ 6が続けて出る $\frac{1}{6^2}$

$n-1$回の試行のうち $\frac{1}{6^2}$で1回, $\frac{5}{6}$で$n-2$回

$$P_{n+1}-\frac{5}{6}P_n\overset{※}{=}n\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-(n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

(3)
$$S_n=P_3+P_4+P_5+\cdots+P_n$$
$$-)\ \frac{5}{6}S_n=\qquad\frac{5}{6}P_3+\frac{5}{6}P_4+\cdots+\frac{5}{6}P_{n-1}+\frac{5}{6}P_n$$

$$\frac{1}{6}S_n=P_3+\overbrace{\left(P_4-\frac{5}{6}P_3\right)+\left(P_5-\frac{5}{6}P_4\right)+\cdots+\left(P_n-\frac{5}{6}P_{n-1}\right)}^{n-3\text{項}}-\frac{5}{6}P_n$$
$$=\frac{5}{108}+\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}-\frac{5}{6}(n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$$
$$=\frac{5}{108}+\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}\right)}{1-\frac{5}{6}}-\left(\frac{1}{6}\right)^2(n-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

$$S_n=\frac{5}{18}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}\right)-\left(\frac{1}{6}\right)^2(n-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\longrightarrow\frac{5}{18}+\left(\frac{5}{6}\right)^2(1-0)-\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot 0=\underline{\frac{35}{36}}$$

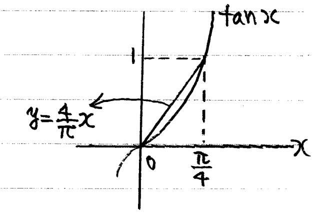
※[補] 確率漸化式を作ることを考えてみます。P_{n+1}は (i) n回目までP_nのpro.で目が出ていて、$n+1$回目は$\frac{5}{6}$のpro.で6の目が出ない。or (ii) $n-1$回までは、1回も6の目が出ないで、n回目にはじめて6の目が出て、更に$n+1$回目に6の目が出る。であるから、$P_{n+1}=P_n\times\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\right)$ $\therefore P_{n+1}-\frac{5}{6}P_n=\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

③ですが $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^n x}{\cos^2 x}dx=\left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}$ は明らかなことです。

すると (3)では
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{(-1)^1\tan^2 x}{\cos^2 x}+\frac{(-1)^2\tan^4 x}{\cos^2 x}+\cdots+\frac{(-1)^n\tan^{2n}x}{\cos^2 x}dx=\left[\tan x+\frac{(-1)^1\tan^3 x}{3}+\frac{(-1)^2\tan^5 x}{5}\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{(-1)^n\tan^{2n+1}x}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=1+\frac{(-1)}{3}+\frac{(-1)^2}{5}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2k+1}$$

(2)ですが、右グラフより $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$では $0\leqq\tan x\leqq\frac{4}{\pi}x$ ですから

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{4}{\pi}x\right)^n dx=\frac{4^n}{\pi^n}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{4}\leqq\frac{1}{n+1}$$

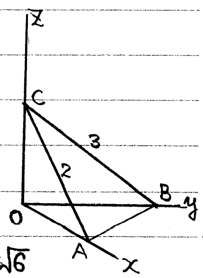


1 正の実数 a, b, c に対して、O を原点とする空間座標に 3 点 $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$ がある。$AC=2$, $BC=3$, かつ $\triangle ABC$ の面積が $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ となるとき、次の問いに答えよ。
(1) $\sin\angle ACB$ の値を求めよ。また、線分 AB の長さを求めよ。(2) a, b, c の値を求めよ。
(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。また、原点 O から $\triangle ABC$ におろした垂線の長さを求めよ。

[解] (1) $\triangle ABC = \frac{1}{2}|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\sin\angle ACB = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $|\overrightarrow{CA}|=2$, $|\overrightarrow{CB}|=3$ より、$2\cdot 3\sin\angle ACB = 3\sqrt{3}$

$\sin\angle ACB = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle ACB < \angle AOB = \frac{\pi}{2}$ なので $\angle ACB = \frac{\pi}{3}$

余弦定理より、$AB^2 = 2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cos\frac{\pi}{3} = 13-12\cdot\frac{1}{2} = 7$ $\therefore AB=\sqrt{7}$



答	(1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{7}$　(2) $1, \sqrt{6}, \sqrt{3}$　(3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(2) $AB^2 = a^2+b^2=7$, $BC^2=b^2+c^2=9$, $CA^2=c^2+a^2=4$

辺々たすと $2(a^2+b^2+c^2)=20$　$a^2+b^2+c^2=10$　$c^2=3$　$c=\sqrt{3}$　$a^2=1$　$a=1$　$b^2=6$　$b=\sqrt{6}$

(3) 四面体 OABC の体積 $= \frac{1}{3}\times\triangle OAB\times OC = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}abc = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} = V$

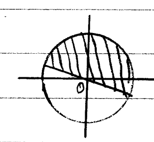
O から $\triangle ABC$ におろした垂線のあしを H とすると、$V = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\times\triangle ABC\times OH = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}OH$ $\therefore OH=\frac{\sqrt{6}}{3}$

(補) 原点 O から平面 ABC: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ までの距離の公式を用いると、OH はすぐに求まりますが…

2 $-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ に対して、関数 $f(\theta)$ を $f(\theta)=\frac{2}{3}\sin 3\theta-\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$ とおく。$t=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ とするとき次の問いに答えよ。(1) t のとりうる値の範囲を求めよ。(2) $\sin 3\theta = 3\sin\theta-4\sin^3\theta$ を示せ。また $\frac{t^3-3t}{2}=\sin 3\theta$ が成り立つことを示せ。(3) $f(\theta)$ を t の式で表せ。またそれを利用して、$f(\theta)$ の最大値と最小値、および最大値と最小値を与える θ の値を求めよ。

[解] (1) $t=2\sin(\theta+\frac{\pi}{3})$　$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ なので $-\frac{\pi}{6}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{5}{6}\pi$ より $-\frac{1}{2}\leqq\sin(\theta+\frac{\pi}{3})\leqq 1$

よって $-1\leqq t\leqq 2$



(2) $\sin 3\theta = \sin(\theta+2\theta) = \sin\theta\cos 2\theta+\cos\theta\sin 2\theta = (\sin\theta)(1-2\sin^2\theta)+2\sin\theta\cos^2\theta$
$= \sin\theta-2\sin^3\theta+2(\sin\theta)(1-\sin^2\theta) = 3\sin\theta-4\sin^3\theta$

$\frac{t^3-3t}{2} = \frac{1}{2}\{8\sin^3(\theta+\frac{\pi}{3})-6\sin(\theta+\frac{\pi}{3})\} = 4\sin^3(\theta+\frac{\pi}{3})-3\sin(\theta+\frac{\pi}{3}) = -\sin(3(\theta+\frac{\pi}{3})) = -\sin(3\theta+\pi)$
$= \sin 3\theta$

(3) $f(\theta)=\frac{2}{3}\cdot\frac{t^3-3t}{2}-t = \frac{1}{3}t^3-2t = g(t)$ とおく。$g'(t)=t^2-2$　$(-1\leqq t\leqq 2)$

増減表

t	-1	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$\frac{5}{3}$	$\searrow$	$g(\sqrt{2})$	$\nearrow$	$-\frac{4}{3}$

極小値 = 最小値 $= g(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}-2\sqrt{2} = -\frac{4}{3}\sqrt{2}$

$t=\sqrt{2}$ のとき $\sin(\theta+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{\sqrt{2}}$　$-\frac{\pi}{6}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{5\pi}{6}$ より $\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$

$\theta=-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$

最大値 $= g(-1)=\frac{5}{3}$　$t=-1$ のとき $\sin(\theta+\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}$　$-\frac{\pi}{6}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{5\pi}{6}$ より

$\theta+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}$　$\theta=-\frac{\pi}{2}$

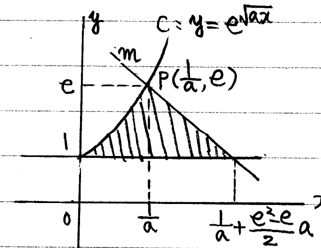
[補] 今年の問題は、例年よりやさしいです。医学科受験では、殆ど全解が必要でしょう。

答	(1) $-1\leqq t\leqq 2$　(2) 上解(2) (3) 最大値 $\frac{5}{3}$ ($\theta=-\frac{\pi}{2}$ のとき) 最小値 $-\frac{4}{3}\sqrt{2}$ ($\theta=-\frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi$ のとき)

③ $a>0$ とする。$x\geqq 0$ における関数 $f(x)=e^{\sqrt{ax}}$ と曲線 C ; $y=f(x)$ について次の問いに答えよ.
(1) C 上の点 $P\left(\frac{1}{a}, f\left(\frac{1}{a}\right)\right)$ における接線 ℓ の方程式を求めよ.また, P を通り, ℓ に直交する直線 m の方程式を求めよ. (2) 定積分 $\int_0^{\frac{1}{a}} f(x)\,dx$ を $t=\sqrt{ax}$ とおくことにより求めよ. (3) 曲線 C, 直線 $y=1$, および直線 m で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ.また $a>0$ における $S(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ.

[解] (1) $f(x)=e^{\sqrt{ax}}$　$f'(x)=e^{\sqrt{ax}}\times\frac{a}{2\sqrt{ax}}=\frac{\sqrt{a}}{2}\cdot\frac{e^{\sqrt{ax}}}{\sqrt{x}}$　$f'\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{\sqrt{a}}{2}\cdot\frac{e}{\frac{1}{\sqrt{a}}}=\frac{ae}{2}$ なので ℓ ; $y=\frac{ae}{2}\left(x-\frac{1}{a}\right)+e=\underline{\frac{ae}{2}x+\frac{e}{2}}$

m ; $y=-\frac{2}{ae}\left(x-\frac{1}{a}\right)+e=\underline{-\frac{2}{ae}x+\frac{2}{a^2e}+e}$



(2) $t=\sqrt{ax}$ とおけば $\frac{dt}{dx}=\frac{a}{2\sqrt{ax}}=\frac{a}{2t}$　$dx=\frac{2t}{a}dt$　$\begin{array}{c|c} x & 0\to\frac{1}{a} \\ \hline t & 0\to 1 \end{array}$

$\int_0^{\frac{1}{a}} f(x)\,dx=\int_0^1 e^t\cdot\frac{2t}{a}\,dt=\frac{2}{a}\int_0^1 te^t\,dt=\frac{2}{a}\left[te^t-e^t\right]_0^1=\underline{\frac{2}{a}}$

(3) $S(a)=\int_0^{\frac{1}{a}}(f(x)-1)\,dx+\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2-e}{2}a\cdot(e-1)=\frac{2}{a}-\frac{1}{a}+\frac{e(e-1)^2a}{4}$

$=\frac{1}{a}+\frac{e(e-1)^2a}{4}\geqq 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{e(e-1)^2a}{4}}=\underline{(e-1)\sqrt{e}}$ (相加相乗平均の関係より)

(等号成立は, $\frac{1}{a}=\frac{e(e-1)^2a}{4}$ ∴ $\underline{a=\frac{2}{(e-1)\sqrt{e}}}$ のとき)

直線 m で $y=1$ のとき
$1=-\frac{2}{ae}x+\frac{2}{a^2e}+e$
$ae=-2x+\frac{2}{a}+ae^2$
$x=\frac{1}{a}+\frac{e^2-e}{2}a$

④ 行列 $A=\begin{pmatrix}\frac{7}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{7}{2}\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ について,次の問いに答えよ。
(1) 実数 x, y, u, v が $xA+yE=uA+vE$ をみたすならば, $x=u$, $y=v$ であることを示せ.
(2) $A=a_1A+b_1E$, $A^2=a_2A+b_2E$ となる実数 a_1, b_1, a_2, b_2 を求めよ.
(3) $n=1,2,3,\cdots$ に対して $A^n=a_nA+b_nE$ となる実数 a_n, b_n を n を用いて表せ
(4) $n=1,2,3,\cdots$ に対して実数 c_n, d_n が $A+A^2+A^3+\cdots+A^n=c_nA+d_nE$ をみたしているとき,極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n}$ を求めよ.

[解] (1) $(x-u)A=(v-y)E$　$x\neq u$ ならば $A=\frac{v-y}{x-u}E=kE$ であるがこれは $A=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{7}{2}\end{pmatrix}$ に反する. ∴ $x=u$ このとき $E\neq 0$ なので $y=v$

(2) $A=a_1A+b_1E$ (1)より $\underline{a_1=1,\ b_1=0}$, ケーレーハミルトンの定理より $A^2-7A+12E=0$　$A^2=7A-12E=a_2A+b_2E$
(1)より $\underline{a_2=7,\ b_2=-12}$

(3) $A^{n+1}=a_nA^2+b_nA=a_n(7A-12E)+b_nA=(7a_n+b_n)A-12a_nE=a_{n+1}A+b_{n+1}E$ (1)より $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7a_n+b_n\\-12a_n\end{pmatrix}$ ※

$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&1\\-12&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&1\\-12&0\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}a_{n-1}\\b_{n-1}\end{pmatrix}=\cdots=\begin{pmatrix}7&1\\-12&0\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}$　$B=\begin{pmatrix}7&1\\-12&0\end{pmatrix}$ とおく。$B^2-7B+12E=0$

$x^2-7x+12=(x-3)(x-4)=0$ のとき $x^n=(x-3)(x-4)Q(x)+px+q$　$3^n=3p+q$, $4^n=4p+q$ より

$p=4^n-3^n$, $q=3^n-3p$; 実数 x を行列 B にかえると, $B^2-7B+12E=0$ のとき $B^n=pB+qE=\begin{pmatrix}7p&p\\-12p&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}q&0\\0&q\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}7p+q&p\\-12p&q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7p+3^n-3p&p\\-12p&3^n-3p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4^{n+1}-3^{n+1}&4^n-3^n\\4\cdot3^{n+1}-3\cdot4^{n+1}&4\cdot3^n-3\cdot4^n\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=B^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4^{n+1}-3^{n+1}\\4\cdot3^{n+1}-3\cdot4^{n+1}\end{pmatrix}$

$\underline{a_n=4^n-3^n,\ b_n=4\cdot3^n-3\cdot4^n}$ ($n=1,2$ でも成立する)

(4) $c_nA+d_nE=\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)A+\left(\sum_{k=1}^n b_k\right)E$　(1),(3)より $c_n=\sum_{k=1}^n a_k=\sum_{k=1}^n(4^k-3^k)=\frac{4(4^n-1)}{4-1}-\frac{3(3^n-1)}{3-1}=\frac{4}{3}4^n-\frac{3}{2}3^n+\frac{1}{6}$

$d_n=\sum_{k=1}^n b_k=\sum_{k=1}^n(4\cdot3^k-3\cdot4^k)=4\cdot\frac{3(3^n-1)}{3-1}-3\cdot\frac{4(4^n-1)}{4-1}=6\cdot3^n-6-4\cdot4^n+4=6\cdot3^n-4\cdot4^n-2$

よって $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{3}-\frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{6\cdot4^n}}{6\left(\frac{3}{4}\right)^n-4-\frac{2}{4^n}}=\frac{\frac{4}{3}}{-4}=\underline{-\frac{1}{3}}$ (分母,分子を 4^n でわった)

[補] ※から、隣接3項間の漸化式 $a_{n+2}=7a_{n+1}+b_{n+1}=7a_{n+1}-12a_n$ を解く方がわかりやすいでしょう。

① aを実数とする。このとき、座標空間内の球面S：$x^2+y^2+z^2=1$と直線l：$(x,y,z)=(2,-1,0)+t(-1,a,a)$について、次の問いに答えよ。

(1) Sとlが異なる2点で交わるようなaの値の範囲を求めよ。

(2) aの値が(1)で求めた範囲にあるとき、Sとlの2つの交点の間の距離dをaを用いて表せ。

(3) (2)のdが最大となるような実数aの値とそのときのdを求めよ。

[考] (1) lの座標$(2-t,-1+at,at)$をSの式に代入。2つの異なる実数解をもつ条件。

(2) (1)の条件のもとで、tの値が異なる2つあるから、これをα,βとすると、2つの交点は$(2-\alpha,-1+a\alpha,a\alpha)$ $(2-\beta,-1+a\beta,a\beta)$ したがって dはα,βで表すことができます。次頁の[補]の[解]は、(1),(2)同時にできます。

(3) (1)の範囲でのdの最大値を求めることになります。

[解] (1) l上の点$(2-t,-1+at,at)$を球面Sの式$x^2+y^2+z^2=1$に代入。$(2-t)^2+(-1+at)^2+(at)^2=1$

$(2a^2+1)t^2-2(a+2)t+4=0$，$2a^2+1\neq 0\,(>0)$，tが異なる2つの実数解をもてばよいので、判別式$\frac{D}{4}>0$

$\therefore (a+2)^2-4(2a^2+1)>0$　$7a^2-4a<0$　$a(7a-4)<0$　$\therefore \underline{0<a<\frac{4}{7}}$

(2) tの2つの異なる解をα,βとすれば、異なる2点は$(2-\alpha,-1+a\alpha,a\alpha)$，$(2-\beta,-1+a\beta,a\beta)$であるから

