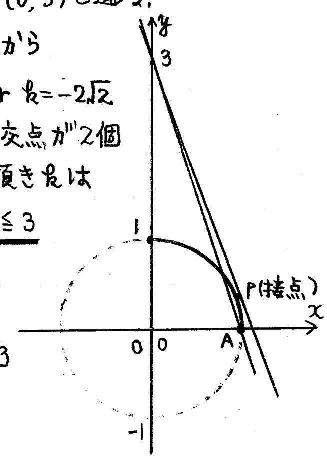
[類1] 方程式 $\sin x + c\cos x = 3$ が $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲に異なる2個の実数解をもつ実数 c の範囲を定めよ

[考1] 図形と方程式とのコラボです. $x=\theta$ とおきかえるとわかりやすいです. $\cos\theta = x$, $\sin\theta = y$ とおけば, $x^2+y^2=1$ の $\frac{1}{4}$ 円 と $y + cx = 3$, $y = -cx+3 = kx+3$ $(-c=k)$ として, 異なる2つの交点をもつ傾き k の範囲を求めます. これが Best 解ですが, 少々 troublesome でも, 他にも解はあるでしょう.

[解1] わかりにくいので, $x=\theta$ とおいて $\sin\theta + c\cos\theta = 3$, $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ として考える. $\cos\theta = x$, $\sin\theta = y$ とおけば, $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より $x^2+y^2=1$ $(0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1)$ の $\frac{1}{4}$ 円と $y = -cx+3$ ---① の交点が異なる2個あれば, θ は異なる θ_1, θ_2 の解をもつ. ① は傾き $-c$ $(=k$ とおく$)$ にかかわらず定点 $(0,3)$ を通る.
$y=-cx+3=kx+3$, $kx-y+3=0$ が, $\frac{1}{4}$ 円に点P で接するとき, 原点0から直線までの距離が半径1に等しいから $\frac{3}{\sqrt{k^2+1}}=1$, $k^2+1=9$, $k=2\sqrt{2}$ or $k=-2\sqrt{2}$ であるが, 明らかに $k<0$. ∴ $k=-2\sqrt{2}$, 傾き k が $-2\sqrt{2}$ より小さくなると円との交点が2個となる. 点A$(1,0)$ をちょうど通る時までは, 交点が2個である. このときの傾き k は $k=-\frac{3}{1}=-3$. ∴ $-3 \leqq k < -2\sqrt{2}$ であればよい. $-3 \leqq -c < -2\sqrt{2}$, ∴ $\underline{2\sqrt{2} < c \leqq 3}$

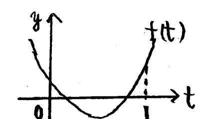


[補] $\cos\theta = t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ とおくと $\sin\theta = \sqrt{1-t^2}$ $(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より $\sin\theta \geqq 0)$
$ct = -\sqrt{1-t^2}+3$, 右辺のグラフは, ($y=-\sqrt{1-t^2}$ (下側の $\frac{1}{4}$ 円)), $y=-\sqrt{1-t^2}+3$ のグラフと $y=ct$ のグラフの交点を調べても [解1] と似たようなことです.

[考2] $\tan\frac{\theta}{2} = t$. $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より $0 \leqq t \leqq 1$, とおけば, $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$, 2次関数の利用

[解2] x を θ に変えて. $\tan\frac{\theta}{2} = t$ とおく. $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より $0 \leqq t \leqq 1$. $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$ (P.140参照)
$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{c(1-t^2)}{1+t^2} = 3$, $2t + c(1-t^2) = 3(1+t^2) = 3+3t^2$, $(3+c)t^2 - 2t + 3 - c = 0$ ---①
$c=-3$ ならば, $-2t+6=0$, $t=3$ となって $0 \leqq t \leqq 1$ に不適. ∴ $3+c \neq 0$. ① の両辺を $3+c$ でわって $f(t)$ とおく. $f(t) = t^2 - \frac{2}{3+c}t + \frac{3-c}{3+c} = 0$ が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲に異なる2つの実数解 t_1, t_2 をもてば, それに対応して, 異なる2つの実数解 θ_1, θ_2 が存在する. •判別式 $\frac{D}{4} = \left(\frac{1}{3+c}\right)^2 - \frac{3-c}{3+c} > 0$, $(3+c)^2 (>0)$ をかけて $1-(3-c)(3+c)>0$, $1-9+c^2>0$, $c^2-8>0$ ∴ $c<-2\sqrt{2}$ or $2\sqrt{2}<c$ ---- ②

- $f(0) \geqq 0$ より $\frac{3-c}{3+c} \geqq 0$, $\frac{c-3}{c+3} \leqq 0$, ∴ $-3<c \leqq 3$ ---③
- $f(1) \geqq 0$ より $1 - \frac{2}{3+c} + \frac{3-c}{3+c} = \frac{3+c-2+3-c}{3+c} = \frac{4}{3+c} \geqq 0$, $3+c>0$ ∴ $c>-3$ ---④
- 軸: $t=\frac{1}{3+c}$ について $0<\frac{1}{3+c}<1$, $-3<c$ かつ $\frac{3+c-1}{3+c}>0$, $-3<c$ かつ $\frac{c+2}{c+3}>0$,
$-3<c$ かつ ($c<-3$ または $-2<c$) ∴ $-2<c$ ---⑤ ② かつ ③ かつ ④ かつ ⑤ より $\underline{2\sqrt{2}<c \leqq 3}$



[補] ① は $3+c \neq 0$ を示して $3+c$ でわって, 下に凸な2次関数で考えます. $3+c>0$, $3+c<0$ の2つにわけるのは troublesome.

[考3] $\tan\frac{\theta}{2}=t$ とおくのは[解2]と同じ. $C(t^2-1)=-3t^2+2t-3$ として、左辺のグラフと右辺のグラフが、$0\le t\le 1$ に異なる2つの交点をもつCの範囲を求めます. $y=C(t^2-1)$ のグラフは、2つの定点$(\pm1,0)$を通ります. 正の実数Cが大きくなると、トンガリが鋭くなっていきます.

[解3] [解2]の途中より、$C(t^2-1)=-3t^2+2t-3$

$y=-3t^2+2t-3=-3(t^2-\frac{2}{3}t+1)=-3\{(t-\frac{1}{3})^2-\frac{1}{9}+1\}=-3\{(t-\frac{1}{3})^2+\frac{8}{9}\}=-3(t-\frac{1}{3})^2-\frac{8}{3}$ ---①

$y=C(t^2-1)$ ---② のグラフと①のグラフが $0\le t\le 1$ の範囲に異なる2つの交点をもつCの範囲を求める. ②のグラフは、$C=0$ のとき $y=0$ であり①と交点をもたない.

