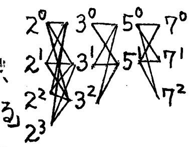
約数の個数と四捨五入
ことわりがない限り、負の約数も含めることにする。(一般に、約数とあれば、負の約数も含まれます。)

44. (1) 2028を素因数分解せよ。(2) 2028の約数の個数を求めよ。(3) 2028の正の約数の総和を求めよ。
(4) 小数第2位を四捨五入して、45.0となる数xの範囲を不等号で表せ。(但し、$x=45$も含む)
(5) 自然数Nの正の平方根の小数第2位を四捨五入したところ、45.0となった。自然数Nの個数を求めよ。但し、平方根そのものが、整数になるものは除く。

[考] (1) $4=2^2$, $9=3^2$, $49=7^2$, $121=11^2$, $169=13^2$, $289=17^2$, $361=19^2$, ---などでわる。自然数nの素因数分解は$\sqrt{n}$まで調べる。

(2),(3) 例 $17640=2^3\times3^2\times5^1\times7^2=N$, $a^0=1$ (どのような数も0乗したら1になる。)



正の約数の個数は、「$2^0, 2^1, 2^2, 2^3$の4コから1コを選び、$3^0, 3^1, 3^2$の3コから1コを選び、$5^0, 5^1$の2コから1コを選び、$7^0, 7^1, 7^2$の3コから1コを選んで、かけたものが正の約数である」から、$4\times3\times2\times3=72$個ある。負の約数も加えると、約数の個数は、$72\times2=$144個

正の約数の総和は、$(2^0+2^1+2^2+2^3)(3^0+3^1+3^2)(5^0+5^1)(7^0+7^1+7^2)=15\times13\times6\times57=$66690

(4) 例「正の数xの小数第2位を四捨五入したらyとなった。xとyの関係を不等式で表せ。」
$x=1.345$のとき$y=1.3$です。yを10倍すると$10y=13$であり、必ず整数です。1.25以上1.35より小さい数の小数第2位を四捨五入すると$y=1.3$です。したがってxは、1.25 $(=1.3-0.05)$以上1.35 $(=1.3+0.05)$より小さい数でなければなりません。すなわち $y-0.05\leqq x<y+0.05$ ということになりますが、ここで大切なことは、$10y$は整数となるということです。このことを用いる問題も、次頁で設問にします。

(5) $45.0-0.05\leqq\sqrt{N}<45.0+0.05$ です。

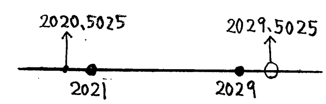
[解] (1) $2028=$ $2^2\times3\times13^2$　　(2) $(2+1)(1+1)(2+1)\times2=3\times2\times3\times2=$ 36個

(3) $(2^0+2^1+2^2)(3^0+3^1)(13^0+13^1+13^2)=7\times4\times183=$ 5124

(4) $45.0-0.05\leqq x<45.0+0.05$　　$44.95\leqq x<45.05$

(5) $44.95\leqq\sqrt{N}<45.05$　　$44.95^2\leqq N<45.05^2$　　$2020.5025\leqq N<2029.5025$

Nは2021以上2029以下の整数であるが、$\sqrt{2025}=45$は除くので 8個



[類1] 本題の続きとして、(6) 2028の正の約数のうち、奇数である約数の個数を求めよ。
(7) 2028の正の約数のうち、偶数である約数の総和を求めよ。

(解) (6) 2^1, 2^2を因数に持たない約数の個数だから

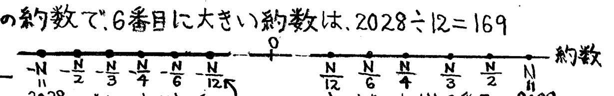
$2\times3=$ 6個

(7) 奇数の約数の総和は、$(3^0+3^1)(13^0+13^1+13^2)=4\times183=732$　求める偶数の約数の総和$=5124-732=$ 4392

(補) (7) $(2^1+2^2)(3^0+3^1)(13^0+13^1+13^2)=6\times4\times183=$ 4392 のようにもできます

[類2] (8) 2028の約数のうち、小さい方から6番目の約数を求めよ

(解) 正の約数は、小さい順に1, 2, 3, 4, 6, 12, したがって正の約数で、6番目に大きい約数は、$2028\div12=169$
したがって、求める約数は、負の約数を考えて、-169



四捨五入

[類3] 正の数xを7でわった数の小数第2位を四捨五入した数yに3をたした数が$3x$に等しい

(1) xとyについての関係を不等式で表せ.(等式は(2)で利用する.)

(2) $10y$が整数nに等しいことを利用し,(1)の不等式をnの不等式で表せ

(3) (2)の不等式を解いて,整数nの値を全て求め,xの値とyの値を求めよ.

(考) (1) 前頁の[考]をしっかり理解してますか.(補)が(考)ですが,(解)を見ないで,(補)を参考に(解)にtry!

(解) (1) $y-0.05 \leqq \frac{x}{7} < y+0.05$ ---① (但し,四捨五入した数$y=0.0$のとき$0<\frac{x}{7}<0.05$ではある.)

(2) $10y=n$(整数) ---② $y+3=3x$ ---③

②より $y=\frac{n}{10}$ ---②′ ②′を③に代入 $\frac{n}{10}+3=3x$ $\therefore x=\frac{n}{30}+1$ ---③′

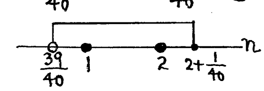
②′,③′を①に代入 $\frac{n}{10}-\frac{1}{20} \leqq \frac{1}{7}\left(\frac{n}{30}+1\right) < \frac{n}{10}+\frac{1}{20}$ ---④

答	
	(1) ① (2) ④
	(3) $n=1$ のとき $(x,y)=\left(\frac{31}{30},\frac{1}{10}\right)$ $n=2$ のとき $(x,y)=\left(\frac{16}{15},\frac{1}{5}\right)$

(3) ④×20 $2n-1 \leqq \frac{20}{7}\left(\frac{n}{30}+1\right) < 2n+1$ 7倍して $14n-7 \leqq 20\left(\frac{n}{30}+1\right) < 14n+7$

$14n-7 \leqq \frac{2}{3}n+20 < 14n+7$ 3倍して $42n-21 \leqq 2n+60 < 42n+21$

前の不等式より $40n \leqq 81$ $\therefore n \leqq \frac{81}{40}=2+\frac{1}{40}$, 後の不等式より $39<40n$ $\therefore \frac{39}{40}<n$ $\therefore \frac{39}{40}<n \leqq 2+\frac{1}{40}$ ---㋐



㋐をみたす整数nは $n=1$ or $n=2$

(i) $n=1$のとき ③′に入れて $x=\frac{1}{30}+1=\frac{31}{30}$, ②′に入れて $y=\frac{1}{10}(=0.1)$

(ii) $n=2$のとき ③′に入れて $x=\frac{2}{30}+1=\frac{16}{15}$, ②′に入れて $y=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}(=0.2)$

(補) $x=\frac{31}{30}$, $x=\frac{16}{15}$のとき,本当に題意にあっているか,実際に計算して確かめて下さい.