$d^2=(-\alpha+\beta)^2+(a\alpha-a\beta)^2+(a\alpha-a\beta)^2=(2a^2+1)(\alpha-\beta)^2$，$\alpha,\beta$は※1実際に解くことにより $t=\frac{a+2\pm\sqrt{4a-7a^2}}{2a^2+1}$から

$(\alpha-\beta)^2=\frac{4(4a-7a^2)}{(2a^2+1)^2}$　$\therefore \underline{d=2\sqrt{\frac{4a-7a^2}{2a^2+1}}}$

(3) $0<a<\frac{4}{7}$のもとでdのルートの中をkとおくと $k=\frac{4a-7a^2}{2a^2+1}\overset{※2}{=}-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{8a+7}{2a^2+1}\right)$　$f(a)=\frac{8a+7}{2a^2+1}$とおく。

$f'(a)=\frac{1}{(2a^2+1)^2}\{8(2a^2+1)-4a(8a+7)\}=\frac{1}{(2a^2+1)^2}(-16a^2-28a+8)=-\frac{4}{(2a^2+1)^2}(4a^2+7a-2)=-\frac{4}{(2a^2+1)^2}(4a-1)(a+2)$

a	0	…	$\frac{1}{4}$	…	$\frac{4}{7}$
$f'(a)$	×	+	0	−	×
$f(a)$	×	↗	極大	↘	×

極大値＝最大値 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{2+7}{\frac{1}{8}+1}=\frac{72}{9}=8$　求めるaの値は$\underline{\frac{1}{4}}$

したがってkの最大値は$-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\cdot 8=\frac{1}{2}$　求めるdの最大値は、$2\sqrt{\frac{1}{2}}=\underline{\sqrt{2}}$

[補] ※1は、解と係数の関係より、$\alpha+\beta=\frac{2(a+2)}{2a^2+1}$，$\alpha\beta=\frac{4}{2a^2+1}$ だから $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\cdots=\frac{4(4a-7a^2)}{(2a^2+1)^2}$ とできます。また、※2は、直接、$\frac{dk}{da}$を求めてもよいです。更に、微分など用いずに、$k>0$ですから、$0<a<\frac{4}{7}$のとき

$k(2a^2+1)=4a-7a^2$　$(2k+7)a^2-4a+k=0$　aについての判別式$\frac{D}{4}\geqq 0$が必要であり、$\frac{D}{4}=4-(2k+7)k=-2k^2-7k+4\geqq 0$

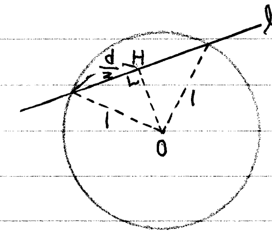
$2k^2+7k-4\leqq 0$，$(2k-1)(k+4)\leqq 0$　$k+4>0$　$\therefore k\leqq\frac{1}{2}$が必要。$k=\frac{1}{2}$のとき $a=\frac{2}{2\cdot\frac{1}{2}+7}=\frac{1}{4}$であり、$0<a<\frac{4}{7}$をみたす$a$の値が存在し、$k$の最大値が$\frac{1}{2}$であることがわかります。更に、$f(a)=\frac{8a+7}{2a^2+1}=\frac{b}{2\left(\frac{b-7}{8}\right)^2+1}=\frac{32b}{b^2-14b+81}=\frac{32}{b+\frac{81}{b}-14}$

($8a+7=b$とおく、$7<b<\frac{32}{7}+7=\frac{81}{7}$)と変形して、相加相乗平均の関係を用いると、$b+\frac{81}{b}\geqq 2\sqrt{b\cdot\frac{81}{b}}=18$，等号成立は$b=\frac{81}{b}$，$b^2=81$，$b=9$，のときであり、これは、$7<b<\frac{81}{7}$をみたすので（$a=\frac{1}{4}$となる）$f(a)\leqq\frac{32}{18-14}=8$とできます。※2のstageで$a^2(\neq 0)$で割り、$k=\frac{\frac{4}{a}-7}{2+\frac{1}{a^2}}=\frac{4b-7}{2+b^2}$（$b=\frac{1}{a}$とおいたので$\frac{1}{a}=b>\frac{7}{4}$とすれば、上のことと、同様な解が得られます。

次頁のようにすると(1),(2)が同時にできます。(3)は同じです。

[補] 原点Oから直線lにおろした垂線のあしを$H(2-t_0, -1+at_0, at_0)$とする.

lの方向vector$(-1, a, a)$と$\overrightarrow{OH}$は垂直なので $\begin{pmatrix}-1\\a\\a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2-t_0\\-1+at_0\\at_0\end{pmatrix}=0$



$-(2-t_0)+a(-1+at_0)+a\cdot at_0=0$　$(2a^2+1)t_0=a+2$　$t_0=\dfrac{a+2}{2a^2+1}$

$|\overrightarrow{OH}|^2=(2-t_0)^2+(-1+at_0)^2+(at_0)^2=(2a^2+1)t_0^2-2(a+2)t_0+5$

$=(2a^2+1)t_0\cdot t_0-2(a+2)t_0+5=(a+2)t_0-2(a+2)t_0+5=-(a+2)t_0+5$

$\left(\dfrac{d}{2}\right)^2=1^2-|\overrightarrow{OH}|^2=1+(a+2)t_0-5=(a+2)t_0-4=\dfrac{(a+2)^2}{2a^2+1}-4=\dfrac{-7a^2+4a}{2a^2+1}$

球面Sと直線lが交わるためには、球の半径$1>|\overrightarrow{OH}|$が必要となるから$1-|\overrightarrow{OH}|^2>0$　つまり$\left(\dfrac{d}{2}\right)^2=\dfrac{-7a^2+4a}{2a^2+1}>0$

よって(1)は$-7a^2+4a>0$より$0<a<\dfrac{4}{7}$であり、$d=2\sqrt{\dfrac{-7a^2+4a}{2a^2+1}}$となって、(2)も求まります。

> ② 関数$y=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$のグラフCについて、次の問いに答えよ。
> (1) Cの変曲点のうち、x座標が最大となる点Pのx座標を求めよ。
> (2) (1)で求めたPのx座標をbとするとき、$\tan\theta=e^b$をみたす$\theta\ (0<\theta<\frac{\pi}{2})$に対し、$\tan 2\theta$および$\theta$の値を求めよ。
> (3) 上のbに対する直線$x=b$とx軸、y軸およびCで囲まれた図形の面積を求めよ。

[考] (1) とにかく、y''までは求めなければなりません。 (2) $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$　(3) $e^x=\tan\theta$と置換します。

[解] (1) $y=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$　$y'=-\dfrac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}$　$y''=-\dfrac{1}{(e^x+e^{-x})^4}\{(e^x+e^{-x})^3-2(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})^2\}=-\dfrac{1}{(e^x+e^{-x})^3}\{(e^x+e^{-x})^2-2(e^x-e^{-x})^2\}$

$y''=-\dfrac{1}{(e^x+e^{-x})^3}(e^{2x}+2+e^{-2x}-2e^{2x}+4-2e^{-2x})=-\dfrac{1}{(e^x+e^{-x})^3}(-e^{2x}+6-e^{-2x})=\dfrac{e^{2x}-6+e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})^3}=\dfrac{(e^{2x})^2-6e^{2x}+1}{e^{2x}(e^x+e^{-x})^3}$

$y''=0$を解けば$e^{2x}=3\pm\sqrt{8}=3\pm2\sqrt{2}$　$e^x>0$なので$e^x=\sqrt{3\pm2\sqrt{2}}=\sqrt{2}\pm1$　$x=\log(\sqrt{2}+1)$ or $x=\log(\sqrt{2}-1)$

$y=f(x)=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$　$f(-x)=f(x)$なのでy軸対称のグラフ　$x\geqq0$で増減表をかく。　$\left(\begin{array}{l}0<\sqrt{2}-1<1\text{なので}\\ \log(\sqrt{2}-1)<0\end{array}\right)$

x	0	---	$\log(\sqrt{2}+1)$	---
y'	0	−	−	−
y''	−	−	0	+
y	$\frac{1}{2}$	↘	変曲点	↘

$y'=0$を解けば$e^x=e^{-x}$　$e^{2x}=1$　$x=0$

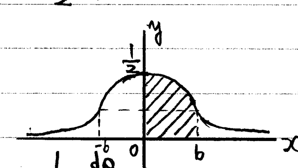
極大値$f(0)=\dfrac{1}{2}$　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$

求めるx座標は$\underline{\log(\sqrt{2}+1)}$

(2) $\tan\theta=e^{\log(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$　$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2(\sqrt{2}+1)}{1-(\sqrt{2}+1)^2}=\dfrac{2(\sqrt{2}+1)}{-2-2\sqrt{2}}=\underline{-1}$　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$より$0<2\theta<\pi$　$\therefore 2\theta=\dfrac{3\pi}{4}$

$\underline{\theta=\dfrac{3\pi}{8}}$

(3) グラフは右の様。求める面積は、$S=\displaystyle\int_0^b\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx=\int_0^b\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$



$e^x=\tan\theta$とおけば、両辺をxで微分すると$e^x=\dfrac{d}{dx}(\tan\theta)=\dfrac{d}{d\theta}(\tan\theta)\cdot\dfrac{d\theta}{dx}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dx}$

$e^x dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$，$\begin{array}{c|c}x & 0\to b\\ \theta & \frac{\pi}{4}\to\frac{3}{8}\pi\end{array}$ であるから

$S=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=[\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}=\frac{3}{8}\pi-\frac{2}{8}\pi=\underline{\frac{\pi}{8}}$

(補) $b=\log(\sqrt{2}+1)=\log\dfrac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}=\log(\sqrt{2}-1)^{-1}=-\log(\sqrt{2}-1)$

$\therefore\log(\sqrt{2}-1)=-b$ です

③ 行列 $P=\begin{pmatrix} x & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & y \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ

(1) $P^2=P$ をみたす実数の組 (x,y) は2組ある。これらを求めよ。

(2) (1)で求めた2つの組を (x_1,y_1), (x_2,y_2) とし、それぞれに対応する行列Pを P_1, P_2 とおく。ただし、$x_1<x_2$ とする。このとき $n=1,2,3,\cdots$ に対し、$(P_1P_2)^nP_1=r_nP_1$ をみたす実数 r_n を求めよ。

(3) 重複を許して、P_1, P_2 を6個並べて得られる順列 $Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4\ Q_5\ Q_6$ のうちで $Q_1=P_1$ となるものすべてを考え、それぞれの順列に6個の行列の積 $P_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ を対応させる。このようにして得られる行列のうち、異なるものはいくつあるか。

[考] (1) すなおに計算する。ケーレー・ハミルトンの定理※を用いる方法もある。

(2) $(P_1P_2)^n$ を求めて、右から P_1 をかけると r_nP_1 の形になるということです。

(3) $P_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ の一番左が P_1 なので、P_2P_1 などは除外されます。

[解] (1) $\begin{pmatrix} x & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2+\frac{2}{9} & \frac{\sqrt{2}}{3}(x+y) \\ \frac{\sqrt{2}}{3}(x+y) & \frac{2}{9}+y^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & y \end{pmatrix}$ より　$x^2+\frac{2}{9}=x$　$x+y=1$　$x+y=1$　$\frac{2}{9}+y^2=y$ ---①

$9x^2-9x+2=0$　$(3x-1)(3x-2)=0$　$x=\frac{1}{3},\frac{2}{3}$　$x_1<x_2$ より　$x_1=\frac{1}{3}$ のとき $y_1=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{2}{3}$ のとき $y_2=\frac{1}{3}$ ①をみたす。

求める $(x,y)=\underline{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)}$

(2) $P_1P_2=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 2\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}=\frac{2}{9}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$　ケーレー・ハミルトンの定理より $(P_1P_2)^2-\frac{8}{9}(P_1P_2)+0\cdot E=0$

$(P_1P_2)^2=\frac{8}{9}(P_1P_2)$　したがって $(P_1P_2)^3=(P_1P_2)^2(P_1P_2)=\frac{8}{9}(P_1P_2)(P_1P_2)=\frac{8}{9}(P_1P_2)^2=\left(\frac{8}{9}\right)^2(P_1P_2)$

以下同様に、$(P_1P_2)^n=\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}(P_1P_2)=\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}\cdot\frac{2}{9}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ である。

右から P_1 をかけると、$(P_1P_2)^nP_1=\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}\cdot\frac{2}{9}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}=\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}\cdot\frac{2}{27}\begin{pmatrix} 4 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 8 \end{pmatrix}=\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}=\left(\frac{8}{9}\right)^nP_1$

よって $\underline{r_n=\left(\frac{8}{9}\right)^n}$

(3) $P_1^n=P_1$, $P_2^n=P_2$ なので、例えば、$P_1P_2P_2P_1P_1P_2=P_1P_2^2P_1^2P_2=P_1P_2P_1P_2=(P_1P_2)^2$ となる。連続した P_1 or P_2 の積はそれぞれ P_1 or P_2 であるから、$P_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ の左端が P_1 であることを考えると、P_1 と P_2 が互い違いに並んでいるものを考えればよい。

(2)を利用して、求める異なる行列は、①P_1　②P_1P_2　③$P_1P_2P_1=(P_1P_2)P_1=\frac{8}{9}P_1$ ($\because$ (2)より $(P_1P_2)^nP_1=\left(\frac{8}{9}\right)^nP_1$)

④$(P_1P_2)^2=P_1P_2P_1P_2=(P_1P_2P_1)P_2=\frac{8}{9}P_1P_2$　⑤$(P_1P_2)^2P_1=\left(\frac{8}{9}\right)^2P_1$　⑥$(P_1P_2)^3=(P_1P_2)^2P_1P_2=\left(\frac{8}{9}\right)^2P_1P_2$

の$\underline{6個}$ある。

[補] ※ $P^2-(x+y)P+\left(xy-\frac{2}{9}\right)E=0$　$P^2=P$ だから $P-(x+y)P+\left(xy-\frac{2}{9}\right)E=0$　$(x+y-1)P=\left(xy-\frac{2}{9}\right)E$

(i) $x+y-1=0$ のとき $0=\left(xy-\frac{2}{9}\right)E$　$E\neq0$ ので $xy=\frac{2}{9}$　$x(1-x)=\frac{2}{9}$　$9x^2-9x+2=0$　$(3x-1)(3x-2)=0$

$x=\frac{1}{3},\frac{2}{3}$　$x_1<x_2$ より　$x_1=\frac{1}{3}$ (このとき $y_1=\frac{2}{3}$)　$x_2=\frac{2}{3}$ (このとき $y_2=\frac{1}{3}$)

(ii) $x+y-1\neq0$ のとき $P=kE$ の形であるが、$P=\begin{pmatrix} x & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & y \end{pmatrix}$ をみたす x,y は存在しない。

④ 自然数が1つずつかかれている玉が①①②①②③①②③④①②③④⑤①②----のように1列に並べられている。次の問いに答えよ。 (1) 数100がかかれた玉が最初に現れるのは何番目か

(2) 自然数nに対し、$2n^2$番目の玉にかかれている数は何か

(3) 1番目から$2n^2$番目の玉を全て袋に入れた。この袋から2つの玉を取り出すとき、同じ数がかかれた玉を取り出す確率を求めよ。

[考] (1) 群数列の有名問題です。

(2) 第k群の総項数はk個，$2n^2$番目がk群にあるとすれば，$\frac{(k-1)k}{2} < 2n^2 \leqq \frac{k(k+1)}{2}$，これをみたす$k$は？

(3) 表みたいなものを作るとわかりやすいでしょう。$2n^2$番目は第k群にあれば，第1群から第$(k-1)$群までの総項数をT_{k-1}，第1群から第k群までの総項数をT_kとしたとき，$T_{k-1} < 2n^2 \leqq T_k$が成り立ち，これをみたす整数kをnで表す。

[解] (1) |①|①②|①②③|①②③④|----|①②③----$\textcircled{\scriptsize k-1}$|①②③----$\textcircled{\scriptsize k-1}$ $\textcircled{\scriptsize k}$| のように群にわける。

第k群の末項がkであり，最初に数$\textcircled{\scriptsize k}$が現れる。数100は第100群の末項である。

よって $1+2+\cdots+100 = \frac{100\times101}{2} = \underline{5050}$（番目）

(2) $2n^2$番目の玉が第k群にあるとすれば，$\frac{(k-1)k}{2} < 2n^2 \leqq \frac{k(k+1)}{2}$ これをみたす$k=2n$，$(2n-1)$群までの総項数T_{2n-1}

$T_{2n-1} = \frac{(2n-1-1)\cdot 2n}{2} = 2n^2-n$ よって $2n^2$番目は第$2n$群の $2n^2-(2n^2-n)=n$番目，よって求める数は$\underline{n}$