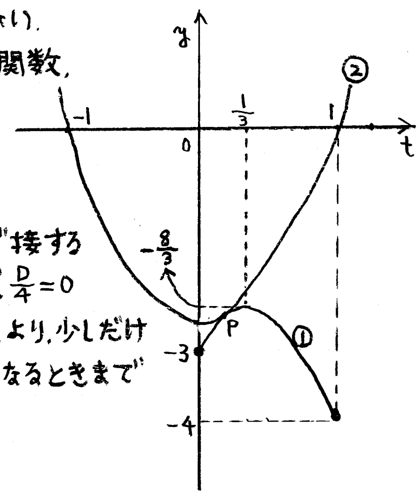
$C\ne0$ のときCにかかわらず2つの定点$(-1,0)$, $(1,0)$を通る2次関数,

$C<0$ のとき上に凸な2次関数でありCが小さくなるにつれてトンガリが鋭くなっていくが①と交点をもつことはない.

$C>0$ のとき、下に凸な2次関数でありCが大きくなるにつれてトンガリが鋭くなり、y軸上にある頂点は下降する. 右図点Pで接するとき. $C(t^2-1)=-3t^2+2t-3$, $(3+C)t^2-2t+3-C=0$ の判別式 $\frac{D}{4}=0$

$1-(3+C)(3-C)=0$, $1-9+C^2=0$, $C^2=8$, $C>0$ より $C=2\sqrt{2}$, この値より、少しだけCが大きくなると、2つの交点が現われる. ちょうど、頂点が$(0,-3)$になるときまで2つの交点があるので. ②が$(0,-3)$を通るとき $-3=-C$, $C=3$

よって求めるCの範囲は $2\sqrt{2}<C\le 3$



[解4] $\sin x+C\cos x=3$, $C\cos x=3-\sin x$, $\cos x=0$ のとき $x=\frac{\pi}{2}$ このとき $\sin x=1$, $C\cdot 0=2$ となり不合理

∴ $\cos x\ne 0$. $0\le x<\frac{\pi}{2}$ で $C=\frac{3-\sin x}{\cos x}=f(x)$, $f'(x)=\frac{-\cos^2 x+\sin x(3-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{3\sin x-1}{\cos^2 x}$

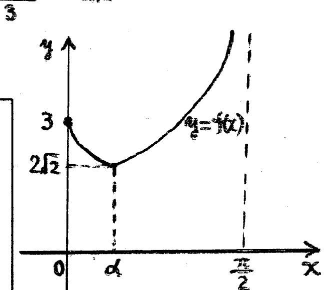
$0\le x<\frac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ となるαが存在する. 下に増減表をかき $y=f(x)$ のグラフをかく.

x	0	…	α	…	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	╳	−	0	+	╳
$f(x)$	3	↘	$f(\alpha)$	↗∞	╳

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\frac{3-1}{+0}=+\infty$

極小値 $f(\alpha)=\frac{3-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3-\frac{1}{3}}{\sqrt{1-(\frac{1}{3})^2}}=\frac{\frac{8}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{8}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

$y=C$ との交点が、2つあるCの範囲は、$2\sqrt{2}<C\le 3$



[補] 微分も有効ですね. [解3]を $t\ne1$ のとき $C=\frac{-3t^2+2t-3}{t^2-1}=f(t)$ $(0\le t<1)$ とおいて微分すると, $f(t)=-3+\frac{2t-6}{t^2-1}$, $f'(t)=\frac{2(t^2-1)-2t(2t-6)}{(t^2-1)^2}$

$=\frac{-2t^2+12t-2}{(t^2-1)^2}=\frac{-2(t^2-6t+1)}{(t^2-1)^2}=0$, $t=3\pm2\sqrt{2}$, $0\le t<1$ より $t=3-2\sqrt{2}$

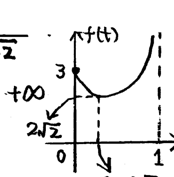
の前後で $f'(x)$ は負から正に符号を変える.

極小値 $f(3-2\sqrt{2})=-3+\frac{2(3-2\sqrt{2})-6}{(3-2\sqrt{2})^2-1}=-3+\frac{-4\sqrt{2}}{9-12\sqrt{2}+8-1}=-3+\frac{-4\sqrt{2}}{16-12\sqrt{2}}=-3+\frac{-\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}}$

$=-3+\frac{-\sqrt{2}(4+3\sqrt{2})}{16-18}=-3+\frac{-4\sqrt{2}-6}{-2}=-3+2\sqrt{2}+3=2\sqrt{2}$, $f(0)=3$, $\lim_{t\to1-0}f(t)=-3+\frac{-4}{-0}=+\infty$

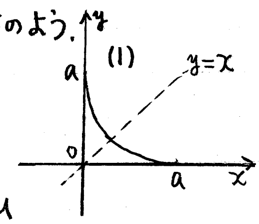
グラフは、右の通り. よって直線 $y=C$ との交点が異なる2つあるのは、$2\sqrt{2}<C\le 3$

注. $t=1$ のとき $C\cdot 0=-3$ となって不合理 ∴ $t\ne1$



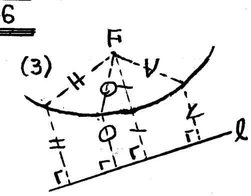
[類1] 放物線Cを $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ (aは正の実数定数) とする.
(1) $y=f(x)$ の形にして、$f'(x)$, $f''(x)$ を求めてグラフの概形を描け
(2) 放物線Cとx軸, y軸で囲まれる図形の面積Sを求めよ
(3) 放物線の定義をのべよ
(4) 放物線Cの焦点Fの座標と準線lの方程式を求めよ
(5) 放物線Cを軸がy軸である放物線C': $y=px^2+q$ $(p>0)$ の形にかき改めよ.
(6) 放物線C'を利用して、(2)で求めた面積Sを求めよ
更にxyz空間における曲面Gの式を $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ (aは正の実数定数) とする.
(7) 曲面Gと平面$x=0$, 平面$y=0$, 平面$z=0$で囲まれる立体の体積Vを求めよ. ((2)を利用せよ)

[解] (1) $x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $\sqrt{y}=\sqrt{a}-\sqrt{x}\geqq 0$ より $\sqrt{x}\leqq\sqrt{a}$ ∴ $x\leqq a$, 同様に $y\leqq a$ ∴ $0\leqq x\leqq a$, $0\leqq y\leqq a$,
グラフは、$y=x$ 対称である. $y=f(x)=(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2$, $f'(x)=2(\sqrt{a}-\sqrt{x})\times\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)=-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\leqq 0$
(∵ $0\leqq x\leqq a$) したがって $f(x)$は減少関数, $f''(x)=-\frac{1}{x}\left\{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{a}-\sqrt{x})\right\}$
$=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}-\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{a}}{2x\sqrt{x}}>0$ よって $f(x)$は下に凸　以上より、グラフは下のよう.