- x, y, n 3文字の等式,不等式のまじった連立不等式です.制限があるのは,整数nですから,2つの等式から,y, xをnの式で表し,不等式に入れ,整数nだけの不等式にします.この不等式から,まず整数nの値を求め,y, xを求めます.
$\frac{x}{7}=x'$とおいて,(x', y)の階段状のグラフをかけば,おもしろいでしょう.P.34の(5)に大学入試問題あります.

[類4] xは整数でない正の数とする.$\frac{3x+1}{2}$の小数第1位を四捨五入した数が$2x-1$に等しいとき,xの値を求めよ.

(解) $\frac{3x+1}{2}$の小数第1位を四捨五入した数を整数nとする. $n-\frac{1}{2} \leqq \frac{3x+1}{2} < n+\frac{1}{2}$ ---① $n=2x-1$ ---② である.

②より $x=\frac{n+1}{2}$ ---②′ ②′を①に代入 $n-\frac{1}{2} \leqq \frac{3\left(\frac{n+1}{2}\right)+1}{2} < n+\frac{1}{2}$

2倍して $2n-1 \leqq \frac{3}{2}(n+1)+1 < 2n+1$ 更に2倍して,$4n-2 \leqq 3(n+1)+2 < 4n+2$

左の不等式より,$4n-3n \leqq 3+2+2$ $\therefore n \leqq 7$ 右の不等式より,$3+2-2 < 4n-3n$ $\therefore 3<n$ $3<n \leqq 7$ ---㋐

㋐をみたす整数nは,$n=4,5,6,7$

(i) $n=4$のとき ②′に入れて $x=\frac{5}{2}$ (ii) $n=5$のとき ②′に入れて,$x=3$ (iii) $n=6$のとき ②′に入れて $x=\frac{7}{2}$

(iv) $n=7$のとき ②′に入れて $x=4$

求める解は,整数でない正の数だから $x=\frac{5}{2}$ or $x=\frac{7}{2}$

[類5] 正の約数を18個もつ最小の自然数Nを求めよ. 答 $\boxed{N=180}$

(解) 18個 $=2\times3^2$ 個

(i) 18×1 個のパターン $a^{17}\times b^0$ a,bは素数 最小は 2^{17}

(ii) 9×2 個のパターン $a^8\times b^1$ a,bは素数 最小は $2^8\times3^1$

(iii) 6×3 個のパターン $a^5\times b^2$ a,bは素数 最小は $2^5\times3^2$

(iv) $3\times3\times2$ 個のパターン $a^2\times b^2\times c^1$ a,b,cは素数

(ア) $2^2\times3^2\times5^1=4\times9\times5=180$ (イ) $2^2\times5^2\times3=4\times25\times3=300$ (ウ) $3^2\times5^2\times2=9\times25\times2=450$

よって求める $N=\underline{180}$ ((イ),(ウ)が(ア)より大きいことは,明らかですが---)

[類6] 9個の正の約数をもつ300以下の自然数Nを小さい順に全て求めよ. 答 $\boxed{N=36,100,196,225,256,}$

(解) 9個 $=3^2$ 個

(i) 9×1 個のパターン $a^8\times b^0$ a,bは素数 最小は $2^8=16^2=256<300$, $3^8=(3^4)^2=81^2>300$

(ii) 3×3 個のパターン $a^2\times b^2$ a,bは素数 小さい順に調べる.

(ア) $2^2\times3^2=4\times9=36<300$ (イ) $2^2\times5^2=4\times25=100<300$ (ウ) $2^2\times7^2=4\times49=196<300$

(エ) $2^2\times11^2=4\times121=484>300$ (オ) $3^2\times5^2=9\times25=225<300$ (カ) $3^2\times7^2=9\times49=441>300$

したがって求める $N=\underline{36,100,196,225,256}$

(小さい順 $2^2\times3^2$, $2^2\times5^2$, $2^2\times7^2$, $2^2\times11^2$,------
小さい順 $3^2\times5^2$, $3^2\times7^2$, $3^2\times11^2$,-----
小さい順 $5^2\times7^2$, $5^2\times11^2$,-----)

[類7] 63の倍数で正の約数が15個である自然数を全て求めよ. 答 $\boxed{3969,21609,}$

(解) 15個 $=3\times5$ 個 $63=3^2\times7^1$ であるから $3^2\times7^4=63\times7^3=63\times343=\underline{21609}$ or $3^4\times7^2=63\times3^2\times7=\underline{3969}$

[類8] $\dfrac{260}{2n-1}$ が自然数となるような自然数nを全て求めよ. 答 $\boxed{n=1,3,7,33,}$

(解) $260=2^2\times5\times13$, $2n-1$ は奇数であるから、$2n-1=1,5,13,5\times13$, の4つの場合である.

よって $\underline{n=1,3,7,33,}$

[類9] x,yが整数のとき $5x+y-xy-12=0$ をみたす,(x,y)の組を全て求めよ 答 $\boxed{(x,y)=(8,4)(2,-2)(0,12)(-6,6)}$

(考) x or y について,解く

(解) $5x-12=xy-y=(x-1)y$ $x=1$ のとき $-7=0\cdot y$ となり不合理 ∴ $x\neq1$ ∴ $y=\dfrac{5x-12}{x-1}=\dfrac{5(x-1)-7}{x-1}=5-\dfrac{7}{x-1}$

x,y,5は整数だから、分母 $x-1$ は、分子7の約数である. ∴ $x-1=7,1,-1,-7$ ∴ $x=8,2,0,-6$ の順に

$y=4,-2,12,6$ $\underline{(x,y)=(8,4)(2,-2)(0,12)(-6,6)}$

(別解) P.7の(6)下 [類10]がP.4の(3)下にあります.

定義域と値域（1次関数と2次関数の値域が一致するなど----）

1 (1) 定義域 $-2\leqq x\leqq a\ (a>-2)$ のとき1次関数 $y=px+q\ (p\neq 0)$ の値域を求めよ

(2) 定義域 $-2\leqq x\leqq a\ (a>-2)$ のとき2次関数 $y=x^2$ の値域を a で場合わけして求めよ

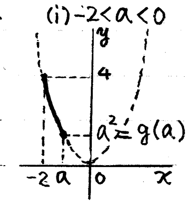
(3) 定義域 $-2\leqq x\leqq a\ (a>-2)$ のとき1次関数 $y=2x+4$ と2次関数 $y=x^2$ の値域が一致するような a の値を求めよ

(4) 定義域 $-2\leqq x\leqq a\ (a>-2)$ のとき、2次関数 $y=x^2$ の値域は $0\leqq y\leqq b$ であり、1次関数 $y=2x+3$ の値域は、$-1\leqq y\leqq c$ である. $b=c$ となる a の値を求めよ.