(3) 玉の取り出し方の組合せの数は ${}_{2n^2}C_2 = \frac{2n^2(2n^2-1)}{2} = n^2(2n^2-1)$

第1群 1

第2群 1 2

〃3〃 1 2 3

〃 ⋮ 〃 1 2 3 ⋯

〃n〃 1 2 3 4 ---- n

〃$n+1$〃 1 2 3 4 ---- n $n+1$

〃$n+2$〃 1 2 3 4 ---- n $n+1$ $n+2$

⋮

〃$2n-3$〃 1 2 3 4 ---- n $n+1$ $n+2$ ---- $2n-3$

〃$2n-2$〃 1 2 3 4 ---- n $n+1$ $n+2$ ---- $2n-3$ $2n-2$

〃$2n-1$〃 1 2 3 4 ---- n $n+1$ $n+2$ ---- $2n-3$ $2n-2$ $2n-1$

〃$2n$〃 1 2 3 4 ---- n

1を2個とる組合せ ${}_{2n}C_2$

2を 〃 ${}_{2n-1}C_2$

⋮

nを 〃 ${}_{2n-(n-1)}C_2$ $= {}_{n+1}C_2$であり，次に${}_nC_2$がないことに注意

$\left.\right\} \sum_{l=0}^{n-1} {}_{2n-l}C_2$

$n+1$を 〃 ${}_{n-1}C_2$（数$n+1$は$n-1$個ある）

$n+2$を 〃 ${}_{n-2}C_2$

⋮

$2n-2$を 〃 ${}_2C_2$

$\left.\right\} \sum_{l=2}^{n-1} {}_lC_2$

$$\sum_{l=2}^{n-1} {}_lC_2 + \sum_{l=0}^{n-1} {}_{2n-l}C_2 = ({}_2C_2+{}_3C_2+\cdots+{}_{n-1}C_2) + ({}_{2n}C_2+{}_{2n-1}C_2+\cdots+{}_{2n-(n-1)}C_2)$$

$$=({}_2C_2+{}_3C_2+\cdots+{}_{n-1}C_2)+{}_nC_2+({}_{n+1}C_2+{}_{n+2}C_2+\cdots+{}_{2n-1}C_2+{}_{2n}C_2)-{}_nC_2 = \sum_{l=2}^{2n} {}_lC_2 - {}_nC_2 = \sum_{l=2}^{2n} \frac{l(l-1)}{2} - {}_nC_2$$

$$= \frac{1}{2}(1\cdot2+2\cdot3+\cdots+(2n-1)2n) - {}_nC_2 = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2n-1} m(m+1) - {}_nC_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2n-1)(2n)(2n+1)}{3} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}\left\{\frac{2(4n^2-1)}{3} - \frac{3(n-1)}{3}\right\}$$

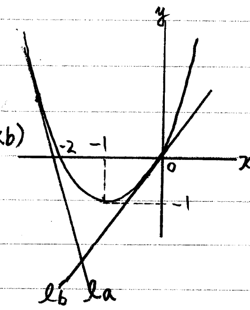
$$= \frac{n(8n^2-3n+1)}{6}$$ よって求める確率は $\frac{n(8n^2-3n+1)}{6} \div n^2(2n^2-1) = \underline{\frac{8n^2-3n+1}{6n(2n^2-1)}}$

[1] 放物線 $C: y=x^2+2x$ 上の2点 (a, a^2+2a), (b, b^2+2b) における接線をそれぞれ l_a, l_b とするとき,次の問いに答えよ。ただし, $a<b$ とする。(1) 2直線 l_a, l_b の方程式を求めよ。また, l_a と l_b の交点の x 座標を求めよ。

(2) 放物線 C と2直線 l_a, l_b とで囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(3) 2直線 l_a, l_b が垂直に交わるように a, b が動くとき, a, b がみたす関係式を求めよ。また,そのときの面積 S の最小値とそれを与える a, b の値を求めよ。

[考] どの参考書にものっている有名問題です。[別解]もあります。

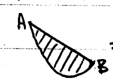


[解] (1) $C: y=x^2+2x$, $y'=2x+2$

$l_a: y=(2a+2)(x-a)+a^2+2a=\underline{2(a+1)x-a^2}$ 同様に $\underline{l_b=2(b+1)x-b^2}$

交点の x 座標 $2(a+1)x-a^2=2(b+1)x-b^2$ $2(a-b)x=(a+b)(a-b)$ $\underline{x=\frac{a+b}{2}}$ $(\because a<b)$

(2) 右下図 $A(a, a^2+2a)$, $B(b, b^2+2b)$ ABの式: $y=mx+n$



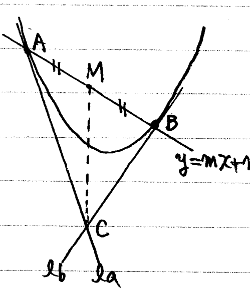
$=\int_a^b mx+n-(x^2+2x)\,dx=\int_a^b -(x-a)(x-b)\,dx=\frac{1}{6}(b-a)^3$

Cの y 座標は $2(a+1)\cdot\frac{a+b}{2}-a^2=ab+a+b$, MはABの中点だから,

Mの y 座標は $\frac{a^2+2a+b^2+2b}{2}$

よって $\triangle ABC=\frac{1}{2}(b-a)\cdot\left(\frac{a^2+2a+b^2+2b}{2}-(ab+a+b)\right)=\frac{1}{2}(b-a)\cdot\frac{a^2+b^2-2ab}{2}=\frac{(b-a)^3}{4}$

したがって,求める面積 $S=\frac{(b-a)^3}{4}-\frac{(b-a)^3}{6}=\underline{\frac{(b-a)^3}{12}}$



(3) $2(a+1)\cdot 2(b+1)=-1$ $(a<b)$ のとき $b-a=k\,(>0)$ の最小値を求めることにする。

$(a+1)(b+1)=-\frac{1}{4}$ に $b=a+k$ を代入 $(a+1)(a+k+1)=-\frac{1}{4}$

$a^2+(k+2)a+k+\frac{5}{4}=0$ a は実数だから判別式 $D\geqq 0$ が必要

$D=(k+2)^2-4(k+\frac{5}{4})=k^2-1\geqq 0$ $(k+1)(k-1)\geqq 0$ $k+1>0$ だから $k-1\geqq 0$ $k\geqq 1$

$k=1$ のとき $a^2+3a+\frac{9}{4}=(a+\frac{3}{2})^2=0$ $a=-\frac{3}{2}$, $b=a+k=-\frac{3}{2}+1=-\frac{1}{2}$

すなわち $a=-\frac{3}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$ のとき k は最小値1をとる。よって S の最小値は $\underline{\frac{1}{12}\ (a=-\frac{3}{2}, b=-\frac{1}{2}\text{ のとき})}$

[別解] (2) $S=\int_a^\alpha (x^2+2x-2(a+1)x+a^2)\,dx+\int_\alpha^b (x^2+2x-2(b+1)x+b^2)\,dx=\int_a^\alpha (x-a)^2\,dx+\int_\alpha^b (x-b)^2\,dx$ $(\alpha=\frac{a+b}{2})$

$=\left[\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_a^\alpha+\left[\frac{1}{3}(x-b)^3\right]_\alpha^b=\frac{1}{3}(\alpha-a)^3-\frac{1}{3}(\alpha-b)^3=\frac{1}{3}\cdot\frac{(b-a)^3}{8}-\frac{1}{3}\cdot\frac{(a-b)^3}{8}=\frac{(b-a)^3}{12}$

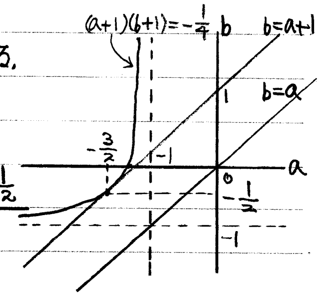
(3) たて軸 b, よこ軸 a で $(a+1)(b+1)=-\frac{1}{4}$, $b>a$ を図示。$b=a+k$ との交点を調べる。

接するとき $(a+1)(a+k+1)=-\frac{1}{4}$ $a^2+(k+2)a+k+\frac{5}{4}=0$ の判別式 $D=0$ より

$(k+2)^2-4(k+\frac{5}{4})=0$ $k^2-1=0$ $k=\pm 1$ $k>0$ だから $k=1$

$k\geqq 1$ であれば,交点が存在するので, k の最小値は1である。よって S の最小値は $\underline{\frac{1}{12}}$

$a^2+3a+\frac{9}{4}=0$ $(a+\frac{3}{2})^2=0$ $\therefore \underline{a=-\frac{3}{2}}$, $b=a+k=-\frac{3}{2}+1=\underline{-\frac{1}{2}}$



[2] 1から4までの番号をかいた玉が2個ずつ、合計8個の玉が入った袋があり、この袋から玉1個を取り出すという操作を続けて行う。ただし、取り出した玉は袋に戻さず、またすでに取り出した玉と同じ番号の玉が出てきた時点で一連の操作を終了するものとする。玉をちょうどn個取り出した時点で、操作が終わる確率を$P(n)$とおく。次の問いに答えよ。(1) $P(2)$, $P(3)$を求めよ。(2) 6以上のkに対し、$P(k)=0$が成り立つことを示せ。(3) 一連の操作が終了するまでに、取り出された玉の個数の期待値を求めよ。

[考1] 漸化式みたいなものを作ると、(1),(2),(3)が楽にできます。$P(2)$は$(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)$のいずれかですから
$P(2)=\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot4=\frac{1}{7}$, $P(3)$は、2個取り出した時点で終わらなくて、3回目以降の操作をするpro. $(1-P(2))$を考えて同じ番号の玉を取り出す場合　すなわち $P(3)=(1-P(2))\cdot\frac{2}{6}$ となります。$P(4)$は $(1-P(3))$ではなくて、$\{1-(P(2)+P(3))\}$にかけることを考えねばなりません。$\{1-(P(2)+P(3))\}$は4回目以降の操作をするpro.ですから、$P(4)=\{1-(P(2)+P(3))\}\cdot\frac{3}{5}$です。
4回目までに、終わらないとき、1,2,3,4の数字が全て現れていますので、5回目には必ず終了。したがって6回目の操作をすることは、絶対にありません。したがって $P(2)+P(3)+P(4)+P(5)=1$ もわかります。

[解1] (1) [考1]より $P(2)=\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot4=\underline{\frac{1}{7}}$, $P(3)=(1-P(2))\cdot\frac{2}{6}=(1-\frac{1}{7})\cdot\frac{2}{6}=\underline{\frac{2}{7}}$

(2) $n=4$の時点で操作が終わらないのは、4種の番号1,2,3,4が全て出ていることで、5回目の操作をすると、必ず1,2,3,4のいずれかの玉が出ることになるから、5回目までには、必ず終了することになる。
したがって、6回目以上の操作をすることはなく、題意が言える。

(3) $P(4)=(1-P(2)-P(3))\cdot\frac{3}{5}=(1-\frac{1}{7}-\frac{2}{7})\cdot\frac{3}{5}=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{5}=\frac{12}{35}$　　$P(4)$ $\cancel{1},1,\cancel{2},2,\cancel{3},3,4,4,$
$P(5)=(1-P(2)-P(3)-P(4))\cdot\frac{4}{4}=(1-\frac{1}{7}-\frac{2}{7}-\frac{12}{35})\cdot1=\frac{4}{7}-\frac{12}{35}=\frac{8}{35}$
よって求める期待値は、$2\cdot\frac{1}{7}+3\cdot\frac{2}{7}+4\cdot\frac{12}{35}+5\cdot\frac{8}{35}=\frac{1}{35}(10+30+48+40)=\underline{\frac{128}{35}}$

[考2] (1) $P(2)$は、とにかく$\frac{8}{8}$のpro.で1個を取り出し、2回目に$\frac{1}{7}$のpro.で同番号の玉を取り出す。
$P(3)$は、$\frac{8}{8}$のpro.で1個取り出し、2回目は、1回目と異なる番号の玉を$\frac{6}{7}$のpro.で取り出し、3回目に1回目 or 2回目と同番号の玉をpro. $\frac{2}{6}$で取り出す。

[解2] (1) $P(2)=\frac{8}{8}\cdot\frac{1}{7}=\underline{\frac{1}{7}}$, $P(3)=\frac{8}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{2}{6}=\underline{\frac{2}{7}}$　　$P(3)$ $\cancel{1},1,\cancel{2},2,3,3,4,4,$

(2) $P(4)=\frac{8}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{12}{35}$, $P(5)=\frac{8}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{4}=\frac{8}{35}$　　$P(4)$ $\cancel{1},1,\cancel{2},2,\cancel{3},3,4,4,$
5回目の操作をするとき、4回目までに、1,2,3,4の数字が全て現れているので、5回目の操作では、必ず終了することになり、6回目以降の操作をすることはない。よって題意がいえる。　　$P(5)$ $\cancel{1},1,\cancel{2},2,\cancel{3},3,\cancel{4},4,$

(3) 求める期待値は $2\times\frac{1}{7}+3\times\frac{2}{7}+4\times\frac{12}{35}+5\times\frac{8}{35}=\frac{1}{35}(10+30+48+40)=\underline{\frac{128}{35}}$
次頁下に[解3]をかいてみました。

③ 数列$\{a_n\}$が $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=2^n-1$ $(n=1,2,3,\cdots)$ をみたしている.次の問いに答えよ.
(1) 一般項 a_n を求めよ。(2) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ とおくとき, $S_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ となることを数学的帰納法を用いて証明せよ. (3) 和 $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_k}$ を求めよ.

[解] (1)
$$\begin{array}{rl} & a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}+na_n=2^n-1 \\ -) & a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=2^{n-1}-1 \quad (n\geq 2) \\ \hline & na_n=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}(2-1)=2^{n-1} \end{array}$$

$\therefore a_n=\frac{2^{n-1}}{n}$ $(n\geq 2)$ $n=1$ のとき $a_1=2^1-1=1$ であるが $a_1=\frac{2^0}{1}=1$ であるから
$n\geq 1$ で $a_n=\frac{2^{n-1}}{n}$ が成立

(2) [I] $S_1=4-\frac{3}{2^0}=1$ は、$a_1=1$ と同じ $\therefore n=1$ のとき $S_1=a_1=1$ で成立。
[II] $S_i=4-\frac{i+2}{2^{i-1}}$ が成立すると仮定する。
$S_{i+1}=S_i+\frac{1}{a_{i+1}}=4-\frac{i+2}{2^{i-1}}+\frac{i+1}{2^i}=4-\frac{i+3}{2^i}$ だから $n=i+1$ でも成立.
以上[I],[II]より証明できた.

(3)
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^{k-1}}=\frac{1^2}{2^0}+\frac{2^2}{2^1}+\frac{3^2}{2^2}+\cdots+\frac{n^2}{2^{n-1}}=T_n$$
$$\begin{array}{rl} & \frac{1^2}{2^1}+\frac{2^2}{2^2}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{2^{n-1}}+\frac{n^2}{2^n}=\frac{1}{2}T_n \quad (- \\ \hline & \frac{1}{2^0}+\frac{3}{2^1}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}-\frac{n^2}{2^n}=\frac{1}{2}T_n \end{array}$$
$$\frac{1}{2}T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^{k-1}}-\frac{n^2}{2^n}=2\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}-\frac{n^2}{2^n}=2\cdot S_n-\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n^2}{2^n}=8-\frac{2n+4}{2^{n-1}}-2+\frac{2}{2^n}-\frac{n^2}{2^n}$$
$$T_n=12-\frac{4n+8}{2^{n-1}}+\frac{2}{2^{n-1}}-\frac{n^2}{2^{n-1}}=12-\frac{n^2+4n+6}{2^{n-1}}$$

[補] 紙面が余りましたので,②を次の様に解いてみます.ややこしいですが[解3]です。
1,1,2,2,3,3,4,4,の8個の数を全て並べると, $\frac{8!}{2!2!2!2!}=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3=m$
P(2)は □□○○○○○○ □,□は(1,1)(2,2)(3,3)(4,4)の4通り,残り6個の並べ方は $\frac{6!}{2!2!2!}=6\cdot5\cdot3$
$P(2)=\frac{6\cdot5\cdot3\cdot4}{m}=\frac{1}{7}$

P(3)は □□□○○○○○ □□□は ${}_4C_2\cdot2!\cdot2=4\cdot3\cdot2$ ○○○○○は $\frac{5!}{2!2!}=5\cdot2\cdot3$
$P(3)=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot5\cdot2\cdot3}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}=\frac{2}{7}$

P(4)は □□□□○○○○ □□□□は ${}_4C_3\cdot3!\cdot3$ ○○○○は $\frac{4!}{2!}=4\cdot3$
$P(4)=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot3\cdot4\cdot3}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}=\frac{12}{35}$

P(5)は □□□□□○○○ □□□□□は ${}_4C_4\cdot4!\cdot4$ ○○○は3!
$P(5)=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot2}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}=\frac{8}{35}$

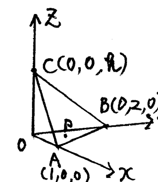
1 4面体OABCにおいて、3つのvector $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ は、どの2つも垂直であり、$h>0$ に対して、$|\overrightarrow{OA}|=1, |\overrightarrow{OB}|=2, |\overrightarrow{OC}|=h$ とする。3点 O, A, B を通る平面上の点Pは、$\overrightarrow{CP}$ が $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$ のどちらとも垂直となる点であるとする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ とするとき、α と β を h を用いて表せ。

(2) 直線OPと直線ABが直交していることを示せ。

(3) $\triangle PAB$ は辺ABを底辺とする2等辺3角形ではないことを示せ。

[解] xyz空間において $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,h)$ とおくことができる。



点 $P(x,y,0)$ とすると $\overrightarrow{CP}=(x,y,-h)$, $\overrightarrow{CA}=(1,0,-h)$, $\overrightarrow{CB}=(0,2,-h)$