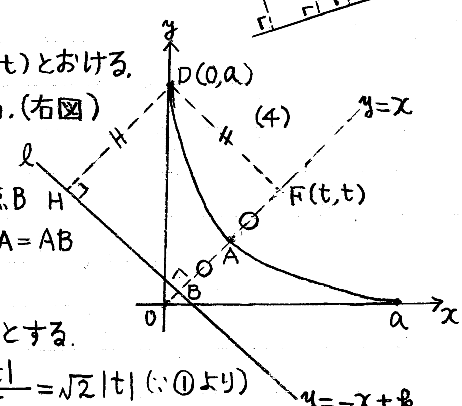


(2) $S=\int_0^a(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2dx$, $\sqrt{a}-\sqrt{x}=u$ とおく. $(\sqrt{a}-u)^2=x$, $\begin{array}{c|c} x & 0\to a \\ \hline u & \sqrt{a}\to 0\end{array}$
$\frac{dx}{du}=2(\sqrt{a}-u)\cdot(-1)$, $S=\int_{\sqrt{a}}^0 u^2\cdot 2(\sqrt{a}-u)(-1)du=\int_0^{\sqrt{a}}2u^2(\sqrt{a}-u)du$
$=2\int_0^{\sqrt{a}}(\sqrt{a}u^2-u^3)du=2\left[\frac{\sqrt{a}}{3}u^3-\frac{1}{4}u^4\right]_0^{\sqrt{a}}=2\left(\frac{a^2}{3}-\frac{a^2}{4}\right)=2\cdot\frac{a^2}{12}=\underline{\underline{\frac{a^2}{6}}}$

(3) 定点Fまでの距離と定直線lまでの距離が等しい点の軌跡.
点Fを焦点, 直線lを準線という. (右図)



(4) 定義と対称性より、焦点Fは直線$y=x$上にあり、F(t,t)とおける.
準線lは、直線$y=x$に垂直なので $y=-x+k$ とおける. (右図)
放物線Cと直線$y=x$の交点Aは、$\sqrt{x}+\sqrt{x}=\sqrt{a}$,
$2\sqrt{x}=\sqrt{a}$, $x=\frac{a}{4}$ ∴ A$\left(\frac{a}{4},\frac{a}{4}\right)$, $y=-x+k$ と $y=x$ の交点B
は、$x=-x+k$, $x=\frac{k}{2}$, ∴ 点B$\left(\frac{k}{2},\frac{k}{2}\right)$, 今 定義より FA=AB
(点AはFBの中点). FD=DH を用いて、t, k を定める.
$\frac{t+\frac{k}{2}}{2}=\frac{a}{4}$, $t+\frac{k}{2}=\frac{a}{2}$, $2t+k=a$ ---① , 点D$(0,a)$とする.
$x+y-k=0$, FD=DH より $\sqrt{t^2+(t-a)^2}=\frac{|a-k|}{\sqrt{2}}=\frac{|2t|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}|t|$ (∵①より)
$t^2+(t-a)^2=2t^2$, $t^2+t^2-2at+a^2=2t^2$, $a^2=2at$ ∴ $t=\frac{a}{2}$, $k=a-2t=0$
よって 焦点F$\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$, 準線$l$は$y=-x$

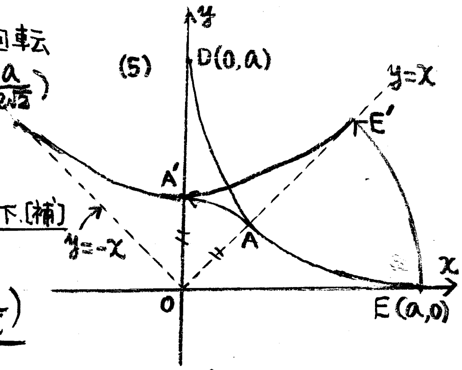


(5) 放物線Cの軸 $y=x$ を原点Oを中心として、左回りに $\frac{\pi}{4}$ 回転させたものが y 軸だから $OA=OA'=\frac{a}{4}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}a}{4}=q\left(=\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)$

点 $E(a,0)$ を $\frac{\pi}{4}$ 回転させた点 $E'\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ は、$y=px^2+q$ 上にあるので $\frac{a}{\sqrt{2}}=p\cdot\frac{a^2}{2}+q=\frac{a^2}{2}p+\frac{\sqrt{2}a}{4}$

$\frac{a^2}{2}p+\frac{a}{2\sqrt{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $\frac{a}{2}p+\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{a}{2}p=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $p=\frac{1}{\sqrt{2}a}$

よって、放物線C'は $\underline{y=\frac{1}{\sqrt{2}a}x^2+\frac{a}{2\sqrt{2}}\ \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\leqq x\leqq\frac{a}{\sqrt{2}}\right)}$



(6) $S=2\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}a}x^2+\frac{a}{2\sqrt{2}}-x\right)dx=2\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{2}a}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2dx\overset{※}{=}\frac{\sqrt{2}}{a}\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3\right]_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}$

$=\frac{\sqrt{2}}{3a}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3=\frac{a^2}{6}$ （∵※は、放物線C'と $y=x$ は、点 $E'\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ で接している。）

(7) 平面 $z=t\ (0\leqq t\leqq a)$ で切った立体の切り口の面積を $S(t)$ とする

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}-\sqrt{t}=\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{t})^2}$、この面積 $S(t)$ は、(2)で求めたSの a のかわりに $(\sqrt{a}-\sqrt{t})^2$ を入れるとよいから、

$S(t)=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{t})^4}{6}$、微小体積 $\Delta V=S(t)\Delta t$ だから、

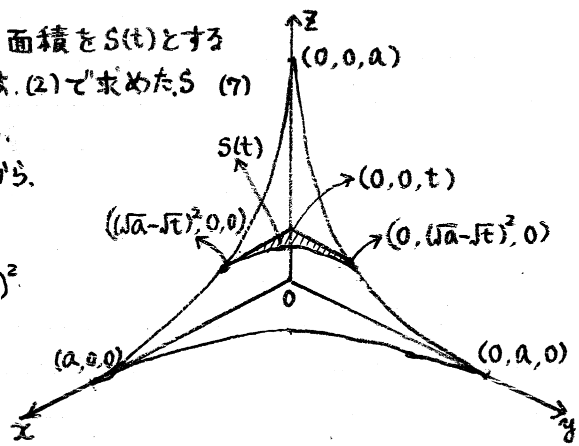
$V=\int_0^a S(t)dt=\frac{1}{6}\int_0^a(\sqrt{a}-\sqrt{t})^4dt$