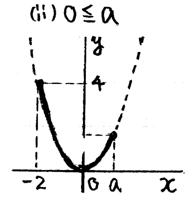
[考] x に定義域があるとき、x で表わされた関数 y の値域とは、定義域内の y の最小値を下限として、y の最大値を上限としたものです. すなわち、値域は、y の最小値 $\leqq y\leqq$ y の最大値 です.
y が x の関数のとき $y=f(x)$, $y=g(x)$ --- などとかきます. 例えば、$y=f(x)=px+q\ (p\neq 0)$ ならば、$x=-2$ のときの y の値は、$y=f(-2)=p\times(-2)+q=-2p+q$, $y=g(x)=x^2$ ならば、$x=-2$ のとき $y=g(-2)=(-2)^2=4$, $x=a$ ならば $y=g(a)=a^2$, $x=a+1$ ならば $y=g(a+1)=(a+1)^2$, x に $x-1$ を入れて、$y=g(x)=x^2$ と異なる関数 $y=u(x)=g(x-1)=(x-1)^2$ などとかきます.（この場合、$y=u(x)=(x-1)^2$ は $y=g(x)=x^2$ を x 軸方向に $+1$ 平行移動したグラフ）

(1) $p>0$ と $p<0$ で場合わけ. (2) $y=g(x)=x^2$ は、y 軸対称なグラフです. $x=a$ の位置によって最小値, 最大値が違ってきます. 最小値だけを見ると、$-2\leqq x<0$ のとき y は、減少です.（x が大きくなるにつれて y は小さくなるということ）したがって (i) $-2<a<0$ のとき、最小値 m は、$m=g(a)=a^2$ で表すことができます. m は a の関数となりました. $a=-\frac{1}{2}$ のときは、定義域は、$-2\leqq x\leqq -\frac{1}{2}$ となり、最小値は $g(-\frac{1}{2})=(-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{3}$ のときは、定義域は、$-2\leqq x\leqq -\frac{2}{3}$ となり、最小値は、$g(-\frac{2}{3})=(-\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$ という具合です. すなわち、$-2<a<0$ のときは、定義域 $-2\leqq x\leqq a$ での $y=g(x)=x^2$ の最小値 m は、常に、$m=g(a)=a^2$ で表すことができるということです. (ii) $0\leqq a$ のときは、y の最小値は、常に 0 であり、最小値 $m=g(0)=0$ です. 最小値 m のグラフを、たて軸 m, よこ軸 a でかけば、右、最下段のグラフとなります.

(i) $-2<a<0$

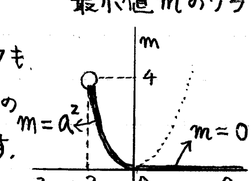


(ii) $0\leqq a$

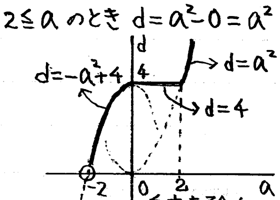


$-2\leqq x\leqq a$ のときの最大値 M は、$y=g(x)=x^2$ のグラフ（y 軸対称）から、(i) $-2<a\leqq 2$ のときは、常に、$M=4$ となります. (ii) $2<a$ となると $M=g(a)=a^2$ です. (i),(ii) の場合わけの等号については、条件の $a>-2$ のとき以外は、全てにつけてOKです. (i) $-2<a\leqq 2$ (ii) $2\leqq a$ です. 最小値も同じです. よこ軸 a の m のグラフも、M のグラフも必ず連続となるからです. すると、値域については、a の値が、$-2, 0, 2$ の3つの値で場合わけして、求めることになります. 最大値 M のグラフも、最小値 m のグラフと同一平面に描くとよくわかります. try! それでは、値域の幅 $d=$ 最大値 $-$ 最小値は、どのような a の関数となるでしょうか. 次のようです.
(i) $-2<a\leqq 0$ のとき $d=4-a^2$, (ii) $0\leqq a\leqq 2$ のとき $d=4$, (iii) $2\leqq a$ のとき $d=a^2-0=a^2$
このグラフは、右のようになります.

最小値 m のグラフ



白丸を除く

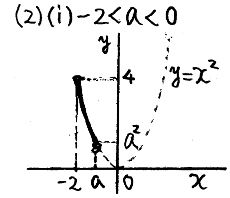


[考] (3) 1次関数 $y=2x+4$ の値域は、最小値 $2\times(-2)+4=0$，最大値 $2a+4$ から $0\leqq y\leqq 2a+4$ ---① です.
2次関数 $y=x^2$ の値域は、(2)の[考]でのべたように、(i) $-2<a<0$ のときは、$(0<)\,a^2\leqq y\leqq 4$ ---② です
したがって (i) $-2<a<0$ のとき ①,② が一致することはありません. (ii) $0\leqq a\leqq 2$ のとき、$y=x^2$ の最小値は0，最大値は4，(iii) $2<a$ のとき $y=x^2$ の最小値は0，最大値は a^2

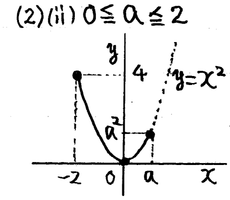
(4) $b=c$ だから「定義域 $-2\leqq x\leqq a$ のとき $y=x^2$ の最小値は0，最大値 b，$y=2x+3$ の最小値 -1，最大値 b」(3)との違いは、値域が同じではなく、最大値だけが同じということです.