$\overrightarrow{CP}\perp\overrightarrow{CA}$ より $\begin{pmatrix}x\\y\\-h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-h\end{pmatrix}=0 \quad \therefore x+h^2=0$ ---① $\quad \overrightarrow{CP}\perp\overrightarrow{CB}$ より $\begin{pmatrix}x\\y\\-h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\-h\end{pmatrix}=0 \quad \therefore 2y+h^2=0$ ---②

(1) $\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ より $x=\alpha$, $y=2\beta$, $(z=0)$ ①, ② より $\alpha+h^2=0$ $\underline{\alpha=-h^2}$, $4\beta+h^2=0$ $\underline{\beta=-\frac{1}{4}h^2}$

(2) $P(-h^2, -\frac{1}{2}h^2, 0)$ であるから直線OPの方向vectorと直線ABの方向vector $(-1,2,0)$ を考えて

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=(-h^2)\cdot(-1)+(-\frac{1}{2}h^2)\cdot 2+0\cdot 0=h^2-h^2=0$ よって示された。

(3) $\overrightarrow{PA}=(1+h^2, \frac{1}{2}h^2, 0)$, $\overrightarrow{PB}=(h^2, 2+\frac{1}{2}h^2, 0)$

$|\overrightarrow{PA}|^2-|\overrightarrow{PB}|^2=(1+h^2)^2+(\frac{1}{2}h^2)^2-\{(h^2)^2+(2+\frac{1}{2}h^2)^2\}=1+2h^2+h^4+\frac{1}{4}h^4-(h^4+4+2h^2+\frac{1}{4}h^4)=-3$

$\therefore |\overrightarrow{PA}|^2-|\overrightarrow{PB}|^2\neq 0 \quad \therefore |\overrightarrow{PA}|\neq|\overrightarrow{PB}|$ よって示された。

[補] '$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ はどの2つも垂直' とありますので、座標で考える方がわかりやすい。

2 関数 $f(x)=xe^x$ について、次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=f(x)$ について、増減および凹凸を調べ、そのグラフをかけ。ただし、必要ならば $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$ を用いてもよい。

(2) 不定積分 $\int xe^x dx$, $\int x^2e^{2x}dx$ をそれぞれ求めよ。

(3) $0\leqq t\leqq 1$ に対し、$g(x)=f(x)-f(t)$ とおく。$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で、曲線 $y=g(x)$ と x軸ではさまれる部分を、x軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を $V(t)$ とする。$V(t)$ を求めよ。

(4) (3)の $V(t)$ が最小値をとるときの t の値を a とする。最小値 $V(a)$ と $f(a)$ の値を求めよ。ただし a の値を求める必要はない。

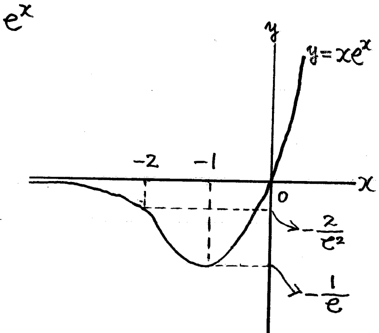
[解] (1) $f(x)=xe^x$, $f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$, $f''(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	$f(-2)$	↘	$f(-1)$	↗ $+\infty$

変曲点 $f(-2)=-2e^{-2}$

極小値 $f(-1)=-e^{-1}$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

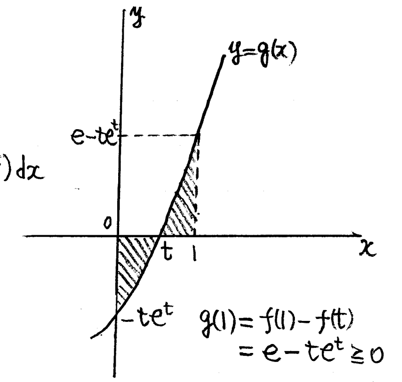


(2) $\int xe^x dx = \underline{xe^x - e^x + C_1}$

$f = x^2 \quad g' = e^{2x}$ 　 $p = x \quad q' = e^{2x}$

$f' = 2x \quad g = \frac{1}{2}e^{2x}$ 　 $p' = 1 \quad q = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int x^2e^{2x}dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int xe^{2x}dx + C_2$$
$$= \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \left\{\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx\right\} + C_2$$
$$= \underline{\frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C_2}$$



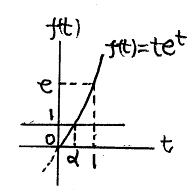
(3) (1)のグラフより $0 \leqq t \leqq 1$ のとき $0 \leqq f(t) \leqq e$, $g(0) = f(0) - f(t) = -te^t \leqq 0$

$$V(t) = \pi\int_0^1 (g(x))^2 dx = \pi\int_0^1 (xe^x - te^t)^2 dx = \pi\int_0^1 (x^2e^{2x} - 2te^t xe^x + t^2e^{2t}) dx$$
$$= \pi\left[\frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} - 2te^t(xe^x - e^x) + t^2e^{2t}x\right]_0^1$$
$$= \pi\left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{4}e^2 - 2te^t(e - e) + t^2e^{2t} - \frac{1}{4} - 2te^t\right)$$
$$= \underline{\pi\left(t^2e^{2t} - 2te^t + \frac{e^2-1}{4}\right)}$$

$g(1) = f(1) - f(t)$
$= e - te^t \geqq 0$

$0 \leqq t \leqq 1$ では $0 \leqq te^t \leqq e$

(4) $V'(t) = \pi(2te^{2t} + 2t^2e^{2t} - 2e^t - 2te^t) = \pi\{2te^{2t}(1+t) - 2e^t(1+t)\}$
$$= 2\pi(1+t)(te^{2t} - e^t) = 2\pi(1+t)(te^t - 1)e^t$$

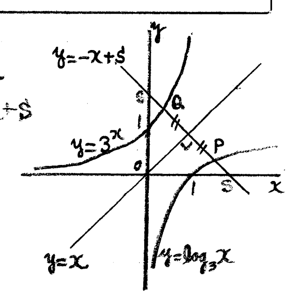


$0 \leqq t \leqq 1$ では $1+t > 0$, $e^t > 0$, 右グラフより $te^t = 1$ となる t が只1個存在する。
これをαとする。すなわち $\alpha e^\alpha - 1 = 0$, $t = \alpha$ の前後で $te^t - 1$ は負から正へ
符号を変え、$V(t)$ は $t = \alpha$ で極小かつ最小であることがわかる。
すなわち $\alpha = a$ であり、$ae^a = 1$

$$V(a) = \pi\left(a^2e^{2a} - 2ae^a + \frac{e^2-1}{4}\right) = \pi\left(1^2 - 2\cdot 1 + \frac{e^2-1}{4}\right) = \pi\left(-1 + \frac{e^2-1}{4}\right) = \underline{\frac{\pi(e^2-5)}{4}}$$

$f(a) = ae^a = \underline{1}$

③ 関数 $y = \log_3 x$ とその逆関数 $y = 3^x$ のグラフが直線 $y = -x + s$ と交わる点をそれぞれ $P(t, \log_3 t)$, $Q(u, 3^u)$ とする。
(1) 線分PQの中点の座標は、$\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right)$ であることを示せ。
(2) s, t, u は、$s = t + u$, $u = \log_3 t$ をみたすことを示せ。
(3) $\displaystyle\lim_{t \to 3} \frac{su - k}{t - 3}$ が有限な値となるように、定数kの値を定め、その極限値を求めよ。



[解] (1) 2つのグラフは、$y = x$ に関してそれぞれ対称であり、$y = x$ と $y = -x + s$ は直角に交わるので、PとQは $y = x$ に対称である。すなわちPQの中点は $y = x$ と $y = -x + s$ の交点であり、連立して解いて $\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right)$ となる。

(2) $P(t, \log_3 t)$, $Q(u, 3^u)$ の中点が $\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right)$ であるから、$\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right) = \left(\frac{t+u}{2}, \frac{\log_3 t + 3^u}{2}\right)$
$\therefore s = t + u$, また、点Pの $y = x$ に関する対称点の座標は $(\log_3 t, t)$ のようにもかけて、
この点がQと一致することより、$u = \log_3 t$

(3) $\frac{su-k}{t-3}=\frac{(t+\log_3 t)\log_3 t-k}{t-3}$ については、$t\to 3$ のとき 分母 $t-3\to 0$ であるから、
分子 $(t+\log_3 t)\log_3 t-k \not\to 0$ とすれば、極限値は $\pm\infty$ となり、有限な値となることはない。
したがって $(t+\log_3 t)\log_3 t-k\to(3+\log_3 3)\log_3 3-k=4-k=0$　∴ $\underline{k=4}$ が必要。
このとき、$g(t)=(t+\log_3 t)\log_3 t$ とおけば、$g'(t)=\left(1+\frac{1}{t\log 3}\right)\frac{\log t}{\log 3}+\left(t+\frac{\log t}{\log 3}\right)\cdot\frac{1}{t\log 3}$，$g(3)=4$，

$$\lim_{t\to 3}\frac{su-k}{t-3}=\lim_{t\to 3}\frac{g(t)-4}{t-3}=\lim_{t\to 3}\frac{g(t)-g(3)}{t-3}=g'(3)=\left(1+\frac{1}{3\log 3}\right)+(3+1)\cdot\frac{1}{3\log 3}=\underline{1+\frac{5}{3\log 3}}$$

---

④ $a>1$ とする。無限等比級数 $a+ax(1-ax)+ax^2(1-ax)^2+ax^3(1-ax)^3+\cdots\cdots$ が収束するとき、その和を $S(x)$ とする。

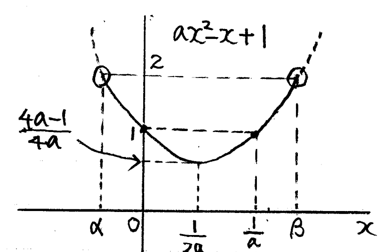
(1) この無限等比級数が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ。また、そのときの $S(x)$ を求めよ。

(2) x が (1) で求めた範囲を動くとき、$S(x)$ のとりえる値の範囲を求めよ。

(3) $I(a)=\int_0^{\frac{1}{a}}S(x)\,dx$ とおくとき、極限値 $\lim_{a\to\infty}I(a)$ を求めよ。

[解] (1) 公比 $x(1-ax)$ だから、収束する条件は $-1<x(1-ax)<1$ である。$ax^2-x-1<0$ …① かつ $ax^2-x+1>0$ …②
①は $\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}<x<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}$（$a>1$ より根号の中は正），②は、左辺 $=0$ の判別式 $1-4a<0$（∵$a>1$）
であるから常に成立する。したがって、求める x の範囲は $\underline{\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}<x<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}}$

このとき $S(x)=\frac{a}{1-x(1-ax)}=\underline{\frac{a}{ax^2-x+1}}$



(2) $ax^2-x+1=a\left(x^2-\frac{1}{a}x\right)+1=a\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2+1-\frac{1}{4a}=a\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2+\frac{4a-1}{4a}$
したがって、右グラフより、$0<\frac{4a-1}{4a}\leqq ax^2-x+1<2$ である。
よって $\underline{\frac{a}{2}<S(x)\leqq\frac{4a^2}{4a-1}}$

$\alpha=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}$，$\beta=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}$
$f(x)=ax^2-x+1$ とおけば
$ax^2-x-1=0$ の解が α,β
であるから $a\alpha^2-\alpha-1=0$
$f(\alpha)=f(\beta)=a\alpha^2-\alpha+1$
$=(a\alpha^2-\alpha-1)+2$
$=0+2=2$

(3) $f(0)=f\left(\frac{1}{a}\right)=1$ であるから、$0\leqq x\leqq\frac{1}{a}$ のとき、$(0<)\frac{4a-1}{4a}\leqq f(x)=ax^2-x+1\leqq 1$

$\frac{1}{1}\leqq\frac{1}{ax^2-x+1}\leqq\frac{4a}{4a-1}$　　$a\leqq\frac{a}{ax^2-x+1}\leqq\frac{4a^2}{4a-1}$

したがって　$\int_0^{\frac{1}{a}}a\,dx\leqq\int_0^{\frac{1}{a}}S(x)\,dx\leqq\int_0^{\frac{1}{a}}\frac{4a^2}{4a-1}\,dx$

$$a[x]_0^{\frac{1}{a}}\leqq I(a)\leqq\frac{4a^2}{4a-1}[x]_0^{\frac{1}{a}}$$

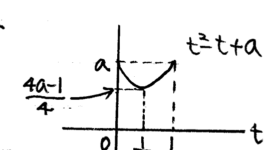
$$1\leqq I(a)\leqq\frac{4a}{4a-1}=\frac{4}{4-\frac{1}{a}}\to 1\ (a\to\infty\ のとき)$$

よってはさみうちの原理により $\lim_{a\to\infty}I(a)=\underline{1}$

[補] $I(a)=\int_0^{\frac{1}{a}}S(x)\,dx$ を $x=\frac{1}{a}t$ とおけば $dx=\frac{1}{a}dt$，$\begin{array}{c|c}x & 0\to\frac{1}{a}\\ \hline t & 0\to 1\end{array}$ ですから $I(a)=\int_0^1\frac{a}{a\left(\frac{1}{a}t\right)^2-\left(\frac{1}{a}t\right)+1}\cdot\frac{1}{a}dt$

$I(a)=\int_0^1\frac{1}{\frac{1}{a}t^2-\frac{1}{a}t+1}dt=\int_0^1\frac{a}{t^2-t+a}dt$　$0\leqq t\leqq 1$ では $\frac{4a-1}{4}\leqq t^2-t+a\leqq a$

∴ $\frac{1}{a}\leqq\frac{1}{t^2-t+a}\leqq\frac{4}{4a-1}$　a をかけて　$1\leqq\frac{a}{t^2-t+a}\leqq\frac{4a}{4a-1}$



∴ $\int_0^1 dt\leqq I(a)\leqq\int_0^1\frac{4a}{4a-1}dt$　$1\leqq I(a)\leqq\frac{4a}{4a-1}\to 1\ (a\to\infty\ のとき)$

1. 平面上の三角形ABCで $|\overrightarrow{AB}|=7$, $|\overrightarrow{BC}|=5$, $|\overrightarrow{AC}|=6$ となるものを考える. また三角形ABCの内部の点Pは, $\overrightarrow{PA}+s\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ $(s>0)$ をみたすとする. 次の問いに答えよ.

(1) $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ とするとき, α と β を s で表せ.

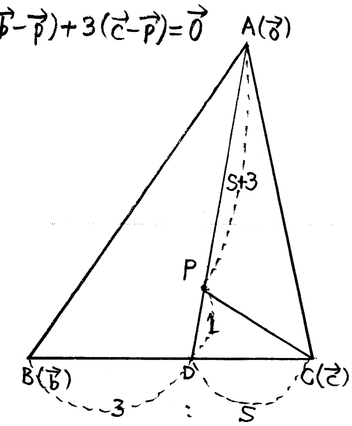
(2) 2直線AP, BCの交点をDとするとき, $\dfrac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{DC}|}$ と $\dfrac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PD}|}$ を s を用いて表せ.

(3) 三角形ABCの面積を求めよ.

(4) 三角形APCの面積が $2\sqrt{6}$ となるような s の値を求めよ.

[解] 右図のようにA($\vec{0}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$)とする. P($\vec{p}$)とすれば, 条件は $-\vec{p}+s(\vec{b}-\vec{p})+3(\vec{c}-\vec{p})=\vec{0}$

$\vec{p}=\dfrac{s}{s+4}\vec{b}+\dfrac{3}{s+4}\vec{c}$ …① $(\because s>0$ なので $s+4>0)$



(1) $\vec{p}=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}=\dfrac{s}{s+4}\vec{b}+\dfrac{3}{s+4}\vec{c}$, $\vec{b},\vec{c}$ は独立なので

$\underline{\alpha=\dfrac{s}{s+4}}$, $\underline{\beta=\dfrac{3}{s+4}}$

(2) ①より $\vec{p}=\dfrac{s\vec{b}+3\vec{c}}{s+4}=\dfrac{s\vec{b}+3\vec{c}}{s+3}\cdot\dfrac{s+3}{s+4}$

右図参照 $\dfrac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{DC}|}=\underline{\dfrac{3}{s}}$, $\dfrac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PD}|}=\dfrac{s+3}{1}=\underline{s+3}$

(3) $l=\dfrac{7+5+6}{2}=9$ ヘロンの公式より $\triangle ABC=\sqrt{9\cdot2\cdot4\cdot3}=\underline{6\sqrt{6}}$

(4) $\triangle APC=\triangle ADC\times\dfrac{s+3}{s+4}=\left(\triangle ABC\times\dfrac{s}{s+3}\right)\times\dfrac{s+3}{s+4}=\triangle ABC\times\dfrac{s}{s+4}$ $\therefore 2\sqrt{6}=6\sqrt{6}\times\dfrac{s}{s+4}$ $3s=s+4$ $\underline{s=2}$

2. a, b は定数で $ab>0$ とする. 放物線 $C_1: y=ax^2+b$ 上の点 $P(t, at^2+b)$ における接線を l とし, 放物線 $C_2: y=ax^2$ と l で囲まれた図形の面積を S とする. 次の問いに答えよ.

(1) l の方程式を求めよ.　(2) l と C_2 のすべての交点の x 座標を求めよ.