$\sqrt{a}-\sqrt{t}=u$ とおく。$\sqrt{t}=\sqrt{a}-u$, $t=(\sqrt{a}-u)^2$

$\frac{dt}{du}=2(\sqrt{a}-u)\cdot(-1)$ 　 $\begin{array}{c|c} t & 0\to a \\ \hline u & \sqrt{a}\to 0\end{array}$

$V=\frac{1}{6}\int_{\sqrt{a}}^0 u^4\cdot2(\sqrt{a}-u)\cdot(-1)du$

$=\frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{a}}(\sqrt{a}u^4-u^5)du=\frac{1}{3}\left[\frac{\sqrt{a}}{5}u^5-\frac{1}{6}u^6\right]_0^{\sqrt{a}}=\frac{1}{3}\left(\frac{a^3}{5}-\frac{a^3}{6}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^3}{30}=\underline{\frac{a^3}{90}}$



[補] $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$、両辺を2乗して $x+y+2\sqrt{x}\sqrt{y}=a$、$2\sqrt{x}\sqrt{y}=a-x-y$、更に2乗して、
$4xy=a^2+x^2+y^2-2ax+2xy-2ay$ ∴ $x^2-2xy+y^2-2ax-2ay+a^2=0$ この2次曲線の一部が $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ である。2次曲線の判別式を用いると $\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot1=0$ だから、放物線であることがわかります。(2)、(7)の面積S、S(t)なども置換積分を利用しましょう。(6)の※には、注意です。
点 $E(a,0)$ は、端点ですが、連続にしてしまうと $f'(a)=0$ であり、x 軸は、接線であることがわかります。
したがって放物線C'の接線は、$y=x$ (接点 $E'\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$)。$\underline{(5)注}$、点 $E'\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ における接線 $y=x$ の傾き1、$y'=2px$ から $2p\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}=1$ ∴ $p=\frac{1}{\sqrt{2}a}$ のようにもできます。

- 2次曲線 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ の判別式 $D=b^2-4ac$ について
$D<0$ のとき楕円、$D=0$ のとき放物線、$D>0$ のとき双曲線です。しかし、例えば $x^2+4xy+4y^2-3=0$ のとき判別式 $\frac{D}{4}=2^2-1\cdot4=0$ だから放物線とはなりません。$(x+2y)^2-3=(x+2y+\sqrt{3})(x+2y-\sqrt{3})=0$ であり、2直線 $x+2y\pm\sqrt{3}=0$ となるようなこともあります。

[類1] θが全ての実数をとってかわるとき、次の(1),(2),を証明して、(3)は、適当な数値で□をうめよ。

(1) $0 \leqq \sin^2\theta\cos^2\theta \leqq \frac{1}{4}$　(2) $\frac{1}{4} \leqq \sin^6\theta+\cos^6\theta \leqq 1$　(3) $\square \leqq \sin^8\theta+\cos^8\theta \leqq \square$

[考] (1) $a=\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{4\sin^2\theta\cos^2\theta}{4}=\frac{(2\sin\theta\cos\theta)^2}{4}=\frac{\sin^2 2\theta}{4}$

(2), (3) $\sin^6\theta+\cos^6\theta=k$, $\sin^8\theta+\cos^8\theta=l$ をaで表す。aの2次関数となります。

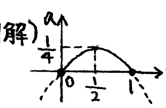
(1),(2),(3) 全て $\sin^2\theta=t$, $0\leqq t\leqq 1$ とおいて、tの関数にする。

[解] (1) $a=\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{4\sin^2\theta\cos^2\theta}{4}=\frac{(2\sin\theta\cos\theta)^2}{4}=\frac{\sin^2 2\theta}{4}$, $\sin^2 2\theta=4a$, $0\leqq\sin^2 2\theta\leqq 1$ だから

$0\leqq 4a\leqq 1$ ∴ $0\leqq a\leqq\frac{1}{4}$, $0\leqq\sin^2\theta\cos^2\theta\leqq\frac{1}{4}$

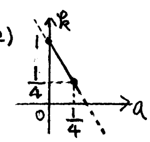
(別解) $\sin^2\theta=t$ とおく。$0\leqq t\leqq 1$, $a=\sin^2\theta\cos^2\theta=\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)=t(1-t)=-t^2+t=-(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$

右グラフより $0\leqq a\leqq\frac{1}{4}$ ∴ $0\leqq\sin^2\theta\cos^2\theta\leqq\frac{1}{4}$

(別解)


(2) $k=\sin^6\theta+\cos^6\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^3-3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=1-3a$

(1)より $0\leqq a\leqq\frac{1}{4}$ だから右グラフより $\frac{1}{4}\leqq k\leqq 1$ ∴ $\frac{1}{4}\leqq\sin^6\theta+\cos^6\theta\leqq 1$

(2)


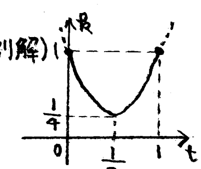
(別解) $\sin^2\theta=t$, $0\leqq t\leqq 1$ とおく。

$k=\sin^6\theta+\cos^6\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^3-3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=1-3\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=1-3t(1-t)=3t^2-3t+1=3(t-\frac{1}{2})^2-\frac{3}{4}+1=3(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$

右グラフより $\frac{1}{4}\leqq k\leqq 1$ ∴ $\frac{1}{4}\leqq\sin^6\theta+\cos^6\theta\leqq 1$

(補) $k=(\sin^2\theta)^3+(\cos^2\theta)^3=(\sin^2\theta)^3+(1-\sin^2\theta)^3=t^3+(1-t)^3=1-3t+3t^2=3t^2-3t+1$

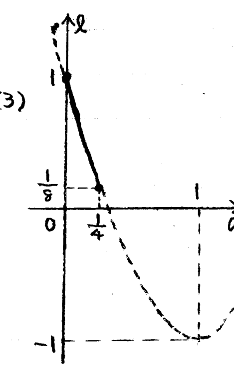
(2)(別解)


(3) $l=\sin^8\theta+\cos^8\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^4\theta+\cos^4\theta)$

$=1\cdot k-a\{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta\}=(1-3a)-a(1-2a)=2a^2-4a+1$

$=2(a-1)^2-1$, (1)より $0\leqq a\leqq\frac{1}{4}$

右グラフより $\frac{1}{8}\leqq l\leqq 1$ ∴ $\boxed{\frac{1}{8}}\leqq\sin^8\theta+\cos^8\theta\leqq\boxed{1}$

(3)


[補] $m=\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-2a$, $0\leqq a\leqq\frac{1}{4}$

ですから $1-\frac{2}{4}\leqq m\leqq 1$ ∴ $\frac{1}{2}\leqq m\leqq 1$

$\sin^{2n}\theta+\cos^{2n}\theta=f_n(\theta)$ $(n=2,3,4,\cdots)$ は $\frac{1}{2^{n-1}}\leqq f_n(\theta)\leqq 1$ となります。