[解] (1) $y=f(x)=px+q\ (p\neq 0)$ とおく. (i) $p<0$ のとき、右肩下がり(減少)の直線だから、値域は、
$f(a)\leqq y\leqq f(-2)$ ∴ $ap+q\leqq y\leqq -2p+q$ (ii) $p>0$ のとき、右肩上がり(増加)の直線だから、
値域は $f(-2)\leqq y\leqq f(a)$ ∴ $-2p+q\leqq y\leqq ap+q$

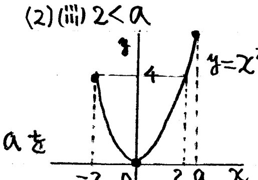
(2)(i) $-2<a<0$



(2)(ii) $0\leqq a\leqq 2$



(2)(iii) $2<a$



(2) $y=f(x)=x^2$ とおく. (i) $-2<a<0$ のとき $f(a)\leqq y\leqq f(-2)$ ∴ $a^2\leqq y\leqq 4$
(ii) $0\leqq a\leqq 2$ のとき $f(0)\leqq y\leqq f(-2)$ ∴ $0\leqq y\leqq 4$
(iii) $2<a$ のとき $f(0)\leqq y\leqq f(a)$ ∴ $0\leqq y\leqq a^2$

(3) $y=f(x)=2x+4$，$y=g(x)=x^2$ とおく.
(i) $-2<a<0$ のとき $f(-2)\leqq y\leqq f(a)$，$g(a)\leqq y\leqq g(-2)$ これが一致するから、
$f(-2)=g(a)$. $0=a^2$. $a=0$ これは、(i) $-2<a<0$ に不適※
(ii) $0\leqq a\leqq 2$ のとき $f(-2)\leqq y\leqq f(a)$，$g(0)\leqq y\leqq g(-2)$ これが一致するから
$f(-2)=g(0)=0$，$f(a)=g(-2)\Leftrightarrow 2a+4=4$ ∴ $a=0$ 適する
(iii) $2<a$ のとき $f(-2)\leqq y\leqq f(a)$，$g(0)\leqq y\leqq g(a)$ これが一致するから、
$f(-2)=g(0)=0$，$f(a)=g(a)\Leftrightarrow 2a+4=a^2$，$a^2-2a-4=0$，$a=1\pm\sqrt{5}$
$a=1-\sqrt{5}<0$ は $2<a$ のときに不適 $a=1+\sqrt{5}>2$ は適する. ∴ $a=1+\sqrt{5}$
※ (i) $-2<a\leqq 0$ とすれば、適することになります. (ii) $0\leqq a\leqq 2$ のときに等号 $0=a$ をつけたので、(ii)の方で $a=0$ は適します.

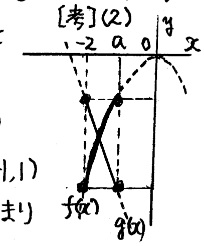
(4) $y=f(x)=2x+3\ (-2\leqq x\leqq a)$ の最小値は $f(-2)=-1$，最大値は $f(a)=2a+3=c=b$ ----①
$y=g(x)=x^2\ (-2\leqq x\leqq a)$ の最小値が $0=g(0)$ なので、$a\geqq 0$ でなければならない
(i) $0\leqq a\leqq 2$ のとき、最大値 $g(-2)=4$ これが①に等しいとき $2a+3=b=4$，$a=\frac{1}{2}$ 適する.
(ii) $2<a$ のとき 最大値 $g(a)=a^2$ これが①に等しいとき $2a+3=b=a^2$，$a^2-2a-3=0$，
$(a-3)(a+1)=0$，$a=3$ or $a=-1$ であるが (ii) $2<a$ より $a=3$，$b=9$

答	(1) $p<0$ のとき $ap+q\leqq y\leqq -2p+q$，$p>0$ のとき $-2p+q\leqq y\leqq ap+q$ (2) (i) $-2<a<0$ のとき $a^2\leqq y\leqq 4$，(ii) $0\leqq a\leqq 2$ のとき $0\leqq y\leqq 4$ (iii) $2<a$ のとき $0\leqq y\leqq a^2$ (3) $a=0$，$1+\sqrt{5}$　　(4) $a=\frac{1}{2}$，3

2 (1) 定義域が、どちらも同じ、$-2 \leqq x \leqq a\ (a > -2)$ である2つの関数 $y = f(x) = x^2$ と
$y = g(x) = ax + b\ (a \neq 0)$ の値域が一致するように、a, b の値を定めよ.
(2) 定義域がどちらも同じ、$-2 \leqq x \leqq a\ (a > -2)$ である2つの関数 $y = f(x) = ax^2\ (a \neq 0)$ と
$y = g(x) = ax + b\ (a \neq 0)$ の値域が一致するように a, b の値を定めよ
(3) 定義域がどちらも同じ、$-2 \leqq x \leqq a\ (a > -2)$ である2つの関数 $y = f(x) = x^2$ と
$y = g(x) = bx + b + 1\ (b \neq 0)$ の値域が一致するように a, b の値を定めよ.

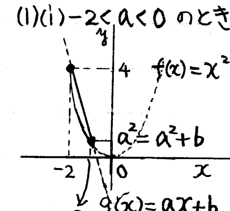
[考] (1) a で場合わけをしますが、(i) $-2 \leqq a < 0$ のとき直線 $y = g(x) = ax + b$ の傾き $a < 0$ です.
(2) (i) $-2 < a < 0$ のとき $y = f(x) = ax^2$ は上に凸(下に開いている.下に凹)です. $y = f(x) = ax^2$ の最小値は $f(-2) = 4a < 0$, 最大値は $f(a) = a^3 < 0$, $y = g(x) = ax + b\ (a < 0)$ の最小値は、$g(a) = a^2 + b < 0$, 最大値 $g(-2) = -2a + b < 0$ でなければなりませんが、------
$4a = a^2 + b\ (<0)$ ---① $a^3 = -2a + b\ (<0)$ ---② を連立することになります.このときの2つのグラフは、右のようなことですが、①,②を解いてしまわないとわかりません. (i) $-2 < a < 0$ をみたす a は、存在するでしょうか.

[考](2)



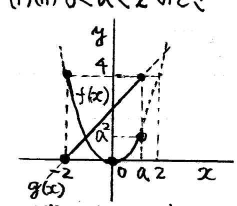
(3) (1),(2)と同じようにできますが、annoying です.(高校微分が必要になります.)
$y = g(x) = b(x+1) + 1$ と変形すると.この直線は.傾き $b\ (\neq 0)$ にかかわらず、点 $P(-1, 1)$ を通ります.更に、この点 $P(-1, 1)$ は $y = f(x) = x^2$ 上の点でもあります.答だけは、求まりますが、理論的に、かくことは、difficult です. Vol. I P.27の(14)に同一題.