(3) 点Pが C_1 上を動くとき, S は点Pの位置によらず一定であることを示せ.

[解] (1) $y'=2ax$　$l: y=2at(x-t)+at^2+b=\underline{2atx-at^2+b}$

(2) $2atx-at^2+b=ax^2$　$ax^2-2atx+at^2-b=0$　$ab>0$ より $a\neq0$ ので $x^2-2tx+t^2-\dfrac{b}{a}=0$

$x=t\pm\sqrt{t^2-\left(t^2-\frac{b}{a}\right)}=\underline{t\pm\sqrt{\frac{b}{a}}}$ $(\because ab>0$ より $\frac{b}{a}>0)$

(3) $\alpha=t-\sqrt{\frac{b}{a}}$, $\beta=t+\sqrt{\frac{b}{a}}$ とおく.

$S=\left|\displaystyle\int_\alpha^\beta\{ax^2-(2atx-at^2+b)\}dx\right|=\left|\displaystyle\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx\right|=\left|-\dfrac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\right|=\left|-\dfrac{a}{6}\left(2\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^3\right|$

$=\left|-\dfrac{a}{6}\cdot8\cdot\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right|=\left|\dfrac{4}{3}\cdot b\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right|$ (一定)

3. 座標平面上で x 座標と y 座標がともに0以上の整数である点を、ここでは格子点とよぶ。格子点 $(0,0)$ から格子点 (k,l) へ、両端点がともに格子点であり長さが1の線分を用いて、格子点 $(0,0)$ から順に最も少ない本数でつなぐ方法を数える。例えば格子点 $(0,0)$ から格子点 $(3,1)$ へつなぐ方法の数は4である。次の問いに答えよ。

(1) 格子点 $(0,0)$ から格子点 $(4,0)$ へつなぐ方法の数と、格子点 $(0,0)$ から格子点 $(2,2)$ へつなぐ方法の数をそれぞれ求めよ。

(2) 条件 $k+l=5$ をみたす格子点 (k,l) を考える。格子点 $(0,0)$ から格子点 (k,l) へつなぐ方法の数を、この条件をみたすすべての格子点について足し合わせた数を求めよ。

(3) 条件 $k+l=n\ (n\geqq 1)$ をみたす格子点 (k,l) を考える。格子点 $(0,0)$ から格子点 (k,l) へつなぐ方法の数を、この条件をみたすすべての格子点について足し合わせた数を n を用いて表せ。

(4) 条件 $k+l=n$ (k と l はともに偶数で $n\geqq 2$) をみたす格子点 (k,l) を考える。格子点 $(0,0)$ から格子点 (k,l) へつなぐ方法の数を、この条件をみたすすべての格子点について足した合わせた数を n を用いて表せ。

[解] (3) $k+l=n$ のとき $(k,l)=(n,0),(n-1,1),(n-2,2),\cdots(2,n-2),(1,n-1),(0,n)$ の場合の和であるから

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-2}+{}_nC_{n-1}+{}_nC_n=I_n$ を求めればよい。

2項定理より $(x+1)^n={}_nC_0x^0+{}_nC_1x^1+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_{n-2}x^{n-2}+{}_nC_{n-1}x^{n-1}+{}_nC_nx^n$ であるから

$x=1$ を代入して $I_n=\underline{2^n}$

(1) $(0,0)\to(4,0)$ は $\underline{1通り}$，$(0,0)\to(2,2)$ は $\dfrac{4!}{2!2!}=\underline{6通り}$

(2) (3)で $n=5$ とおいて $I_5=2^5=\underline{32通り}$

(4) k,l は偶数であるから n も偶数でなければならない。$(k,l)=(n,0)(n-2,2),(n-4,4),\cdots(2,n-2),(0,n)$ であるから、求める方法の数は ${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots+{}_nC_{n-2}+{}_nC_n=S_n$ である。

${}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_{n-1}=T_n$ (n は偶数) とする。

$(x+1)^n={}_nC_0x^0+{}_nC_1x^1+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_{n-1}x^{n-1}+{}_nC_nx^n$ において

$x=1$ とすると $2^n=S_n+T_n$，$x=-1$ とすると $0=S_n-T_n$ $\therefore S_n=T_n$ よって $2^n=2S_n$ $\therefore S_n=\underline{2^{n-1}}$

答	
	(1) 1通り, 6通り
	(2) 32通り
	(3) 2^n通り
	(4) 2^{n-1}通り

1 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は $a_1=b_1=2$, $a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{4}a_n-\frac{\sqrt{6}}{4}b_n$, $b_{n+1}=\frac{\sqrt{6}}{4}a_n+\frac{\sqrt{2}}{4}b_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ をみたすものとする. a_nを実部とし, b_nを虚部とする複素数をz_nで表すとき, 次の問いに答えよ.

(1) $z_{n+1}=wz_n$ をみたす複素数wと, その絶対値$|w|$を求めよ.

(2) 複素数平面上で, 点z_{n+1}は点z_nをどのように移動した点であるかを答えよ

(3) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(4) 複素数平面上の3点, $0, z_n, z_{n+1}$, を頂点とする三角形の周と内部を黒くぬりつぶしてできる図形をT_nとする. このとき複素数平面上で, $T_1, T_2, \cdots, T_n, \cdots$ によって黒くぬりつぶされる領域の面積を求めよ.

[考] Black Vol. II. 複素数 P.89 参照.

(1) $a_{n+1}+b_{n+1}i=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a_n-\frac{\sqrt{6}}{4}b_n\right)+\left(\frac{\sqrt{6}}{4}a_n+\frac{\sqrt{2}}{4}b_n\right)i=(a_n+b_ni)(\square+\square i)$ をみたす $\square+\square i=w$ です.

(2) wを極形式にする. (3) $z_n=wz_{n-1}=w^2z_{n-2}=\cdots=w^{n-1}z_1$ (4) 回転, 相似, 相似比と面積比の関係

[解] (1),(2) $a_{n+1}+b_{n+1}i=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a_n-\frac{\sqrt{6}}{4}b_n\right)+\left(\frac{\sqrt{6}}{4}a_n+\frac{\sqrt{2}}{4}b_n\right)i=(a_n+b_ni)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}i\right)$

$\therefore w=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}i=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}i)=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $\quad |w|=\frac{1}{\sqrt{2}}$

点z_nを原点を中心として, 左回りに$\frac{\pi}{3}$回転させ$\frac{1}{\sqrt{2}}$倍したものが点z_{n+1}

(3) $z_n=wz_{n-1}=w^2z_{n-2}=w^3z_{n-3}=\cdots=w^{n-1}z_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{3}+i\sin\frac{(n-1)\pi}{3}\right)\cdot 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

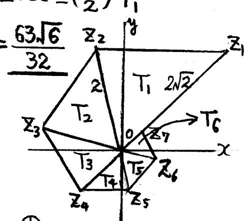
$=\frac{1}{(\sqrt{2})^{n-4}}\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right\}=4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)\right\}$

$\therefore a_n=4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\cos\left(\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)$, $b_n=4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\sin\left(\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)$

(4) $T_n \backsim T_{n+1}$ (相似比$\sqrt{2}:1$) だから面積比 $2:1$ であり $T_{n+1}=\frac{1}{2}T_n$ $\therefore T_n=\frac{1}{2}T_{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^2T_{n-2}=\cdots=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}T_1$

求める面積は $T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6=\sum_{n=1}^{6}T_n=T_1\sum_{n=1}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\sqrt{6}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\frac{1}{2}}=2\sqrt{6}\cdot\frac{63}{64}=\frac{63\sqrt{6}}{32}$

$\left(\because T_1=\frac{1}{2}\cdot|z_1||z_2|\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}\right)$



[補] (4) $T_1+T_2+\cdots+T_n+\cdots$ (無限級数) とmistakeするところでした. 黒くぬりつぶ「す」ですね.

行列を用いると $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3}&-\sin\frac{\pi}{3}\\\sin\frac{\pi}{3}&\cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$ ---①

ですから, 点(a_{n+1}, b_{n+1})は点(a_n, b_n)を原点を中心にして$\frac{\pi}{3}$回転させ$\frac{1}{\sqrt{2}}$倍したものです.

すると, $w=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}i$ となります. (2)から求まってしまいますが----

①を続けると, $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3}&-\sin\frac{\pi}{3}\\\sin\frac{\pi}{3}&\cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\begin{pmatrix}\cos\frac{n\pi}{3}&-\sin\frac{n\pi}{3}\\\sin\frac{n\pi}{3}&\cos\frac{n\pi}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\begin{pmatrix}2\cos\frac{n\pi}{3}-2\sin\frac{n\pi}{3}\\2\sin\frac{n\pi}{3}+2\cos\frac{n\pi}{3}\end{pmatrix}$

$a_{n+1}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(2\cos\frac{n\pi}{3}-2\sin\frac{n\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(-\sin\frac{n\pi}{3}+\cos\frac{n\pi}{3}\right)\overset{※}{=}2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\sin\left(\frac{n\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}\right)$ ($\because$ 合成)

$a_n=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}\right)=4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\sin\left(\frac{n\pi}{3}+\frac{5\pi}{12}\right)=4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\cos\left(\frac{n\pi}{3}+\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{2}\right)=4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\cos\left(\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)$

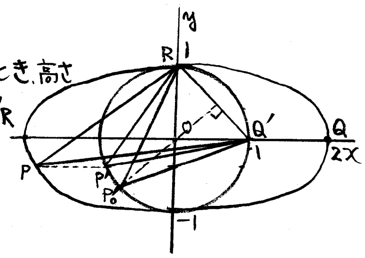
※から合成をしないで $(1,-1)$ と $\left(\cos\frac{n\pi}{3}, \sin\frac{n\pi}{3}\right)$ の内積を用いると, $a_n=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\cdot\sqrt{2}\sqrt{1}\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$ です.

b_nも同様に求まります.

[2] 曲線C：$x^2+4y^2=4$ 上を動く点Pと C上の定点 Q$(2,0)$, R$(0,1)$ がある次の問いに答えよ。
(1) △PQRの面積の最大値とそのときのPの座標を求めよ。
(2) (1)で求めた点Pに対して、直線PQを考える。曲線Cによって囲まれた図形を直線PQで2つに分けたとき直線PQの下方にある部分の面積を求めよよ。

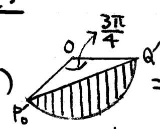
[考1] Black. Vol. II. P.805 [類2], Vol. I. P.347, P.357, Vol. III P151の(4)

[解1] C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ はx軸方向に$\frac{1}{2}$倍すると、円C′：$x^2+y^2=1$ にうつされ、点Q$(2,0)$は点Q′$(1,0)$にうつされ、C上の点Pは C′上の点P′にうつされる。R$(0,1)$は不動である。



(1) △P′Q′Rが最大となるのは、P′が OP′⊥Q′R となるときであり(直径となるとき高さが最大となり、面積が最大)、このとき△PQRも最大である。△PQR＝2△P′Q′R
$P_0'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$のときであるから △$P_0'$Q′R$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$
したがって、求める△PQRの最大値は $2\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)=1+\sqrt{2}$
このときの点 $P\left(-\sqrt{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

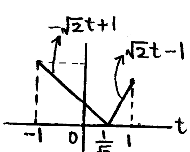
(2) (1)で求めた $P_0'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



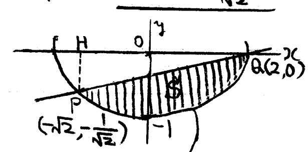
$=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{8}-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ であるから、
求める面積は、2倍して $\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}}$

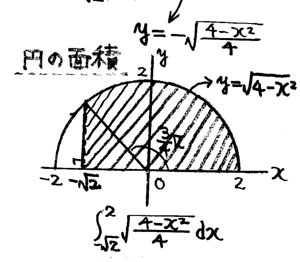
[考2] 楕円C：$\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=1$　$\frac{x}{2}=\cos\theta,\ y=\sin\theta$ とおけば、$P(2\cos\theta,\sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおけます。
Black. Vol. I. P.357, P.358, P.359 など参照

[解2] (1) $P(2\cos\theta,\sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおける。$\overrightarrow{QP}=(2\cos\theta-2,\sin\theta)$, $\overrightarrow{QR}=(-2,1)$ だから
△PQR$=\frac{1}{2}|(2\cos\theta-2)\cdot1-\sin\theta\cdot(-2)|=|\sin\theta+\cos\theta-1|=\left|\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-1\right|$
$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=t$, $-1\leqq t\leqq1$ とおき $|\sqrt{2}t-1|$ のグラフより、最大値は $t=-1$ のとき $\sqrt{2}+1$
$t=-1$ のとき $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-1$　$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$　$\theta=\frac{5}{4}\pi$ であるから $P\left(2\cos\frac{5}{4}\pi,\sin\frac{5}{4}\pi\right)$ ∴ $P\left(-\sqrt{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



(2) 求める面積 $=\int_{-\sqrt{2}}^{2}\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}\,dx-\triangle PQH=\frac{1}{2}\int_{-\sqrt{2}}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx-\frac{1}{2}(2+\sqrt{2})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=S$
下線部は、円の面積を利用して $\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{3}{4}\pi=1+\frac{3}{2}\pi$
したがって $S=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}\pi\right)-\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)=\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}}$





3 次の問いに答えよ

(1) 方程式 $25x+9y=1$ の整数解をすべて求めよ.

(2) 方程式 $25x+9y=33$ の整数解をすべて求めよ.さらに,これらの整数解のうち $|x+y|$ の値が最小となるものを求めよ.

(3) 2つの方程式 $25x+9y=33$, $xy=-570$, を同時にみたす整数解をすべて求めよ.

[考1] Black Vol.II.P.755の(7) 合同式の利用

[解1] (1) $25x+9y=1$　mod 9 では $7x\equiv1$　$28x\equiv4$　$x\equiv4$　$\therefore x=9k+4$

$y=\dfrac{1-25(9k+4)}{9}=-25k+\dfrac{1-100}{9}=-25k-11$　　$\underline{(x,y)=(9k+4,-25k-11)\ (k\text{は整数})}$

(2) $25(x-1)+9(y-1)=-1$, $25(1-x)+9(1-y)=1$　(1)より $1-x=9k+4$, $x=-9k-3$, $1-y=-25k-11$, $y=25k+12$

$\underline{(x,y)=(-9k-3,25k+12)\ (k\text{は整数})}$

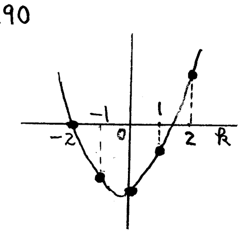
$|x+y|=|-9k-3+25k+12|=|16k+9|$ は, $k=-1$ のとき $\underline{\text{最小値}7}$ $(x,y)=(6,-13)$ のとき

(補) mod 9 で $7x\equiv6$　$28x\equiv24\equiv6$　$x\equiv6$　$x=9l+6$, $y=\dfrac{33-25(9l+6)}{9}=-25l-13$　l は整数でもOK.

(3) (2)より $(-9k-3)(25k+12)=-570$　$(-3k-1)(25k+12)=-190$　$75k^2+61k+12=190$

$75k^2+61k-178=0$　$(k+2)(75k-89)=0$　$\therefore k=-2$　$\underline{(x,y)=(15,-38)}$

(補) mod 3 で $0\cdot k^2+1\cdot k-1=0$, $k=1$ よって $k=1,-2,4,-5,7,\cdots$ のいずれかであろう。



[考2] Black Vol.II.P.1206の(3)

(1) $25x+9y=1\cdots①$ の解の1つは $(4,-11)$ であるから $25\cdot4+9\cdot(-11)=1\cdots②$

①−② より $25(x-4)+9(y+11)=0$　$25(x-4)=-9(y+11)$　25と9は互いに素だから

$x-4=9k$, $25k=-(y+11)$　$\therefore \underline{(x,y)=(9k+4,-25k-11)\ (k\text{は整数})}$

(2) 解の1つは $(x,y)=(-3,12)$ であるから $25(x+3)+9(y-12)=0$　$x+3=9l$, $x=9l-3$, $y-12=-25l$

$\therefore \underline{(x,y)=(9l-3,-25l+12)\ (l\text{は整数})}$　$|x+y|=|-16l+9|$　$l=1$ のとき $\underline{\text{最小値}7}$

(3) (2)より $(9l-3)(-25l+12)=-570$　$(3l-1)(25l-12)=190$　$75l^2-61l-178=0$

$(l-2)(75l+89)=0$　$\therefore l=2$　$\underline{(x,y)=(15,-38)}$

[補] (2) $y=\dfrac{33-25x}{9}=\dfrac{27+6-27x+2x}{9}=3-3x+\dfrac{2x+6}{9}$　y, $3-3x$ は整数だから $2x+6$ は9でわり切れる.

$2x+6=9k$　$x=\dfrac{9k-6}{2}=4k-3+\dfrac{k}{2}$　$k=2l$　$\therefore x=8l-3+l=9l-3$　$y=3-3(9l-3)+2l=-25l+12$

k, l 整数のようにもできますが…… mod が最速のようです。

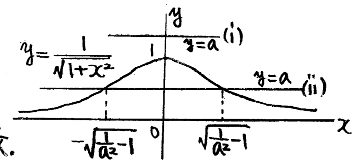
4 a, bを実数とする. $f(x)=2\sqrt{1+x^2}-ax^2$ とし, xについての方程式 $f(x)=b$ を考える. 次の問いに答えよ.