Vol.Ⅲ 理系微積 P.47の(2)も参考にして下さい

$f(\theta)=\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$, $\sin\theta+\cos\theta=a$, $\sin\theta\cos\theta=b$ とおけば、

$a^2=1+2b$, $b=\frac{a^2-1}{2}$, $f(\theta)=a^3-3ba=a^3-3\cdot\frac{a^2-1}{2}\cdot a=\frac{2a^3-3a^3+3a}{2}=\frac{-a^3+3a}{2}=g(a)$

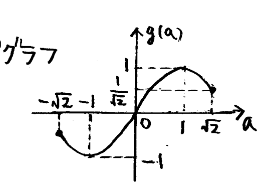
$a=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$ ∴ $-\sqrt{2}\leqq a\leqq\sqrt{2}$, $g'(a)=\frac{-3a^2+3}{2}=\frac{-3(a+1)(a-1)}{2}$

$g(-a)=\frac{-(-a)^3+3(-a)}{2}=\frac{a^3-3a}{2}=-g(a)$ だからたて軸対称のグラフ。$0\leqq a\leqq\sqrt{2}$ でグラフ

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(a)$	+	+	0	−	−
$f(a)$	0	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

右グラフより $-1\leqq g(a)\leqq 1$

すなわち $-1\leqq\sin^3\theta+\cos^3\theta\leqq 1$



Vol III

[類2] $0 \leqq x < 2\pi$ のとき $f_n(x) = \sin^n x + \cos^n x$ (nは3以上の整数)とする.
(1) $f_3(x)$, $f_4(x)$ の範囲を定めよ　(2) $f_n(x)$ の範囲を定めよ

[考] $\sin^5\theta = \cos^5\theta\ (0 \leqq \theta < 2\pi) \Leftrightarrow \tan^5\theta = 1 \Leftrightarrow (\tan\theta - 1)(\tan^4\theta + \tan^3\theta + \tan^2\theta + \tan\theta + 1) = 0 \Leftrightarrow \tan\theta = 1$
$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$,　$\sin^6\theta = \cos^6\theta\ (0 \leqq \theta < 2\pi) \Leftrightarrow \tan^6\theta = 1, \Leftrightarrow \tan^3\theta = \pm 1 \Leftrightarrow \tan\theta = 1$ or $\tan\theta = -1$
$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$　ガウス平面上で. $x^5 = 1$, $x^6 = 1$ の実数解ということです.

[解](1) • $f_3(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$, $f_3'(x) = 3\sin^2 x\cos x - 3\cos^2 x\sin x = 3\sin x\cos x(\sin x - \cos x) = 0$
$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$,　$\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$　端点 $f_3(0) = 1$, ($f_3(2\pi) = 1$)
以外の点で極大 or 極小である. $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, $f(\pi) = -1$, $f(\frac{3}{2}\pi) = -1$, $f(\frac{\pi}{4}) = (\frac{1}{\sqrt{2}})^3 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$f(\frac{5}{4}\pi) = (-\frac{1}{\sqrt{2}})^3 + (-\frac{1}{\sqrt{2}})^3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ だから $\underline{-1 \leqq f_3(x) \leqq 1}$ ($0 \leqq x < 2\pi$ では, $f_n(x)$ が連続は自明)

• $f_4(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$. $f_4'(x) = 4\sin^3 x\cos x - 4\cos^3 x\sin x = 4\sin x\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x) = 0$
$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$, $\sin^2 x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \tan^2 x = 1 \Leftrightarrow \tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$,
端点 $f_4(0) = 1$, ($f_4(2\pi) = 1$) 以外の点で極大 or 極小である. $f_4(\frac{\pi}{2}) = 1$, $f_4(\pi) = 1$, $f_4(\frac{3}{2}\pi) = 1$,
$f_4(\frac{\pi}{4}) = (\frac{1}{\sqrt{2}})^4 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^4 = \frac{1}{2}$, $f_4(\frac{3}{4}\pi) = (\frac{1}{\sqrt{2}})^4 + (-\frac{1}{\sqrt{2}})^4 = \frac{1}{2}$, $f_4(\frac{5}{4}\pi) = (-\frac{1}{\sqrt{2}})^4 + (-\frac{1}{\sqrt{2}})^4 = \frac{1}{2}$
$f_4(\frac{7}{4}\pi) = (-\frac{1}{\sqrt{2}})^4 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^4 = \frac{1}{2}$　だから $\underline{\frac{1}{2} \leqq f_4(x) \leqq 1}$

(補) 数Iの解は, Vol. I. P.147の(3)にあります.

(2) (i) $n = 2m$ ($m = 2, 3, \cdots$) のとき $f_{2m}(x) = \sin^{2m} x + \cos^{2m} x$, $f_{2m}'(x) = 2m\sin^{2m-1} x\cos x - 2m\cos^{2m-1} x\sin x$
$= 2m\sin x\cos x(\sin^{2m-2} x - \cos^{2m-2} x) = 0$ を解けば, $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$. $\sin^{2m-2} x - \cos^{2m-2} x = 0$ は
$\tan^{2m-2} x = 1 \Leftrightarrow \tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$, $f_{2m}(0) = 1$, $f_{2m}(\frac{\pi}{2}) = 1$, $f_{2m}(\pi) = 1$, $f_{2m}(\frac{3}{2}\pi) = 1$
$f_{2m}(\frac{\pi}{4}) = (\frac{1}{\sqrt{2}})^{2m} + (\frac{1}{\sqrt{2}})^{2m} = \frac{2}{2^m} = \frac{1}{2^{m-1}}$, $f_{2m}(\frac{3}{4}\pi) = (\frac{1}{\sqrt{2}})^{2m} + (-\frac{1}{\sqrt{2}})^{2m} = \frac{1}{2^{m-1}}$, $f_{2m}(\frac{5}{4}\pi) = (-\frac{1}{\sqrt{2}})^{2m} + (-\frac{1}{\sqrt{2}})^{2m} = \frac{1}{2^{m-1}}$
$f_{2m}(\frac{7}{4}\pi) = (-\frac{1}{\sqrt{2}})^{2m} + (\frac{1}{\sqrt{2}})^{2m} = \frac{1}{2^{m-1}}$ ($f_{2m}(2\pi) = 1$) よって, 波線部のうち, 最も小さいものと最も大きいものを
選んで, 求める範囲は, $\underline{n\text{が偶数}(4, 6, 8, \cdots)\text{のとき}\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}} \leqq f_n(x) \leqq 1}$