(1)(i) $-2 < a < 0$ のとき



[解] (1) (i) $-2 < a < 0$ のとき $y = f(x) = x^2$ の最小値は $f(a) = a^2$, 最大値は $f(-2) = 4$
$y = g(x) = ax + b$ は、右肩下がりの直線だから最小値は $g(a) = a^2 + b$,
最大値は $g(-2) = -2a + b$ $a^2 = a^2 + b$ かつ $4 = -2a + b$ $\therefore b = 0, a = -2$
であるが、これは (i) $-2 < a < 0$ に不適
(ii) $0 < a < 2$ のとき ($y = g(x) = ax + b$ の $a \neq 0$ です) $y = f(x) = x^2$ の最小値は $f(0) = 0$
最大値は $f(-2) = 4$, $y = g(x) = ax + b$ は右肩上がりの直線だから、
最小値は $g(-2) = -2a + b$, 最大値は $g(a) = a^2 + b$
値域が一致するから、$0 = -2a + b$ ---①, $4 = a^2 + b$ ---②
①より $b = 2a$ を②に代入 $4 = a^2 + 2a$, $a^2 + 2a - 4 = 0$, $a = -1 \pm \sqrt{5}$
$a = -1 - \sqrt{5} < 0$ であり不適 $\underline{a = -1 + \sqrt{5}}$ は (ii) $0 < a < 2$ に適する

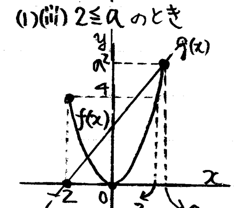
(1)(ii) $0 < a < 2$ のとき



(iii) $2 \leqq a$ のとき $y = f(x) = x^2$ の最小値は、$f(0) = 0$, 最大値は $f(a) = a^2$
$y = g(x) = ax + b$ の最小値は $g(-2) = -2a + b$, 最大値は $g(a) = a^2 + b$
値域が一致するから. $0 = -2a + b$, $a^2 = a^2 + b$, $a = b = 0$ となり不適
(i), (ii), (iii) より、求める $\underline{a = -1 + \sqrt{5}}$
このときの値域は. $0 \leqq y \leqq 4$

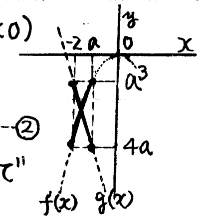
答(1)	$a = -1 + \sqrt{5}$

(1)(iii) $2 \leqq a$ のとき



(2) 次頁

(2)(i) −2<a<0 のとき



(2)(i) $-2<a<0$ のとき $y=f(x)=ax^2$ は上に凸なグラフであり、最小値は $f(-2)=4a\ (<0)$

最大値は $f(a)=a^3\ (<0)$，$y=g(x)=ax+b$ は、最小値 $g(a)=a^2+b$

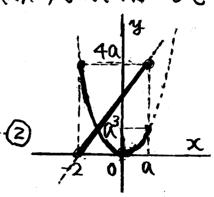
最大値は $g(-2)=-2a+b$．値域が一致するから $4a=a^2+b$ ---①，$a^3=-2a+b$ ---②

①より $b=4a-a^2$ を②に代入 $a^3=-2a+4a-a^2=2a-a^2$ 両辺を $a\ (\neq 0)$ で

わって $a^2=2-a$，$a^2+a-2=0$，$(a+2)(a-1)=0$，$\therefore a=-2, 1$ であるが

(i) $-2<a<0$ に不適

(2)(ii) 0<a<2 のとき



(ii) $0<a\leqq 2$ のとき $y=f(x)=ax^2$ は、下に凸なグラフであり、最小値は $f(0)=0$

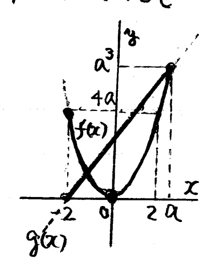
最大値は $f(-2)=4a$，$y=g(x)=ax+b$ は、最小値 $g(-2)=-2a+b$，

最大値は $g(a)=a^2+b$，値域が一致するから、$0=-2a+b$ ---①，$4a=a^2+b$ ---②

①より $b=2a$ を②に代入 $4a=a^2+2a$，$a^2-2a=0$，$a(a-2)=0$，$a=0, 2$

$a=2$ のとき (ii) $0<a\leqq 2$ に適する．(このときの値域は、$0\leqq y\leqq 8$ となり一致．$b=4$)

(2)(iii) 2<a のとき



(iii) $2<a$ のとき $y=f(x)=ax^2$ の最小値は $f(0)=0$．最大値は $f(a)=a^3$

$y=g(x)=ax+b$ の最小値は $g(-2)=-2a+b$，最大値は $g(a)=a^2+b$

値域が一致するから、$0=-2a+b$ --- ① $a^3=a^2+b$ --- ②

答(2)	$a=2$

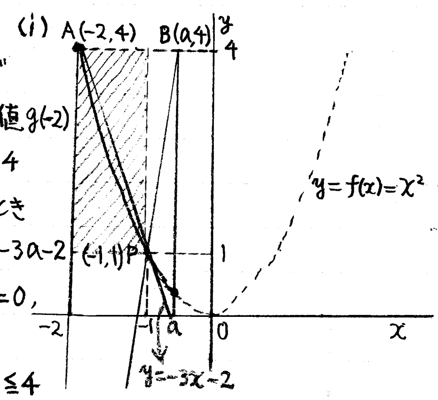
①より $b=2a$ を②に代入 $a^3=a^2+2a$ 両辺を $a\ (\neq 0)$ でわって

$a^2=a+2$，$a^2-a-2=0$，$(a-2)(a+1)=0$，$a=2, -1$，$2<a$ に不適

注．(iii) $2\leqq a$ としてもOKです．このときは (ii) $0<a\leqq 2$ のときの解 $a=2$ と同じ．

(3) $y=g(x)=bx+b+1=b(x+1)+1$ は、傾き $b\ (\neq 0)$ にかかわらず、点 $P(-1,1)$ を通り、この点 $P(-1,1)$ は $y=f(x)=x^2$ 上の点でもある．今、点 $P(-1,1)$ を中心にして、$y=g(x)$ を回転させ、傾き b の値を変えて、$y=f(x)=x^2$ と $y=g(x)$ (定義域 $-2\leqq x\leqq a$) の値域が一致するように、a, b の値を定める．

(i) $-2<a<0$ のとき



(ア) $b<0$ ならば、$y=f(x)$ の最大値が4だから、$y=g(x)$ が直線AP以外 (A(−2,4)とする) になると、$y=g(x)$ の最大値 $g(-2)$ は、4でない．$\therefore g(-2)=4$ が必要であり、$b(-2+1)+1=4$

$-b+1=4$ $\therefore b=-3$ 直線APは $y=g(x)=-3x-2$．このとき $y=f(x)$ の最小値 $f(a)=a^2$ と $y=g(x)$ の最小値 $g(a)=-3a-2$ は、一致しなければならない．$\therefore a^2=-3a-2$，$a^2+3a+2=0$，

$(a+1)(a+2)=0$，$a=-1, -2$ であるが (i) $-2<a<2$ より

$a=-1$，まとめると $a=-1, b=-3$．一致する値域は $1\leqq y\leqq 4$

(イ) $b>0$ ならば、$y=f(x)$ の最大値が4だから $y=g(x)$ は、点B(a,4)を通らなければならず、直線BPが $y=g(x)$ となる必要がある．

このときの $y=f(x)$ の最小値は、$f(a)=a^2>0$，$y=g(x)$ の最小値 $g(-2)<0$ であるから値域が一致することはない．

答(3)	$(a=-1$ かつ $b=-3)$ または $(a=2$ かつ $b=1)$

(ii) $0\leqq a\leqq 2$ のとき P.2の(15)サ 下に続く

[類8] A,B,C,D,4人が一対一で1000mの自転車スプリント競争を行う.それぞれのスピードは常に一定であるものとする.まず,AとBが走ったところ200m差でAが勝った.BとCでは200m差でBが勝った.AとDでは100m差でDが勝った. (1) AとCでは,何m差で,どちらが勝つか.
(2) A,B,C,Dのスピードが速い順に,不等号で記せ. (3) BとDは,何m差でどちらが勝つか.
(4) A,B,C,D,4人が走ったら,一番目の走車がゴールしたとき,最下位の走車との差は,何mか. (解)はP.2の(21)

実際に,このようなレースはないでしょうが,数学の設問として,解いて下さい.