(1) $a>0$ のとき関数 $f(x)$ の最大値を求めよ.

(2) 方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数が最も多くなるときの点 (a,b) の範囲を図示せよ.

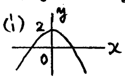
[考] Black. Vol.Ⅲ. P.38, P.279のグラフ,参照. (2)は, $0<a<1$ のとき $2<b<a+\frac{1}{a}$ で最大4個ですが, (a,b)平面での領域図示ですから[解]のように(ア),(イ),(ウ)とわけました。

[解] (1) $f(x)=2\sqrt{1+x^2}-ax^2$　$f'(x)=2\cdot\frac{1}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot 2x-2ax=2x\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-a\right)$



$f(-x)=f(x)$　$f(x)$は偶関数であり, y軸対称のグラフであるから $x\geqq 0$ で考える.

(i) $a\geqq 1$ のとき $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-a\leqq 0$ であるから $x\geqq 0$ では $f'(x)\leqq 0$ であり, $f(x)$は減少関数.

$y=f(x)$ のグラフは, $x\leqq 0$ も入れると 

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left\{x\left(2\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-ax\right)\right\}=-\infty$

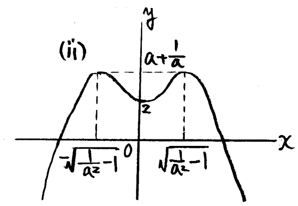
したがって $a\geqq 1$ のとき最大値は $f(0)=2$

(ii) $0<a<1$ のとき $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-a=0$　$\frac{1}{a}=\sqrt{1+x^2}$　$1+x^2=\frac{1}{a^2}$　$x=\pm\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}$

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}$	$\cdots$
$f'(x)$	0	+	0	−
$f(x)$	2	↗	$a+\frac{1}{a}$	↘ $-\infty$

極大値 $f\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}\right)=2\sqrt{1+\left(\frac{1}{a^2}-1\right)}-a\left(\frac{1}{a^2}-1\right)=a+\frac{1}{a}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

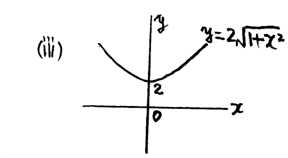


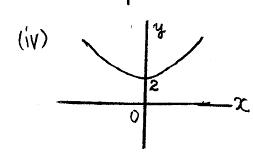
したがって $0<a<1$ のとき最大値は $f\left(\pm\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}\right)=a+\frac{1}{a}$

(2) (1)に続けて

(iii) $a=0$ のとき $f(x)=2\sqrt{1+x^2}$

(iv) $a<0$ のとき $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-a>0$ であるから, $x\geqq 0$ では $f'(x)>0$ であり $f(x)$は増加関数





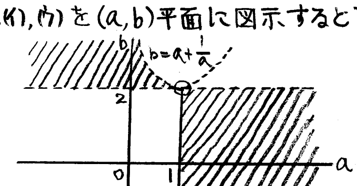
以上, グラフを考えて, $f(x)=b$ の異なる実数解の個数が最も多くなるときは

(ア) $a\geqq 1$ のときは $b<2$ のとき 2個が最大

(イ) $0<a<1$ のときは, $2<b<a+\frac{1}{a}$ のとき 4個が最大

(ウ) $0\geqq a$ のときは $b>2$ のとき 2個が最大

(ア),(イ),(ウ)を(a,b)平面に図示すると下の通り



$b=a+\frac{1}{a}$ は $b'=1-\frac{1}{a^2}=\frac{a^2-1}{a^2}$ であり,
$a>0$ では, $a=1$ の前後で b'は負から正へ符号を変えることになり,
$a=1$ で bは極小値 $b=2$ をとる.
$\lim_{a\to 0+0}\left(a+\frac{1}{a}\right)=+\infty$, $\lim_{a\to+\infty}\left(a+\frac{1}{a}\right)=+\infty$

破線部と○を除く斜線部
$a=0$ かつ $b>2$ は含む
$a=1$ かつ $b<2$ は含む

[補] 題意の"個数が最も多い"を(イ)だけを考えるのか,それとも,(ア),(ウ)のときも入れてしまうのか迷いましたが, 結局[解]のようにしました. このようなとき, 実際のテストでは'ことわり書き'ぐらいしておくと, 点数にひびくことはないでしょう.

1 空間座標内に3点 $O(0,0,0)$, $A(3,3,0)$, $B(0,6,0)$ をとり、さらに $1<a<3$ をみたす定数 a に対して、点 $P(t,ta,ta)$ をとる。ただし、t は $t>0$ の範囲を動くものとする。次の問いに答えよ。

(1) 点Pから xy 平面に垂線PHを下ろす。点Hの座標を求めよ。

(2) 点Hが線分AB上にあるときの t の値を求め、そのときの点Hの座標を a を用いて表せ。

以下点Hは線分AB上にあるとする。

(3) 点Mを線分ABの中点とする。AH：HMの比 $\frac{AH}{HM}$ を求めよ。

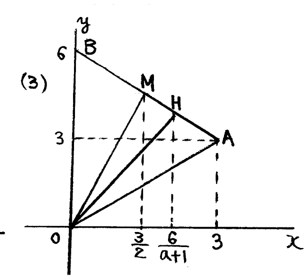
(4) 四面体OPMHの体積が2となるような a の値を求めよ。

[考] xy 平面上で考えることが主体で、難しい問題では、ありません。

[解] (1) xy 平面は $z=0$ だから $\underline{H(t,ta,0)}$

(2) xy 平面で考えて線分ABの方程式は $y=-x+6\ (0\leqq x\leqq 3)$, $H(t,ta)$ がこの直線上にあるので
$ta=-t+6$, $0\leqq t\leqq 3$, a は $1<a<3$ であるから $(a+1)t=6$ より $\underline{t=\frac{6}{a+1}}$ ($1<a<3$ より $\frac{3}{2}<\frac{6}{a+1}<3$ をみたす)
このとき $\underline{H\left(\frac{6}{a+1},\frac{6a}{a+1},0\right)}$

(3) 右図より、$\frac{AH}{HM}=\frac{3-\frac{6}{a+1}}{\frac{6}{a+1}-\frac{3}{2}}=\frac{6(a+1)-12}{12-3(a+1)}=\frac{2(a+1)-4}{4-(a+1)}=\underline{\frac{2(a-1)}{3-a}}$



(4) 四面体 $OPMH=V=\frac{1}{3}\cdot\triangle OMH\cdot PH=\frac{1}{3}\cdot\left(\triangle OAB\times\frac{\frac{6}{a+1}-\frac{3}{2}}{3}\right)\cdot\frac{6a}{a+1}$

$=\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{6}\cdot 3\cdot\left(\frac{2}{a+1}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{6a}{a+1}=3\cdot\frac{4-(a+1)}{2(a+1)}\cdot\frac{6a}{a+1}=\frac{9(3-a)a}{(a+1)^2}$

$V=2$ より $9(3-a)a=2(a+1)^2$　$27a-9a^2=2a^2+4a+2$　$11a^2-23a+2=0$

$(a-2)(11a-1)=0$　$1<a<3$ より $\underline{a=2}$

$HM:AB=\frac{6}{a+1}-\frac{3}{2}:3$

$=\frac{3-a}{2(a+1)}:1$

次頁3の(4)です。

次の2つの場合だから、求めるものは $\underbrace{990}_{(i)}+\underbrace{1350}_{(ii)}=2340$ (通り)

(i) 1回目で3人が残り、2回目で決まる場合　$6\times 165=\underline{990}$ (1回目 $x_1=x_2=x_3$ 6通り, 2回目165通り,)

(ii) 1回目1人去り(2人残り)、2回目で決まる場合

例えば1回目Aが去るのは (B,Cが残る)

A	1	2	3	4	5
B	2~6	3~6	4~6	5~6	6
C	2~6	3~6	4~6	5~6	6

$5+4+3+2+1=15$(通り) (BとCの出た目は同じ目)

今、B,Cが残っているが、2回目で、例えばBが勝者となるのは $5+4+3+2+1=15$(通り)
Cが勝者となるのも15通り

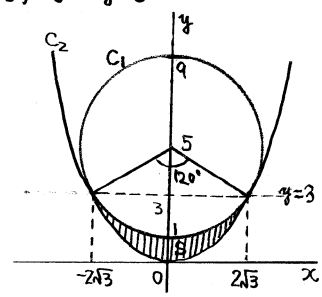
したがって1回目Aが去り、2回目B,C2人が勝負して勝者が決まるのは $15\times(15+15)=450$ (通り)

1回目Bが去り2回目決まる、1回目Cが去り2回目決まる、のも同じく450通りずつ　$\therefore 450\times 3=\underline{1350}$ (通り)

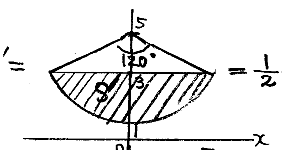
[2] 平面上の2つの曲線 C_1: $x^2+(y-5)^2=16$, C_2: $y=\frac{1}{4}x^2$ を考える。次の問いに答えよ。
(1) C_1 と C_2 の共有点の座標を求めよ。(2) C_1 と C_2 を同一平面上に図示せよ。(3) C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

[考] やさしい問題です。

[解] (1) C_2 より $x^2=4y\,(\geqq 0)$ を C_1 に代入 $4y+y^2-10y+25=16$ $y^2-6y+9=0$ $(y-3)^2=0$ $\therefore y=3$
$x^2=12$ $x=\pm2\sqrt{3}$ よって求める座標は, $\underline{(\pm2\sqrt{3},3)}$



(2) 右図 (3)を兼ねる

(3) $S'=$ 

$=\frac{1}{2}\cdot4^2\cdot\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot4^2\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{16\pi}{3}-8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{16\pi}{3}-4\sqrt{3}$

求める面積 $S=\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left(3-\frac{1}{4}x^2\right)dx-S'=\frac{\frac{1}{4}}{6}\left(2\sqrt{3}-(-2\sqrt{3})\right)^3-\left(\frac{16\pi}{3}-4\sqrt{3}\right)$

$S=\frac{(4\sqrt{3})^3}{24}-\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}=\frac{64\cdot3\sqrt{3}}{24}-\frac{16\pi}{3}+4\sqrt{3}=\underline{12\sqrt{3}-\frac{16\pi}{3}}$

[3] A,B,Cの3人がそれぞれ1個ずつのサイコロを同時になげ, 出た目を大きさの順に $x_1\leqq x_2\leqq x_3$ とする。$x_1=x_2=x_3$ のときは,もう一度3人でサイコロなげを行う。$x_1\leqq x_2<x_3$ のときは, x_3 を出した者が勝者となり,サイコロなげを終了する。$x_1<x_2=x_3$ のときは, x_1 を出した者は去り,残りの2人で,異なる目が出るまでサイコロなげを続け,大きい目を出した者が勝者となり,サイコロなげを終了する。次の問いに答えよ。
(1) 1回目のサイコロなげで, Aが3を出して勝者となる場合の数を求めよ。
(2) 1回目のサイコロなげでAが勝者となる場合の数を求めよ。
(3) 1回目のサイコロなげで,勝者が決まる場合の数を求めよ。
(4) 2回目のサイコロなげで勝者が決まる場合の数を求めよ。

[考] (3), (2)を求めると, B,Cが勝者になるのも同じことです。(4) 2つの場合にわけます。

[解] (1) B,Cともに1 or 2の目を出す場合だから $2\times2=\underline{4\text{(通り)}}$

(2)

A	2	3	4	5	6
B	1	1,2	1~3	1~4	1~5
C	1	1,2	1~3	1~4	1~5

$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=1+4+9+16+25=\underline{55\text{(通り)}}$

(3) B,Cが勝者となる場合の数もAと同じく,(2)よりそれぞれ55通りずつあるから,求めるものは $\underline{3\times55=165\text{(通り)}}$

(4) 前頁の下参照。

2017 金沢大学(理系)　　No. 1

Date

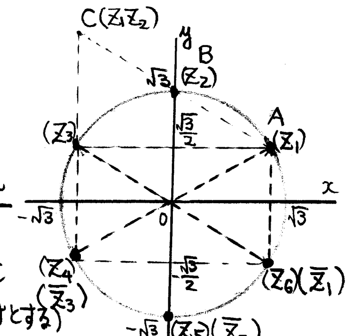
[1] (1) $z^6+27=0$ をみたす複素数 z をすべて求め、それらを表す点を複素数平面上に図示せよ.
(2) (1)で求めた複素数 z を偏角が小さい方から順に $z_1, z_2, \cdots$ とするとき z_1, z_2 と積 z_1z_2 を表す3点が複素数平面上で一直線にあることを示せ. 但し、偏角は0以上 2π 未満とする.

[解] (1) $z^6=-27=27\cdot(-1)=3^3\{\cos(\pi+2k\pi)+i\sin(\pi+2k\pi)\}$

$z=3^{\frac{3}{6}}\left\{\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)\right\}$ $(k=0,1,2,3,4,5,)$

$z_1=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\underline{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$, $z_2=\underline{\sqrt{3}i}$

$z_3=\underline{-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$, $z_4=\overline{z_3}=\underline{-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$, $z_5=\overline{z_2}=\underline{-\sqrt{3}i}$, $z_6=\overline{z_1}=\underline{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

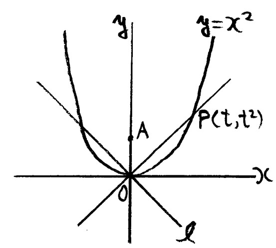


(2) 複素数平面上で、複素数 z_1, z_2, z_1z_2 を表す点をそれぞれA, B, C とすると. $\overrightarrow{AB}\equiv z_2-z_1=\sqrt{3}i-\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (のように表すとする)

$\overrightarrow{AC}\equiv z_1z_2-z_1=\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt{3}i-\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=-3+\sqrt{3}i$

$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$ であり、題意が示された.

[2] 座標平面上の放物線 $y=x^2$ 上に点 $P(t, t^2)$ $(t>0)$ をとる. $O(0,0)$ を通り、直線OPに垂直な直線を l とする. また $0<a\leqq 1$ として点 $A(0, a)$ をとる. このとき次の問いに答えよ.
(1) 直線PAと l は、交わることを示し、その交点 $Q(u, v)$ の座標を t と a を用いて表せ.
(2) t がすべての正の実数値をとって変化するとき、(1)で求めた点 $Q(u, v)$ の軌跡が $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$ を通るとする. このとき定数 a の値を求め、点 $Q(u, v)$ の軌跡を求めよ.



[解] (1) 直線OPの傾きは $\frac{t^2}{t}=t(>0)$ であるから、直線 l は $y=-\frac{1}{t}x$ ----①

直線PAは $y=\frac{t^2-a}{t}x+a$ ----②

①, ② を連立して解けば $-\frac{1}{t}x=\frac{t^2-a}{t}x+a$　$-x=(t^2-a)x+at$

$(t^2-a+1)x=-at$　条件より $t>0$, $0<a\leqq 1$ だから $t^2>0$, $1-a\geqq 0$

したがって $t^2-a+1>0$　$\therefore x=-\frac{at}{t^2-a+1}(<0)$, $y=\frac{a}{t^2-a+1}(>0)$

①, ② の交点 $Q(u, v)$ の存在が示されると同時に直線PAと l が交わることが示された.