(ii) $n = 2m+1$ ($m = 1, 2, \cdots$) のとき $f_{2m+1}(x) = \sin^{2m+1} x + \cos^{2m+1} x$, $f_{2m+1}'(x) = (2m+1)\sin^{2m} x\cos x - (2m+1)\cos^{2m} x\sin x$
$= (2m+1)\sin x\cos x(\sin^{2m-1} x - \cos^{2m-1} x) = 0$ を解けば. $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$, $\sin^{2m-1} x - \cos^{2m-1} x = 0$ は
$\tan^{2m-1} x = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$,　$f_{2m+1}(0) = 1$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, $f_{2m+1}(\pi) = -1$, $f_{2m+1}(\frac{3}{2}\pi) = -1$,
$f_{2m+1}(\frac{\pi}{4}) = (\frac{1}{\sqrt{2}})^{2m+1} + (\frac{1}{\sqrt{2}})^{2m+1} = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot 2^m} = \frac{\sqrt{2}}{2^m} < 1$, $f_{2m+1}(\frac{5}{4}\pi) = (-\frac{1}{\sqrt{2}})^{2m+1} + (-\frac{1}{\sqrt{2}})^{2m+1} = -\frac{\sqrt{2}}{2^m} > -1$
よって, 波線部のうち, 最も小さいものと, 最も大きいものを選んで $\underline{n\text{が奇数}(3, 5, \cdots)\text{のとき}\ -1 \leqq f_n(x) \leqq 1}$

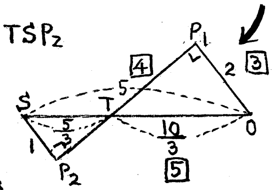
[類3] α,β,γ が $0\leqq\alpha\leqq2\pi$, $0\leqq\beta\leqq2\pi$, $0\leqq\gamma\leqq2\pi$ をみたして独立にかわって動くとき
$f(\alpha,\beta,\gamma)=\dfrac{\sin\alpha+2\sin\beta+3\sin\gamma}{\cos\alpha+2\cos\beta+3\cos\gamma+10}$ の最大値,最小値とそのときの $(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $(\cos\beta,\sin\beta)$,
$(\cos\gamma,\sin\gamma)$ の値を求めよ. [解]は P.146の(3)ウ その前に 例1, 例2

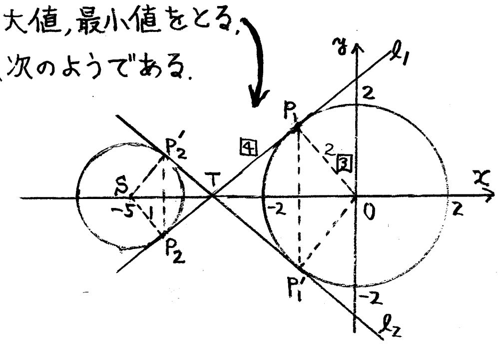
[考] 例1 α,β が $0\leqq\alpha\leqq2\pi$, $0\leqq\beta\leqq2\pi$ をみたして,独立にかわるとき,$f(\alpha,\beta)=\dfrac{\sin\alpha+2\sin\beta}{\cos\alpha+2\cos\beta+5}$
の最大値,最小値と,そのときの $(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $(\cos\beta,\sin\beta)$ の値を求めよ.

(カイ1) $f(\alpha,\beta)=\dfrac{2\sin\beta-(-\sin\alpha)}{2\cos\beta-(-\cos\alpha-5)}$, $(2\cos\beta,2\sin\beta)=(x_1,y_1)$, $(-\cos\alpha-5,-\sin\alpha)=(x_2,y_2)$
とおけば,$f(\alpha,\beta)=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k$ となるので,k の値は,点 (x_1,y_1) と点 (x_2,y_2) を通る直線の傾きとなる. $x_1^2+y_1^2=4$, $(x_2+5)^2+y_2^2=1$, を (x,y) 平面上に図示する.
右図の内接線,l_1, l_2 のときのそれぞれの傾き k が,最大値,最小値をとる.

- 最大値(接線 l_1 の傾き)について,図形をとり出せば,次のようである.

直角三角形 TOP_1 ∽ 直角三角形 TSP_2
相似比 $2:1$
$TO=5\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{10}{3}$, $TS=\dfrac{5}{3}$
直角三角形 TOP_1 の辺の比
$TO:OP_1=\dfrac{10}{3}:2=10:6=5:3$
より,直線 l_1 の傾き $\tan\angle P_1TO=\dfrac{3}{4}$ が最大値となる.



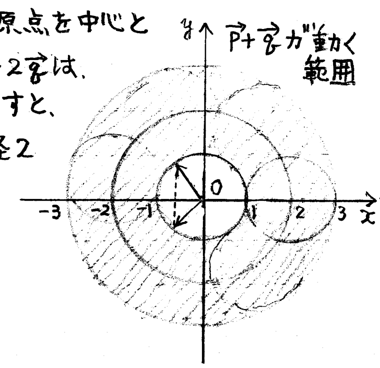


このとき接点 $P_1(x_1,y_1)$ は,$x_1=-(2\times\frac{3}{5})=2\cos\beta$, $y_1=2\times\frac{4}{5}=2\sin\beta$, $\therefore(\cos\beta,\sin\beta)=(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$
接点 $P_2(x_2,y_2)$ は,$x_2=-5+\frac{3}{5}=-\cos\alpha-5$, $y_2=-\frac{4}{5}=-\sin\alpha$ $\therefore(\cos\alpha,\sin\alpha)=(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$

- 最小値(接線 l_2 の傾き)について,最大値との対称性を利用する.

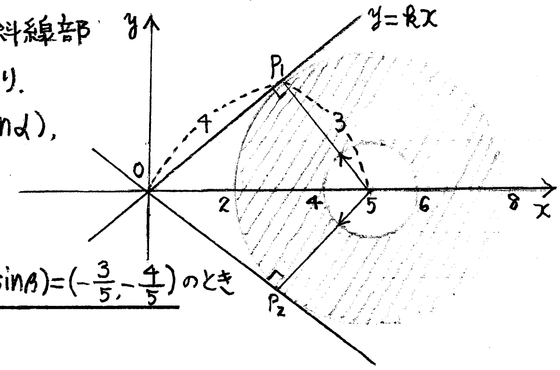
求める最小値は,l_2 の傾き $-\tan\angle P_1'TO=-\dfrac{3}{4}$
このとき接点 $P_1'(x_1,y_1)$ は $x_1=-(2\times\frac{3}{5})=2\cos\beta$, $y_1=-2\times\frac{4}{5}=2\sin\beta$ $\therefore(\cos\beta,\sin\beta)=(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$
接点 $P_2'(x_2,y_2)$ は $x_2=-5+\frac{3}{5}=-\cos\alpha-5$, $y_2=\frac{4}{5}=-\sin\alpha$ $\therefore(\cos\alpha,\sin\alpha)=(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$