(考) P.2の(9),(10),(11),例1～例5は,やっていますね.

例 A,B,C 3人が一対一の100m競争をする.AとBは20mの差でAが勝った.BとCは20mの差でBが勝った.AとCが走ったら,何m差でどちらが勝つか.ただし,A,B,Cは,それぞれ,一定スピードで走るものとする.

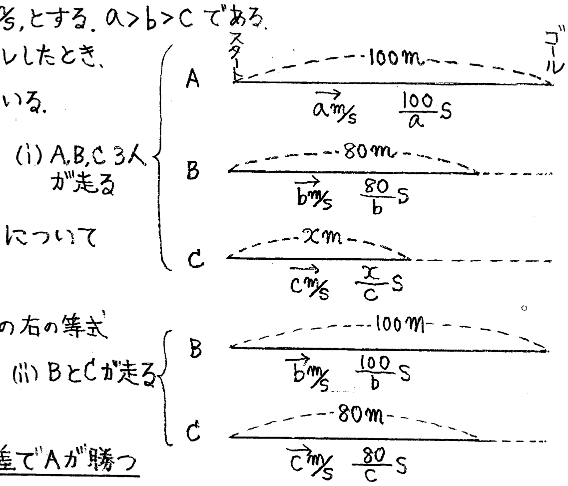
(考1) 右表のようなことで,Aが100m走ってゴールしたときBは,80m地点にいる.Bが100m走ってゴールしたとき,Cは80m地点にいる.それでは,Aが100m走ってゴールしたときCは何m地点にいるか,ということです.スピードの速い順に $A>B>C$ であり,A,B,C 3人が一緒に走ったら,Aが100m走ってゴールしたとき,Bは80m地点にいる.Cはxm地点にいる.(AとCの差は $100-x$ mです)

A	B	C
100	80	x
	100	80

(カイ1) 右上表より,$80:x=100:80=10:8=5:4$, $5x=80\times4$, $x=16\times4=64$, Aが100m走ったとき,Cは,64m,(Bは80m)走っている.$100-64=36$(m) 36m差でAが勝つ

(考2) A,B,Cのスピードをそれぞれam/s, bm/s, cm/s,と設定し,方程式を作る.何を消去して,何を残すかを考えて,できるだけ,文字の少ない式を作ります.

(カイ2) A,B,C,のスピードをそれぞれam/s, bm/s, cm/s,とする.$a>b>c$である.
A,B,C 3人が走るとする.Aが100m走ってゴールしたとき,Bは80m地点,Cは,最下位でxm地点にいる.
右(i)図より,かかった時間について
$\frac{100}{a}=\frac{80}{b}=\frac{x}{c}$ ---①
BとCが走ったとき,右(ii)図より,かかった時間について
$\frac{100}{b}=\frac{80}{c}$ ---②
②より $100c=80b$, $5c=4b$, $b=\frac{5}{4}c$ を①の右の等式に入れて $\frac{80}{\frac{5}{4}c}=\frac{x}{c}$, $\frac{80\times4}{5c}=\frac{x}{c}$
$16\times4=x$ ∴ $x=64$
すなわち,AとCが走ったら,$100-64=$ 36mの差でAが勝つ



(解1) A,B,C,Dのスピードについては、A>B, B>C, D>A, であるから、(2) D>A>B>C となる

(1) A,B,C 3人が走るとすると、Aが1000m走ってゴールしたとき、Bは800m地点、Cは xm地点にいる。$800:x=1000:800=10:8=5:4$, $5x=4\times800$

$x=4\times160=640$ したがって $1000-640=360$m差でAが勝つ

(1)の表

A	B	C
1000	800	x
	1000	800

(3),(4) D>A>B>C のスピードだから、Dが1000m走って一着でゴールする。

(1)のような表を右に作る。Dがゴールしたとき、Aは900m地点、

Bは、ym地点、Cはzm地点にいる。((3)の解もこれでできる。)

$900:y=1000:800=10:8=5:4$, $5y=4\times900$, $y=4\times180=720$,

(3)したがって、BとDが走ったとき $1000-720=280$m差でDが勝つ。

$900:z=1000:640=100:64$, $100z=64\times900$, $z=64\times9=576$

(4)したがって、最下位Cと一着のDとの差は、$1000-576=424$m

(補) $y:z=800:640$, $y:z=1000:800$, $y=720$ を用いてもzは求まります。

(3),(4)の表

D	A	B	C
1000	900	y	z
	1000	800	640
		1000	800

Cの640は(1)のxである

答	
	(1) 360m差でAが勝つ
	(2) D>A>B>C
	(3) 280m差でDが勝つ
	(4) 一着Dと最下位Cとの差は424m

(解2) A,B,C,Dのスピードをそれぞれ a m/s, b m/s, c m/s, d m/s とする。

(2)題意から $a>b$, $b>c$, $d>a$ であるから $d>a>b>c$

(1) A,B,C 3人が走るとする。Aが1000m走ってゴールしたとき、Bは800m地点、Cは、xm地点にいる。かかった時間は、同じだから、右下図(1)の(i)より

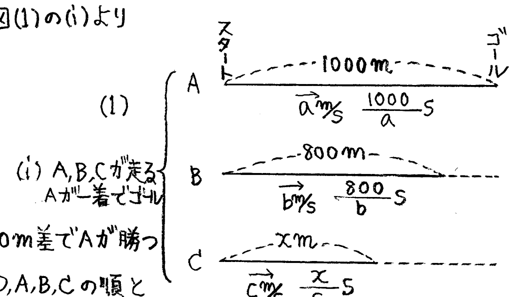
$\frac{1000}{a}=\frac{800}{b}=\frac{x}{c}$ ---①