$\underline{u=-\frac{at}{t^2-a+1}}$, $\underline{v=\frac{a}{t^2-a+1}}$　　$u<0, v>0$

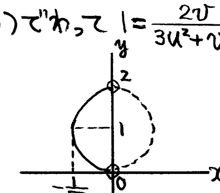
(2) $u=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $v=1$ となる $t(>0)$, $a(0<a\leqq 1)$ が存在するから $-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{at}{t^2-a+1}$, $1=\frac{a}{t^2-a+1}$

$-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\left(\frac{a}{t^2-a+1}\right)t=-1\cdot t$　$\therefore t=\frac{1}{\sqrt{3}}$　$a=t^2-a+1=\frac{1}{3}-a+1$　$2a=\frac{4}{3}$　$\therefore \underline{a=\frac{2}{3}}$

$u=-vt$　$v\neq 0$ $(v>0)$ だから $t=-\frac{u}{v}$　$v=\frac{\frac{2}{3}}{\left(-\frac{u}{v}\right)^2-\frac{2}{3}+1}=\frac{2v^2}{3u^2+v^2}$　$v(\neq 0)$ でわって $1=\frac{2v}{3u^2+v^2}$

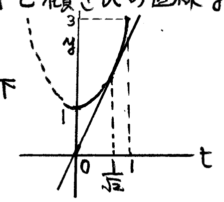
$3u^2+v^2=2v$　$3u^2+(v-1)^2=1$ $(u<0, v>0)$

したがって点Qの軌跡は、楕円 $3x^2+(y-1)^2=1$ の $x<0, y>0$ の部分(右図)

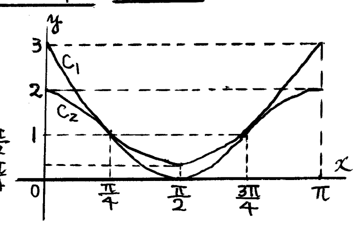


③ $0<a<3$ とし、$0\leqq x\leqq\pi$ の範囲で2つの関数 $f(x)=3-a\sin x$, $g(x)=2\cos^2 x$ を考える。
このとき次の問いに答えよ。(1) $f(x)\geqq g(x)$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ となる a の値の範囲を求めよ。
(2) 2つの曲線 $C_1: y=f(x)$ と $C_2: y=g(x)$ がちょうど2つの共有点をもつとき、共有点の x 座標 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ と a の値を求めよ。また、そのときの C_1 と C_2 の概形を同一座標平面上にかけ。
(3) (2)のとき C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

[解] (1) $3-a\sin x\geqq 2\cos^2 x=2(1-\sin^2 x)=2-2\sin^2 x \Leftrightarrow 2\sin^2 x+1\geqq a\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi,\ 0<a<3)$
$\sin x=t$ $(0\leqq t\leqq 1)$ とおき $2t^2+1\geqq at$ $(0\leqq t\leqq 1)$ となる a の範囲を $y=2t^2+1$ と傾き a の直線 $y=at$ のグラフで考えることにする。接するとき、$2t^2-at+1=0$ の判別式 $D=0$ より
$a^2-8=0$　$a=\pm2\sqrt{2}$　$0<a<3$ より $a=2\sqrt{2}$ (このとき $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$) 傾き a が $2\sqrt{2}$ 以下ならば、成立するので、求める a の値の範囲は、$\underline{0<a\leqq 2\sqrt{2}}$



(2) $f(x)=g(x)$ となるとき すなわち(1)より、$t=\frac{1}{\sqrt{2}}$　$x=\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$　$\therefore\ \underline{x_1=\frac{\pi}{4}, x_2=\frac{3\pi}{4}}$　$\underline{a=2\sqrt{2}}$
$f(x)=3-2\sqrt{2}\sin x$, $g(x)=2\cos^2 x=1+\cos 2x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$
$f(x)$ と $g(x)$ は、$x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\frac{3\pi}{4}$ で接する。



直線 $x=\frac{\pi}{2}$ に対称
$(\frac{\pi}{4},1),(\frac{3\pi}{4},1)$ で接する。

(3) $S=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(3-2\sqrt{2}\sin x-1-\cos 2x)\,dx=2\left[2x+2\sqrt{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$
$=2\{\pi-(\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2})\}=2(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2})=\underline{\pi-3}$

4 数列$\{a_n\}$を $a_1=3$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{7}{a_n}\right)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で定める。このとき次の問いに答えよ。

(1) $a_n>\sqrt{7}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ が成り立つことを示せ。

(2) 数列$\{b_n\}$を $b_n=\frac{a_n-\sqrt{7}}{a_n+\sqrt{7}}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で定めるとき $b_{n+1}=b_n^2$ $(n=1,2,3\cdots)$ が成り立つことを示せ。

(3) $\lim_{n\to\infty}a_n$ と $\lim_{n\to\infty}2^{-n}\log(a_n-\sqrt{7})$ を求めよ。

[解] (1) 帰納法で示す。(以下[I],[II]より示される。)

[I] $n=1$のとき $a_1=3>\sqrt{7}$ であるから成立。

[II] $n=k\,(k\geqq 1)$のとき $a_k>\sqrt{7}$ が成立すると仮定する。$a_k>0$, $\frac{7}{a_k}>0$ だから

相加相乗平均の関係より、$a_{k+1}=\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{7}{a_k}\right)\geqq\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a_k\cdot\frac{7}{a_k}}=\sqrt{7}$ であるが、等号成立は

$a_k=\frac{7}{a_k}$ $a_k^2=7$ $\therefore a_k=\sqrt{7}$ のときであるから、$a_k>\sqrt{7}$ より、等号をみたすa_kは存在しない。

よって、$a_{k+1}>\sqrt{7}$ である。すなわち $n=k+1$ でも成立することが示された。

(2) $b_{n+1}=\frac{a_{n+1}-\sqrt{7}}{a_{n+1}+\sqrt{7}}=\frac{\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{7}{a_n}\right)-\sqrt{7}}{\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{7}{a_n}\right)+\sqrt{7}}=\frac{a_n^2+7-2\sqrt{7}a_n}{a_n^2+7+2\sqrt{7}a_n}=\frac{(a_n-\sqrt{7})^2}{(a_n+\sqrt{7})^2}=b_n^2$ $(n=1,2,3,\cdots)$

(3) $b_n>0$ だから $\log b_{n+1}=\log b_n^2=2\log b_n=2^2\log b_{n-1}=2^3\log b_{n-2}=\cdots\cdots=2^n\log b_1=\log\left(\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}\right)^{2^n}$

$\therefore b_n=\left(\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}\right)^{2^{n-1}}\to 0\ (n\to\infty)$ $\left(\because 0<\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}<1\right)$, $\frac{a_n-\sqrt{7}}{a_n+\sqrt{7}}\to 0$ 分母$a_n+\sqrt{7}>2\sqrt{7}$ だから 分子$a_n-\sqrt{7}\to 0$

$\therefore \underline{\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{7}}$

$b_n=\frac{a_n-\sqrt{7}}{a_n+\sqrt{7}}=\left(\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}\right)^{2^{n-1}}$ $\log\frac{a_n-\sqrt{7}}{a_n+\sqrt{7}}=\log\left(\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}\right)^{2^{n-1}}=2^{n-1}\log\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}=2^{n-1}\log\frac{(3-\sqrt{7})^2}{9-7}=2^{n-1}\log(8-3\sqrt{7})$

$\log(a_n-\sqrt{7})-\log(a_n+\sqrt{7})=2^{n-1}\log(8-3\sqrt{7})$ $\log(a_n-\sqrt{7})=2^{n-1}\log(8-3\sqrt{7})+\log(a_n+\sqrt{7})$

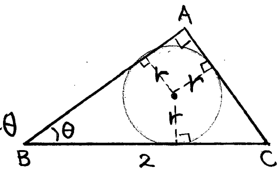
$2^{-n}\log(a_n-\sqrt{7})=2^{-n}\{2^{n-1}\log(8-3\sqrt{7})+\log(a_n+\sqrt{7})\}=\frac{\log(8-3\sqrt{7})}{2}+\frac{\log(a_n+\sqrt{7})}{2^n}\to\underline{\frac{\log(8-3\sqrt{7})}{2}}\ (n\to\infty)$

2017 金沢大学（文系）　　　　　　　　　　　　No. ①

Date

1. △ABCにおいて，∠Aは直角で，∠B<∠Cとし，BC=2とする．∠B=θとおくとき次の問いに答えよ．
 (1) 辺AB, ACの長さ，および△ABCの面積Sをθを用いて表せ
 (2) △ABCの内接円の半径rをθを用いて表せ．
 (3) 辺BCの垂直2等分線が，内接円Oと接するとき，θとrの値を求めよ．

［解］(1) $AB=\underline{2\cos\theta}$, $AC=\underline{2\sin\theta}$, $S=\frac{1}{2}AB\times AC=2\sin\theta\cos\theta=\underline{\sin 2\theta}$

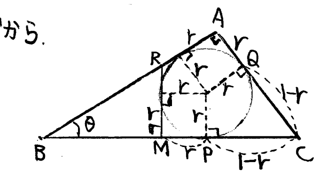


(2) (1)とから $S=\frac{1}{2}r(AB+BC+CA)=\sin 2\theta$　$r(2\cos\theta+2+2\sin\theta)=2\sin 2\theta$

$\underline{r=\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta+\cos\theta+1}}$　（$0<\theta<\frac{\pi}{4}$ だから $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$, 分母>0）

(3) 右図，辺BCの垂直2等分線をMR，接点をP, Q，とすると，MP=r, CM=1 だから，
$CP=1-r$, $CP=CQ=1-r$, $AQ=r$ より，$AC=CQ+AQ=(1-r)+r=1$
すなわち 直角3角形ABCは，∠A=90°, BC=2, AC=1, ($AB=\sqrt{3}$)
$\therefore\ \theta=30^\circ$　$r=\dfrac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ+\cos 30^\circ+1}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+2}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}=\underline{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}$



2. 次の問いに答えよ．(1) $k=1,2,3,4,5,6$ に対して ${}_7C_k$ は7の倍数であることを示せ．
 (2) p は素数とし，k は $1\leqq k\leqq p-1$ をみたす自然数とする．${}_pC_k$ は p の倍数であることを示せ．
 (3) すべての自然数 n に対して，n^7-n は7の倍数であることを数学的帰納法を用いて示せ．

［解］(1)は，(2)で，$p=7$ の場合であるから，(2)を示せば OK．
(2) ${}_pC_k=\dfrac{p!}{(p-k)!\,k!}$　$(p-k)!\,k!\,{}_pC_k=p!$，$1\leqq k\leqq p-1$，$1\leqq p-k\leqq p-1$，であり，pは素数であるから，
$(p-k)!$, $k!$ はいずれも，pと互いに素である．右辺 $p!$ は pの倍数であるから，左辺もpの倍数であり，
${}_pC_k$ は pの倍数でなければならない．

(3) ［I］$n=1$ のとき $n^7-n=1^7-1=0$ であり7の倍数
［II］$n=k$ のとき k^7-k が7の倍数であると仮定する．すなわち $k^7-k=7l$（lは整数）と仮定する．
$(k+1)^7-(k+1)=\sum_{i=0}^{7}{}_7C_i k^i-k-1=k^7-k+\sum_{i=1}^{6}{}_7C_i k^i=7l+\sum_{i=1}^{6}{}_7C_i k^i$　(1)より，${}_7C_i$ ($i=1,2,3,4,5,6$)
は7の倍数であるから，$7l+\sum_{i=1}^{6}{}_7C_i k^i$ は7の倍数であり，$(k+1)^7-(k+1)$ は7の倍数．
$n=k+1$ のときも7の倍数であることが示された．
以上，［I］，［II］より，数学的帰納法により，題意が示された．

［補］(3)は‘数学的帰納法を用いて’という指示がなければ，mod による［解］が Best でしょう．

3. $a>0$ とし、放物線 $C: y=a(x-1)^2+1$ を考える。C 上の点 P における C の接線 l の方程式を $y=Ax+B$ とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) P の x 座標を s とするとき A と B を a と s を用いて表せ。

(2) 接線 l は、原点 $O(0,0)$ を通り、傾きは正であるとする。このとき l の方程式を求めよ。

(3) (2)で求めた接線 l と放物線 C および y 軸で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4) $\frac{S(a)}{\sqrt[4]{a}}$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

[解] (1) $y=a(x-1)^2+1$　$y'=2a(x-1)$　したがって点 $P(s, a(s-1)^2+1)$ における接線 l の方程式は

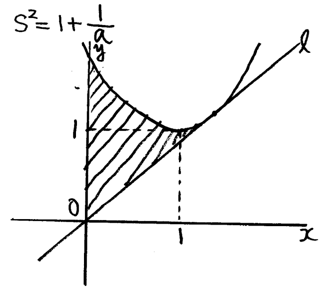
$y=2a(s-1)(x-s)+a(s-1)^2+1=2a(s-1)x-2as(s-1)+a(s-1)^2+1=2a(s-1)x-a(s^2-1)+1$

したがって $\underline{A=2a(s-1)}$、$\underline{B=-a(s^2-1)+1}$

(2) l は原点 $(0,0)$ を通るから、$B=0$、$\therefore a(s^2-1)=1$　$a>0$ より $s^2-1=\frac{1}{a}$　$s^2=1+\frac{1}{a}$

$A>0$ より $2a(s-1)>0$　$a>0$ だから $s>1>0$ $\therefore s=\sqrt{1+\frac{1}{a}}$

l の方程式は、$\underline{y=2a\left(\sqrt{1+\frac{1}{a}}-1\right)x}$



(3) $S(a)=\int_0^s\{a(x-1)^2+1-2a(s-1)x\}dx=\int_0^s a(x-s)^2dx$

$=a\left[\frac{(x-s)^3}{3}\right]_0^s=\frac{a}{3}s^3=\underline{\frac{a}{3}\left(\sqrt{1+\frac{1}{a}}\right)^3}$

(4) $\sqrt[4]{a}=t\,(>0)$ とおくと $\frac{S(a)}{\sqrt[4]{a}}=\frac{S(t^4)}{t}=\frac{t^4\left(\sqrt{1+\frac{1}{t^4}}\right)^3}{3t}=\frac{1}{3}\left(t\sqrt{1+\frac{1}{t^4}}\right)^3=\frac{1}{3}\left(\sqrt{t^2+\frac{1}{t^2}}\right)^3$　$t^2>0$ だから、

相加相乗平均の関係より、$t^2+\frac{1}{t^2}\geqq 2\sqrt{t^2\cdot\frac{1}{t^2}}=2$　等号成立は、$t^2=\frac{1}{t^2}$ $(t^2+1)(t^2-1)=0$　$t=1$ のとき

このとき $a=1$、求める最小値は、$\frac{1}{3}(\sqrt{2})^3=\underline{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$ $(\underline{a=1}$ のとき$)$

2018 金沢大学 理系

[1] 1個のサイコロを4回続けて投げて出た目の数を順に a, b, c, d とおき、2直線 l_1, l_2 を、
$l_1: y = ax + b$, $l_2: y = cx + d$ と定める。次の問いに答えよ。
(1) l_1 と l_2 が一致するpro.を求めよ。(pro.は確率)
(2) l_1 と l_2 が1点で交わるpro.を求めよ。
(3) l_1 と l_2 が1点で交わり、その交点の x 座標、y 座標がともに整数となるpro.を求めよ。

[解] (1) $a = c$ かつ $b = d$ であればよいから $\frac{6}{6^2} \times \frac{6}{6^2} = \frac{1}{36}$

(2) $a \neq c$ であればよいから、$a = c$ のときのpro. $\frac{6}{36}$ を1から引いて、求めるpro.は $1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$

(3) l_1 と l_2 が1点で交わるのは $a \neq c$ ときで、このとき $x = \frac{d-b}{a-c}$ a, b, c, d は整数だから、x が整数であれば、$y = ax + b$ (or $y = cx + d$) より、y も整数。
$|a-c| = 1, 2, 3, 4, 5$　$|d-b| = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

[I] (i) $|a-c| = 1$ かつ $|d-b| = 0$ のとき　$10 \times 6 = \underline{60通り}$
$(a, c) = (1,2)(2,3)(3,4)(4,5)(5,6)(2,1)(3,2)(4,3)(5,4)(6,5)$　10通り
$(d, b) = (1,1)(2,2)(3,3)(4,4)(5,5)(6,6)$　6通り
(ii) $|a-c| = 1$ かつ $|d-b| = 1$ のとき　$10 \times 10 = \underline{100通り}$
(iii) $|a-c| = 1$ かつ $|d-b| = 2$ のとき　$10 \times 8 = \underline{80通り}$
$(d, b) = (1,3)(2,4)(3,5)(4,6)(3,1)(4,2)(5,3)(6,4)$　8通り
(iv) $|a-c| = 1$ かつ $|d-b| = 3$ のとき　$10 \times 6 = \underline{60通り}$
$(d, b) = (1,4)(2,5)(3,6)(4,1)(5,2)(6,3)$　6通り
(v) $|a-c| = 1$ かつ $|d-b| = 4$ のとき　$10 \times 4 = \underline{40通り}$
$(d, b) = (1,5)(2,6)(5,1)(6,2)$　4通り
(vi) $|a-c| = 1$ かつ $|d-b| = 5$ のとき　$10 \times 2 = \underline{20通り}$
$(d, b) = (1,6)(6,1)$　2通り

[II] (i) $|a-c| = 2$ かつ $|d-b| = 0$ のとき　$8 \times 6 = \underline{48通り}$ ($|a-c| = 2$ は[I](iii)の $|b-d| = 2$ と同じ個数)
(ii) $|a-c| = 2$ かつ $|d-b| = 2$ のとき　$8 \times 8 = \underline{64通り}$
(iii) $|a-c| = 2$ かつ $|d-b| = 4$ のとき　$8 \times 4 = \underline{32通り}$

答	(1) $\frac{1}{36}$　(2) $\frac{5}{6}$　(3) $\frac{79}{162}$

[III] (i) $|a-c| = 3$ かつ $|d-b| = 0$ のとき　$6 \times 6 = \underline{36通り}$
(ii) $|a-c| = 3$ かつ $|d-b| = 3$ のとき　$6 \times 6 = \underline{36通り}$

[IV] (i) $|a-c| = 4$ かつ $|d-b| = 0$ のとき　$4 \times 6 = \underline{24通り}$
(ii) $|a-c| = 4$ かつ $|d-b| = 4$ のとき　$4 \times 4 = \underline{16通り}$

[V] (i) $|a-c| = 5$ かつ $|d-b| = 0$ のとき　$2 \times 6 = \underline{12通り}$
(ii) $|a-c| = 5$ かつ $|d-b| = 5$ のとき　$2 \times 2 = \underline{4通り}$

以上下線部全ての和は $360 + 144 + 72 + 40 + 16 = 632$　$\therefore \frac{632}{6 \times 6 \times 6 \times 6} = \frac{79}{162}$

② a, k を定数とし、曲線 $C_1: y=e^x$ および曲線 $C_2: y=k\sqrt{x-a}$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) 2つの曲線 C_1, C_2 が共有点をもつための a, k がみたすべき条件を求めよ。