(カイ2) $\cos\alpha+2\cos\beta+5=x$, $\sin\alpha+2\sin\beta=y$, とおけば,$f(\alpha,\beta)=\dfrac{y}{x}=k$ の最大,最小となる.
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}\cos\beta\\\sin\beta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ とおいて,(x,y) の存在領域を図示する.
$\vec{p}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}\cos\beta\\\sin\beta\end{pmatrix}$ とおく.$\vec{p}$ は単位円周上を動く.$2\vec{q}$ は,原点を中心とする半径2の円周上を動く.今点 $2\vec{q}$ を点 $(2,0)$ で固定すると,$\vec{p}+2\vec{q}$ は,点 $(2,0)$ を中心とする半径1の円周上を動く.点 $2\vec{q}$ を徐々に動かすと,$\vec{p}+2\vec{q}$ は,原点を中心とする半径1の円と原点を中心とする半径2の円の間の円環状の部分を動くことになる.以下,次頁



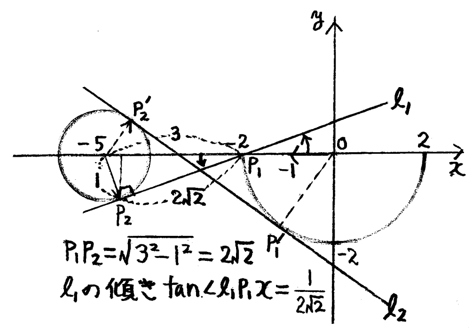
(補) $2\vec{q}+\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ は,点 $(5,0)$ を中心とする半径2の円周上を動く.
これに $\vec{p}$ をたす.のように考える方が,わかりやすいです.
皆さんは,このように考えて,次頁の領域を求めて下さい.

(カイ.2)の続き $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$=(円環状の部分)$+\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ だから、$\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$平行移動して、下の円環状の部分を動く、
すなわち点$(5,0)$を中心とする半径1の円と点$(5,0)$を中心とする半径3の円の間の円環状の部分である。
$\frac{y}{x}=k$ の最大値, 最小値は、直線 $y=kx$ (kは傾き)と斜線部との交点を考えて、点P_1で接するとき、傾きkが最大となり、
求める**最大値**は、$k=\tan\angle P_1Ox=\underline{\frac{3}{4}}$, このときの$(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $(\cos\beta,\sin\beta)$の値は、右図、矢印のvectorであり、$\underline{(\cos\alpha,\sin\alpha)=(\cos\beta,\sin\beta)=\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)}$ のとき
求める**最小値**は、同様に $k=\underline{-\frac{3}{4}}$, $\underline{(\cos\alpha,\sin\alpha)=(\cos\beta,\sin\beta)=\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)}$のとき

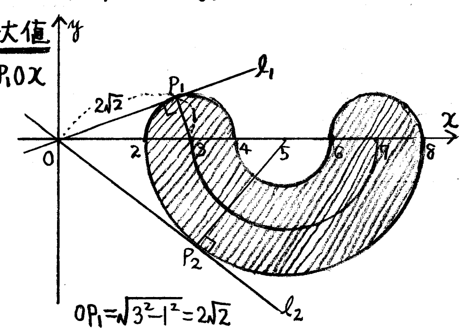


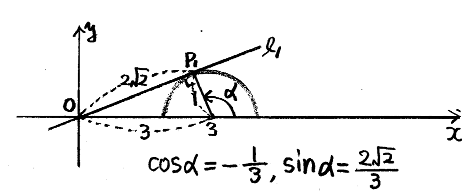
(例.2) (例.1)のα,βの範囲を $0\leqq\alpha\leqq2\pi$, $\pi\leqq\beta\leqq2\pi$ とすると、どうなるか

(カイ.1) (例.1)と同様に、右図のようになる。
最大値は、P_1P_2の傾き$=\underline{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$
このとき $-\cos\alpha-5=-5+\frac{1}{3}$, $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$, $-\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$
$\therefore\ \underline{(\cos\alpha,\sin\alpha)=\left(-\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right),\ (\cos\beta,\sin\beta)=(-1,0)}$
最小値は、(例.1)と同じであり、$\underline{-\frac{3}{4}}$,
$\underline{(\cos\alpha,\sin\alpha)=(\cos\beta,\sin\beta)=\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)}$



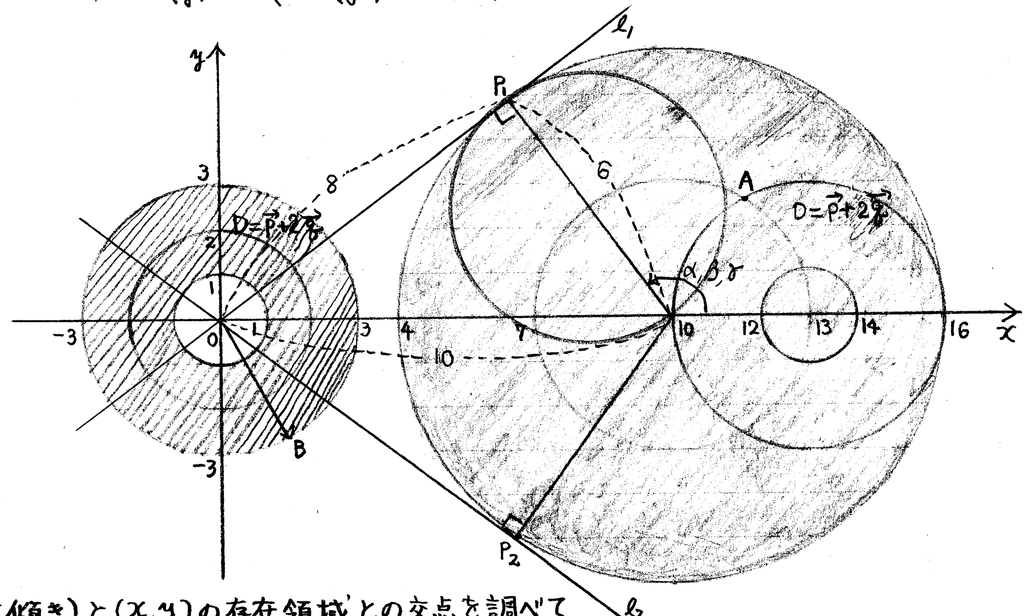
(カイ.2) $\cos\alpha+2\cos\beta+5=x$, $\sin\alpha+2\sin\beta=y$ $(0\leqq\alpha\leqq2\pi,\ \pi\leqq\beta\leqq2\pi)$ とおけば、$f(\alpha,\beta)=\frac{y}{x}=k$ の最大、最小となる。$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}\cos\beta\\\sin\beta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ とおいて、(x,y)の存在領域を図示する。
$\vec{p}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}$ $(0\leqq\alpha\leqq2\pi)$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}\cos\beta\\\sin\beta\end{pmatrix}$ $(\pi\leqq\beta\leqq2\pi)$ とおく。$\vec{p}$は原点を中心とする単位円周上を動く。
$2\vec{q}$は、原点を中心とする半径2の円のx軸以下の部分を動く。$2\vec{q}+\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$は、点$(5,0)$を中心とする半径2の円の$x$軸以下の部分を動く。これに、$\vec{p}$をたすと、図の斜線部が$(x,y)$の存在領域Dとなる。
$y=kx$ (傾きk)と領域Dが交わる最大のkが求めるkの**最大値**となる。直線l_1(接点P_1)のときであるから、このときの傾き$\tan\angle P_1Ox$
$=\underline{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$ $\underline{(\cos\alpha,\sin\alpha)=\left(-\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)}$, $2\vec{q}+\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\cos\beta\\\sin\beta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$
$\underline{(\cos\beta,\sin\beta)=(-1,0)}$
最小値は、(例.1)の(カイ.2)と同じであり $\underline{-\frac{3}{4}}$
$\underline{(\cos\alpha,\sin\alpha)=(\cos\beta,\sin\beta)=\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)}$