(ii)のBとCが走った場合 $\frac{1000}{b}=\frac{800}{c}$ ---②

②より、$800b=1000c$, $8b=10c$, $4b=5c$ ∴$b=\frac{5}{4}c$

これを①の右の等式に代入 $\frac{800}{\frac{5}{4}c}=\frac{x}{c}$

$\frac{800\times4}{5c}=\frac{x}{c}$, $160\times4=x$, $x=640$ ∴$1000-640=360$m差でAが勝つ

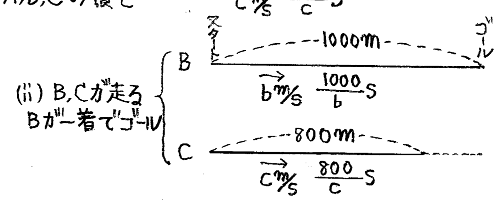


(3),(4) A,B,C,D,4人が走ると、(2)の $d>a>b>c$ のスピードから、D,A,B,Cの順となる。右下図(3),(4)の(•)より、$\frac{1000}{d}=\frac{900}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ ---③

①の左の等式より、$\frac{1000}{a}=\frac{800}{b}$, $1000b=800a$, $5b=4a$

∴$a=\frac{5}{4}b$ これを③の中央の等式に入れる。

$\frac{900}{\frac{5}{4}b}=\frac{y}{b}$, $\frac{900\times4}{5b}=\frac{y}{b}$, $180\times4=y$, $y=720$



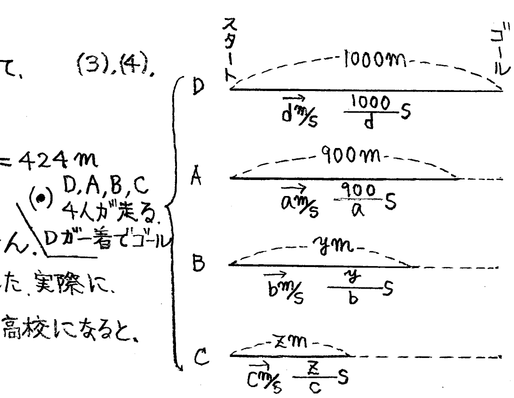
(3)したがって、BとDが走ったとき $1000-720=280$m差でDが勝つ

①より、$x=640$ を用いて $\frac{1000}{a}=\frac{640}{c}$, $640a=1000c$,

$64a=100c$, ∴$a=\frac{100}{64}c$ ※ を③からの $\frac{900}{a}=\frac{z}{c}$ に入れて、

$\frac{900}{\frac{100}{64}c}=\frac{z}{c}$, $\frac{900\times64}{100c}=\frac{z}{c}$, $9\times64=z$, $z=576$

(4)したがって、最下位Cと一着のDとの差は $1000-576=424$m



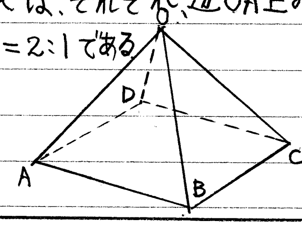
(補)(解2)は、代入法で、どのように入れるかを考えねば、なりません。

※などは、先を見て、約分せずに、あえて、$a=\frac{100}{64}c$ を代入しました。実際に、このようなレースはないでしょう。数学的考察のための設問です。高校になると、Vol.III.P.208に面白い、理系微積としての設問があります。

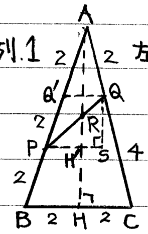
14. 右の図は、全ての辺の長さが12の正四角錐 O-ABCD である。点P, Q, R は、それぞれ、辺OA上の点、辺OC上の点、辺AB上の点であり、OP : PA = 2 : 1, OQ : QC = 1 : 2, AR : RB = 2 : 1 である。

(1) 線分PQの長さを求めよ

(2) 3点 O, B, D を通る平面と線分PQの交点をSとするとき線分RSの長さを求めよ.



[考] 例.1 左図 $AB=AC=6$, $AP=4$, $AQ=2$, $BC=4$ のとき $PQ=\boxed{ア}$, $AR=\boxed{イ}$



(解1) 相似により $QQ'=\frac{1}{3}BC=\frac{4}{3}$, $PH'=\frac{2}{3}BH=\frac{4}{3}$ $PS=PH'+H'S=PH'+\frac{QQ'}{2}=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2$

$QS=\frac{1}{3}AH=\frac{1}{3}\sqrt{6^2-2^2}=\frac{1}{3}\sqrt{32}=\frac{4}{3}\sqrt{2}$

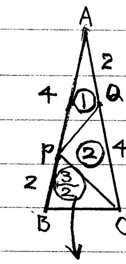
$PQ=\sqrt{PS^2+QS^2}=\sqrt{2^2+(\frac{4}{3}\sqrt{2})^2}=\frac{2\sqrt{17}}{3}$ (ア)

右図より $\triangle APQ=\frac{1}{1+2+\frac{3}{2}}\triangle ABC=\frac{2}{9}\times\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{6^2-2^2}$

$=\frac{4}{9}\sqrt{32}=\frac{16}{9}\sqrt{2}$ ……①

一方 $\triangle APQ=\frac{1}{2}\times PS\times AR=\frac{1}{2}\times2\times AR=AR$ ……②

①,②より $\frac{16}{9}\sqrt{2}=AR$ (イ)



③ $\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

(解2) 右のように座標軸 x, y をとる. $A(0,0)$

$AH=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$ だから $C(4\sqrt{2},2)$ $B(4\sqrt{2},-2)$

$Q(\frac{4\sqrt{2}}{3},\frac{2}{3})$ $P(\frac{8}{3}\sqrt{2},-\frac{4}{3})$

$PQ^2=(\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{8}{3}\sqrt{2})^2+(\frac{2}{3}-(-\frac{4}{3}))^2$

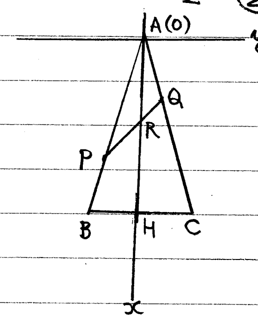
$=(-\frac{4}{3}\sqrt{2})^2+2^2=\frac{32}{9}+4=\frac{68}{9}$

$PQ=\frac{\sqrt{68}}{3}=\frac{2\sqrt{17}}{3}$ (ア)

直線PQの式は $y=\dfrac{-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}}{\frac{8}{3}\sqrt{2}-\frac{4}{3}\sqrt{2}}(x-\frac{4\sqrt{2}}{3})+\frac{2}{3}$

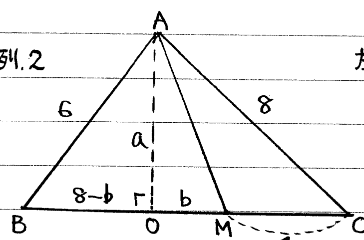
$y=\frac{-6}{4\sqrt{2}}(x-\frac{4\sqrt{2}}{3})+\frac{2}{3}=-\frac{3}{2\sqrt{2}}x+\frac{8}{3}$

$y=0$ のとき $\frac{3}{2\sqrt{2}}x=\frac{8}{3}$ $x=\frac{16\sqrt{2}}{9}$ (イ)



(紙面を左回りに90°回転させて見よ.)