以下 2つの曲線 C_1, C_2 が共有点 $P(t, e^t)$ において同一の直線 l に接しているとする。

(2) a と k を t を用いて表せ。

(3) 直線 l が原点を通るとする。このとき曲線 C_1，曲線 C_2，x軸，y軸で囲まれる図形を、y軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

[解] (1) $k\le 0$ ならば $C_2: y=k\sqrt{x-a}\le 0$，$C_1: y=e^x>0$ であるから、共有点をもつことはない。

よって $k>0$ が必要。$e^x=k\sqrt{x-a}$ が $x>a$ に実数解をもつ条件として捉える。($x=a$ ならば $e^x=k\sqrt{x-a}=0$ となり不合理 ∴ $x>a$) 両辺を $\sqrt{x-a}$ でわって $\frac{e^x}{\sqrt{x-a}}=k$

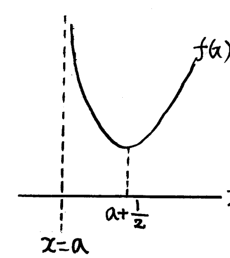
$f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{x-a}}$ $(x>a)$ とおく。$f'(x)=\frac{1}{x-a}\left\{e^x\sqrt{x-a}-\frac{e^x}{2\sqrt{x-a}}\right\}=\frac{1}{x-a}\times\frac{2e^x(x-a)-e^x}{2\sqrt{x-a}}$

$f'(x)=\frac{e^x(2x-2a-1)}{2(x-a)\sqrt{x-a}}$

x	a	…	$a+\frac12$	…
$f'(x)$	╳	$-$	0	$+$
$f(x)$	╳	$\infty\searrow$	極小	$\nearrow\infty$

$\lim_{x\to a+0} f(x)=+\infty$，$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

極小値 $f(a+\frac12)=\frac{e^{a+\frac12}}{\sqrt{a+\frac12-a}}=\sqrt2\, e^{a+\frac12}$



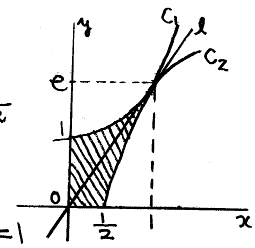
よって、求める条件は $k\ge\sqrt2\, e^{a+\frac12}$

(2) $C_1: y=e^x$ $y'=e^x$ $C_2: y=k\sqrt{x-a}$ $y'=\frac{k}{2\sqrt{x-a}}$

点 $P(t, e^t)$ において、同一の直線 l に接する条件は、$e^t=k\sqrt{t-a}$ …①

$e^t=\frac{k}{2\sqrt{t-a}}$ …② ①,②より $k\sqrt{t-a}=\frac{k}{2\sqrt{t-a}}$ $t-a=\frac12$ ∴ $a=t-\frac12$

①に $a=t-\frac12$ を代入 $e^t=k\sqrt{\frac12}$ ∴ $k=\sqrt2\, e^t$



(3) 直線 l は $y=e^t(x-t)+e^t$ 原点を通るから $0=-te^t+e^t=e^t(1-t)$ ∴ $t=1$

$C_1: y=e^x$ $x=\log y$ $C_2: y=\sqrt2\, e\sqrt{x-\frac12}$ $y^2=2e^2(x-\frac12)=2e^2x-e^2$ $x=\frac12\left(\frac{1}{e^2}y^2+1\right)$

求める体積 $V=\pi\underbrace{\int_0^e\left\{\frac12\left(\frac{1}{e^2}y^2+1\right)\right\}^2dy}_{※1}-\pi\underbrace{\int_1^e(\log y)^2dy}_{※2}$

※1 $=\frac14\int_0^e\left(\frac{1}{e^4}y^4+\frac{2}{e^2}y^2+1\right)dy=\frac14\left[\frac{1}{5e^4}y^5+\frac{2}{3e^2}y^3+y\right]_0^e=\frac14\left(\frac e5+\frac{2e}{3}+e\right)=\frac14\cdot\frac{28e}{15}=\frac{7e}{15}$

※2 $=\left[y(\log y)^2\right]_1^e-2\int_1^e\log y\,dy=e-2\left[y\log y-y\right]_1^e=e-2$

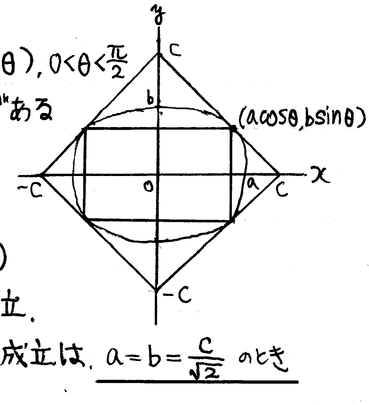
$f=(\log y)^2$ $g'=1$
$f'=2(\log y)\frac1y$ $g=y$

よって $V=\pi\cdot\frac{7e}{15}-\pi(e-2)=\pi\left(2-\frac{8e}{15}\right)$

答	
	(1) $k\ge\sqrt2\, e^{a+\frac12}$
	(2) $a=t-\frac12$，$k=\sqrt2\, e^t$
	(3) $\pi\left(2-\frac{8e}{15}\right)$

③ a, b, c を正の数とする. 楕円 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ が 4点 $(c,0)$ $(0,c)$ $(-c,0)$ $(0,-c)$ を頂点とする正方形の各辺に接しているとする. 4つの接点を頂点とする四角形の面積を S, 楕円 C で囲まれる図形の面積を T とする. このとき 不等式 $\frac{S}{T} \leqq \frac{2}{\pi}$ が成り立つことを証明せよ. また等号が成り立つのは, どのようなときか答えよ.

[解] 右図. 第I象限にある1つの接点をパラメータ θ を用いて $(a\cos\theta, b\sin\theta)$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とすると, 接線は $\frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1$ この接線上に $(c,0)$, $(0,c)$ があることから $\frac{\cos\theta}{a}c=1$, $\frac{\sin\theta}{b}c=1$ $\therefore a=c\cos\theta, b=c\sin\theta$ ---- ①



対称性から $S=4(a\cos\theta)(b\sin\theta)=2ab\sin2\theta$, $T=\pi ab$

よって $\frac{S}{T}=\frac{2ab\sin2\theta}{\pi ab}=\frac{2}{\pi}\sin2\theta \leqq \frac{2}{\pi}$ ($\because 0<2\theta<\pi$ より $0<\sin2\theta\leqq1$)

等号は, $\sin2\theta=1$ のとき成立, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $2\theta=\frac{\pi}{2}$ $\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき成立.

このとき ① から $a=c\cos\frac{\pi}{4}=\frac{c}{\sqrt2}$, $b=c\sin\frac{\pi}{4}=\frac{c}{\sqrt2}$ まとめると, 等号成立は, $a=b=\frac{c}{\sqrt2}$ のとき

④ 座標空間において, 原点 $(0,0,0)$ と点 $(1,1,-3)$ を通る直線を l, 2つの点 $(-6,6,0)$, $(1,2,1)$ を通る直線を m とする. 直線 l 上の点 P と直線 m 上の点 Q を, 直線 PQ が直線 l, m のいずれにも直交するようにとる. 次の問いに答えよ.

(1) $|\overrightarrow{PQ}|$ を求めよ.

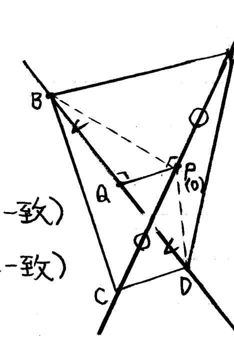
(2) A を直線 l 上の点, B を直線 m 上の点とする. ただし A ≠ P とする. このとき $\angle APB=\frac{\pi}{2}$ であることを示せ.

(3) 直線 l 上の2点 A, C をそれらの中点が P となるようにとる. 同様に, 直線 m 上の2点 B, D をそれらの中点が Q となるようにとる. $|\overrightarrow{PA}|=a$, $|\overrightarrow{QB}|=b$ のとき, 三角形 BDP の面積と四面体 ABCD の体積を求めよ.

[解] (1) l の方向vectorは $(1,1,-3)$ だから $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$

m の方向vectorは $(7,-4,1)$, 定点 $(1,2,1)$ として $\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}-s\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PQ}\perp$ 直線 l, $\overrightarrow{PQ}\perp$ 直線 m より,



$\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$ $(1+2-3)+(7-4-3)t-(1+1+9)s=0$ $\therefore s=0$ (点Pは原点Oと一致)

$\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$ $(7-8+1)+(49+16+1)t-(7-4-3)s=0$ $\therefore t=0$ (点Qは $(1,2,1)$ と一致)

$\therefore \overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ $|\overrightarrow{PQ}|=\left|\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt6$

(2) $\overrightarrow{OA}(=\overrightarrow{PA})=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}(=\overrightarrow{PB})=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}$ $\therefore \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}\right\}=(1+2-3)\alpha+(7-4-3)\alpha\beta=0$

したがって, $\angle APB=\frac{\pi}{2}$

(3) $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{BD}$ だから $\triangle BDP=\frac12|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{PQ}|=\frac12\cdot2|\overrightarrow{QB}|\cdot\sqrt6=\sqrt6\,b$

$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{PA}$ かつ $\overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{PA}$ より, $\triangle BDP\perp\overrightarrow{PA}$ (すなわち直線 l は $\triangle BDP$ に垂直)

四面体ABCD $=\frac13\times\triangle BDP\times|\overrightarrow{AC}|=\frac13\times\sqrt6\,b\times2a=\frac{2\sqrt6}{3}ab$

答	(1) $\sqrt6$
	(2) 左上
	(3) $\sqrt6\,b$, $\frac{2\sqrt6}{3}ab$

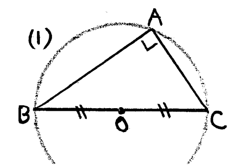
1. $\triangle ABC$の外心をO，重心をGとし，$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$とする．次の問いに答えよ．

(1) $\angle A=\frac{\pi}{2}$ならば，$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$が成り立つことを証明せよ．

(2) $\angle A\neq\frac{\pi}{2}$ならば$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$であることを証明せよ．

(3) $\overrightarrow{OA}=(\cos\theta,\sin\theta)$，$\overrightarrow{OB}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{OC}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$とする．ただし，$0\leqq\theta<2\pi$である．このとき$|\overrightarrow{GH}|^2$の最大値，最小値を求めよ．

[解] (1) $\angle A=\frac{\pi}{2}$だから辺BCの中点が外心Oである．$\therefore\ \overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$　$\therefore\ \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$



(2) (1)より$\angle A=\frac{\pi}{2}$ならば，$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}$であり，点Hは点Aに一致する．

$\angle A\neq\frac{\pi}{2}$から$\overrightarrow{AH}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{BC}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2=0$

($\because$ 点Oは外心だから $(|\overrightarrow{OA}|=)|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$)　$\therefore\ \overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$

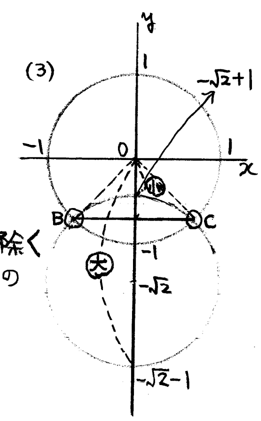
(3) $\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\left(\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}\right)=\frac{2}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$　$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$とおけば，

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta-\sqrt{2}\end{pmatrix}$　$\therefore\ x^2+(y+\sqrt{2})^2=1$ すなわち点Pは点$(0,-\sqrt{2})$を中心とする半径1の円周上を動く。ただし，$A\neq B$，$A\neq C$ので，点B，点Cを除く

$|\overrightarrow{GH}|=\frac{2}{3}|\overrightarrow{OP}|$だから$|\overrightarrow{GH}|$の最大値，最小値は，$|\overrightarrow{OP}|$がそれぞれ最大，最小のときであり，最大値$|\overrightarrow{GH}|=\frac{2}{3}|-\sqrt{2}-1|=\frac{2}{3}(\sqrt{2}+1)$　$\therefore\ |\overrightarrow{GH}|^2=\frac{4}{9}(3+2\sqrt{2})$ 答

最小値$|\overrightarrow{GH}|=\frac{2}{3}|-\sqrt{2}+1|=\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$　$\therefore\ |\overrightarrow{GH}|^2=\frac{4}{9}(3-2\sqrt{2})$ 答



[補] (3)は，素直に計算でもできます．

点Hは垂心です．外心O，重心G，垂心H，は，同一線上にあり，$|\overrightarrow{OG}|:|\overrightarrow{GH}|=1:2$（平面幾何で証明して下さい。）$\overrightarrow{GH}=2\overrightarrow{OG}$だから，$\overrightarrow{GH}=2\times\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta-\sqrt{2}\end{pmatrix}$

2. a, b を1と異なる正の数とする. 次の問いに答えよ.

(1) $\log_2\sqrt{a} - \log_a 2 = \frac{1}{2}$ をみたす a を求めよ.

(2) $\log_2\sqrt{a} - \log_a 2 \geqq \frac{1}{2}$ をみたす a の範囲を求めよ.

(3) $a>1$ かつ $b>1$ とする. $\log_b\sqrt{a} - \log_a b \geqq \frac{1}{2}$ をみたすとき a と b^2 の大小関係を調べよ.

(4) $a+b \leqq 8$ かつ $\log_b\sqrt{a} - \log_a b \geqq \frac{1}{2}$ をみたす自然数の組 (a, b) をすべて求めよ.

[解] (1) $\frac{1}{2}\log_2 a - \frac{1}{\log_2 a} = \frac{1}{2}$ $(\log_2 a)^2 - 2 = \log_2 a$ $(\log_2 a - 2)(\log_2 a + 1) = 0$ $\log_2 a = 2$ or $\log_2 a = -1$

$\therefore a = 4$ or $\frac{1}{2}$ これは底の条件, 真数条件でもある. 与えられた条件「a, b は1と異なる正の数」をみたす.

(2) $\frac{1}{2}\log_2 a - \frac{1}{\log_2 a} - \frac{1}{2} \geqq 0$ $\frac{(\log_2 a)^2 - 2 - \log_2 a}{2\log_2 a} \geqq 0$ $\frac{(\log_2 a - 2)(\log_2 a + 1)}{\log_2 a} \geqq 0$

$-1 \leqq \log_2 a < 0$, $2 \leqq \log_2 a$ $\therefore \frac{1}{2} \leqq a < 1$, $4 \leqq a$

(3) $\frac{1}{2}\log_b a - \frac{1}{\log_b a} \geqq \frac{1}{2}$ $\frac{(\log_b a)^2 - 2 - \log_b a}{\log_b a} \geqq 0$ $\frac{(\log_b a - 2)(\log_b a + 1)}{\log_b a} \geqq 0$

条件 $a>1, b>1$ より $\log_b a > 0$, $\log_b a + 1 > 0$, $\therefore \log_b a - 2 \geqq 0$ $\log_b a \geqq 2$ $\therefore a \geqq b^2$

(4) (3)とから $a>1, b>1, a+b \leqq 8, a \geqq b^2 (>1)$ をみたす (a, b) の組は, b から $2, 3, \cdots$ と入れて

$(a, b) = (4, 2)(5, 2)(6, 2)$

答	
	(1) $a = 4, \frac{1}{2}$
	(2) $\frac{1}{2} \leqq a < 1, 4 \leqq a$
	(3) $a \geqq b^2$
	(4) $(a, b) = (4, 2)$ $(5, 2)(6, 2)$

3. 関数 $f(x)$ は, 等式 $f(x) = |x-1| + \int_0^2 x f(t)\,dt$ をみたすとし, $\int_0^2 f(t)\,dt = a$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $f(2)$ を a を用いて表せ (2) a の値を求めよ.

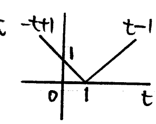
(3) k は定数とする. $y = xf(x) - k$ のグラフと $y = ax^2$ の共有点の個数を求めよ.

[解] (1) $f(2) = 1 + 2a$

(2) $f(x) = |x-1| + ax$ だから $a = \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^2 (|t-1| + at)\,dt = a\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^2 + \int_0^2 |t-1|\,dt$

$a = 2a + \int_0^1 (-t+1)\,dt + \int_1^2 (t-1)\,dt = 2a + \left[-\frac{1}{2}t^2 + t\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}t^2 - t\right]_1^2$

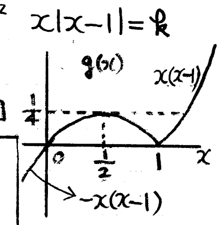
$a = 2a + \frac{1}{2} + \left\{\frac{1}{2}(4-1) - (2-1)\right\} = 2a + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1 = 2a - 1$ $\therefore a = 1$



(3) $xf(x) - k = ax^2$ として, x の実数解の個数として捉える. $x(|x-1| + x) - k = x^2$ $x|x-1| = k$

$g(x) = x|x-1|$ のグラフは, 右の通り

$k<0$ のとき1個, $k=0$ のとき2個, $1<k<\frac{1}{4}$ のとき3個, $k=\frac{1}{4}$ のとき2個, $k>\frac{1}{4}$ のとき1個



答	
	(1) $2a+1$
	(2) 1
	(3) $k<0$, $\frac{1}{4}<k$ のとき1個, $k=0, \frac{1}{4}$ のとき2個, $1<k<\frac{1}{4}$ のとき3個