例.2



左図 $AB=6$, $AC=8$, $BC=12$, $CM=4$ のとき $AM=\boxed{}$

(解) AからBCに垂線を下ろし点Oとする. $AO=a$, $OM=b$,

$OB=12-(4+b)=8-b$

ピタゴラスの定理より

$a^2+(8-b)^2=6^2$ $\therefore a^2+b^2-16b+28=0$ ……①

$a^2+(b+4)^2=64$ $\therefore a^2+b^2+8b-48=0$ ……②

①−② $-24b+76=0$ $b=\frac{76}{24}=\frac{19}{6}$

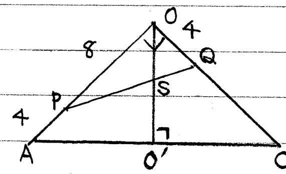
①より $AM^2=a^2+b^2=16b-28=16\cdot\frac{19}{6}-28=\frac{68}{3}$ $\therefore AM=\frac{2\sqrt{51}}{3}$

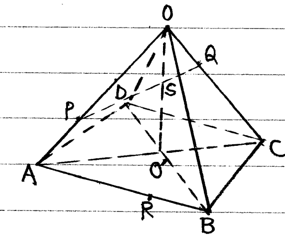
(aを求めなくても結論は$\sqrt{a^2+b^2}$を求めることです.)

[解] (1) Oから正方形ABCDに垂線を下ろし、O′とする。△OACを取り出せば、

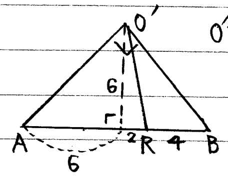
$OA=OC=12,\ AC=12\sqrt{2},\ \angle AOC=90^\circ$

ピタゴラスの定理より $PQ=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$



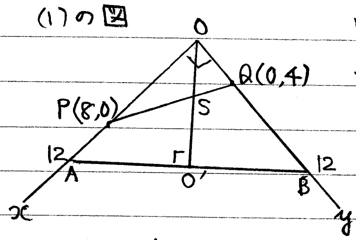


(2) △O′ABを取り出せば



$O'R=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$ ---- ①

(1)の図



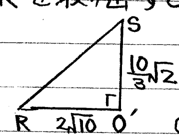
直線PQの式は $y=-\frac{1}{2}x+4$，直線OSの式は $y=x$ だから

連立して解けば $y=-\frac{1}{2}y+4$　$\frac{3}{2}y=4$　$y=\frac{8}{3},\ x=\frac{8}{3}$　$\therefore S\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3}\right)$

$OS=\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$

$O'S=OO'-OS=6\sqrt{2}-\frac{8}{3}\sqrt{2}=\frac{10}{3}\sqrt{2}$

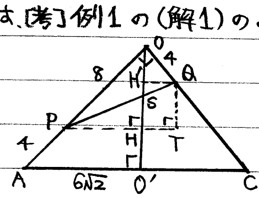
△SO′Rを取り出すと、 $RS=\sqrt{(2\sqrt{10})^2+\left(\frac{10}{3}\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{40+\frac{200}{9}}=\frac{\sqrt{560}}{3}=\frac{4\sqrt{35}}{3}$



O′Rは①

答	(1) $PQ=4\sqrt{5}$
	(2) $RS=\frac{4\sqrt{35}}{3}$

[補] (2)は、[考]例1の(解1)のようにもできます。



$\triangle OPQ=\frac{1}{2}\times 8\times 4=16$

一方 $\triangle OPQ=\frac{1}{2}\times PT\times OS=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\times OS=3\sqrt{2}\,OS$

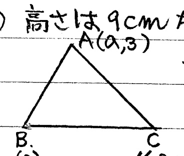
$\therefore 16=3\sqrt{2}\,OS$　$OS=\frac{16}{3\sqrt{2}}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$

$\left(\because PH=OP\times\frac{1}{\sqrt{2}}=8\times\frac{1}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2},\ HT=H'Q=4\times\frac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\quad \therefore PT=PH+HT=6\sqrt{2}\right)$

高校でvectorなどを習うと、計算のみで、求めることができますが、図形的に考えることは非常に大切です。平面幾何がにがてな人は、高校での数学が上達しません。円がらみの問題は特に大切です。

[問] △ABCの面積が 54cm^2，$AB:AC=3:5$，$BC=12\text{ cm}$ のとき AB, ACの長さを求めよ。

(解) 高さは9cmだから△ABCを $\frac{1}{3}$ に縮小し、高さ3cm，BC=4cm として $\overline{AB},\overline{AC}$ を求め、あとで3倍する。



左のように座標を定めると、$\overline{AB}=\sqrt{a^2+9}$，$\overline{AC}=\sqrt{(a-4)^2+9}=\sqrt{a^2-8a+25}$

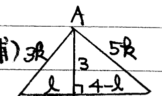
$5\overline{AB}=3\overline{AC}$　$25\overline{AB}^2=9\overline{AC}^2$　$25(a^2+9)=9(a^2-8a+25)$　$25a^2+25\cdot 9=9a^2-72a+9\cdot 25$

$16a^2+72a=0$　$2a^2+9a=0$　$a=0,-\frac{9}{2}$　答 $(AB,AC)=(9,15)\left(\frac{9\sqrt{13}}{2},\frac{15\sqrt{13}}{2}\right)$

(i) $a=0$ のとき $A(0,3)$　$\therefore AB=3,AC=5$

(ii) $a=-\frac{9}{2}$ のとき $A\left(-\frac{9}{2},3\right)$　$AB=\sqrt{\frac{81}{4}+9}=\sqrt{9\left(\frac{9}{4}+1\right)}=\frac{3\sqrt{13}}{2}$，$AC=\sqrt{\frac{17^2}{4}+9}=\frac{\sqrt{325}}{2}=\frac{5\sqrt{13}}{2}$

(補)



左のようにAB:AC=3:5だから $AB=3k$，$AC=5k$ とおいて $9k^2=l^2+9$，$25k^2=9+16-8l+l^2$ の連立方程式を解いてもOKです。$k^2=\frac{l^2+9}{9}$ を代入 $25(l^2+9)=9(l^2-8l+25)$ ----- です。

意欲がある人は、㊫P.125の(2),(3)の[類2]もやってみてはどうでしょうか