[類.3]の[考] 例1, 例2 の(カイ.2)を用います. P.146の(3)ア(カイ.2)(補)のように, どのような順でvectorの和を考えますが, たいした差はないようですが------

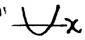
[解] $\cos\alpha+2\cos\beta+3\cos\gamma+10=x$, $\sin\alpha+2\sin\beta+3\sin\gamma=y$ とおく. $f(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{y}{x}=k$ の最大値,最小値を求める. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}\cos\beta\\\sin\beta\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}\cos\gamma\\\sin\gamma\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}$ とおいて, 点(x,y)の存在範囲を図示して, 直線$y=kx$と交点がある傾きkの最大値,最小値を求める. $\vec{p}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}\cos\beta\\\sin\beta\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}\cos\gamma\\\sin\gamma\end{pmatrix}$ $0\leqq\alpha,\beta,\gamma\leqq2\pi$, とおく. $\vec{p}$は,原点を中心とする半径1の円周上を動き, $2\vec{q}$は,原点を中心とする半径2の円周上を動く. $\vec{p}+2\vec{q}$が動く範囲を求める. $2\vec{q}$を$(2,0)$で固定すると, $\vec{p}+2\vec{q}$は, 点$(2,0)$を中心とする半径2の円である. $2\vec{q}$が表す円上の点を徐々に動かして, $\vec{p}+2\vec{q}$を求めると, $\vec{p}+2\vec{q}$は,原点を中心とする半径3の円と原点を中心とする半径1の円の間の円環状の斜線部分Dを動く. $3\vec{r}+\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}$は,点$(10,0)$を中心とする半径3の円周上を動く. よって $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=D+\left(3\vec{r}+\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}\right)$ は,点$(10,0)$を中心とする半径6の円の内部及び周上を動く.

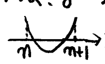


$y=kx$ (kは傾き)と(x,y)の存在領域との交点を調べて.
求めるkの**最大値**は, $y=kx$が, 直線l_1(接点P_1)のときであり, 傾き$k=\tan\angle P_1Ox=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$
このとき $(\cos\alpha,\sin\alpha)=(\cos\beta,\sin\beta)=(\cos\gamma,\sin\gamma)=\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$
kの**最小値**は, 対称性より $-\frac{3}{4}$ $(\cos\alpha,\sin\alpha)=(\cos\beta,\sin\beta)=(\cos\gamma,\sin\gamma)=\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$

[補] 例えば, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\0\end{pmatrix}$ (このとき$k=0$)となるα,β,γの1つを考えます. まず図形上のvectorで考えます. $\gamma=\frac{\pi}{3}$ とします. $3\vec{r}+\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}$ を表す点A, $\alpha=\beta=\frac{5}{3}\pi$ とすると, $\vec{p}+2\vec{q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ を表す点B(解の図にかきこんだ点A,点B). $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}13\\0\end{pmatrix}$の筈ですが, 計算します. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\0\end{pmatrix}$ となり一致します. このときの $f(\alpha,\beta,\gamma)$ を計算すると $f\left(\frac{5}{3}\pi,\frac{5}{3}\pi,\frac{\pi}{3}\right)=\frac{0}{13}=0$ のように確かに一致します.

[類2] P, q を素数とする. $f(x)=x^2+Px+q=0$ が, 次の2つの条件(A), (B) をみたすとき, $f(x)$ を求めよ.
条件(A) ある実数 a に対して $f(a)<0$, (B) 任意の整数 n に対して $f(n)\geqq 0$

[考] 条件(A)は, $y=f(x)$ のグラフが  x となっているということ

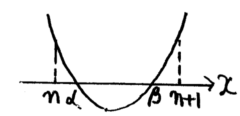
(B)は  x, $f(n)=0$, $f(n+1)=0$ でもよい. すなわち, 異なる2つの実数解 $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ のとき $0<\beta-\alpha\leqq 1$,

[解] 条件(A)より $f(x)=0$ は, 異なる2つの実数解 $\alpha=\dfrac{-P-\sqrt{P^2-4q}}{2}$, $\beta=\dfrac{-P+\sqrt{P^2-4q}}{2}$ をもつから, $P^2-4q>0$ ---①

条件(B)より $0<\beta-\alpha\leqq 1$ $\therefore 0<\sqrt{P^2-4q}\leqq 1$, $0<P^2-4q\leqq 1$

P^2-4q は整数だから, $P^2-4q=1$

$q=2$(素数) ならば, $P^2=9$, $P=3$(素数) となって題意に適する.



$P=2$ (素数) のとき $4q=3$, $q=\dfrac{3}{4}$ となり, 不適.

P を 5以上の素数とすると, P は奇数だから, $P=2n+1$ $(n=2,3,---)$ とおける.

$(2n+1)^2-4q=1$, $4q=(2n+1)^2-1=(2n+1+1)(2n+1-1)=4n(n+1)$ $\therefore q=n(n+1)$

$n(n+1)$ は連続する整数の積だから偶数であり, q が素数ということはない

したがって $(P, q)=(3, 2)$ $\therefore f(x)=x^2+3x+2$

(問) $0\leqq x\leqq \pi$ のとき 連立方程式 $11\cos x+\sqrt{3}\sin x=y\cos x$ ---①, $\sqrt{3}\cos x+13\sin x=y\sin x$ ---② を解け.

(考) 先に何を消去するかです.

(解) ① $\times \sin x$ より $11\sin x\cos x+\sqrt{3}\sin^2 x=y\sin x\cos x$ ---①′

② $\times \cos x$ より $\sqrt{3}\cos^2 x+13\sin x\cos x=y\sin x\cos x$ ---②′

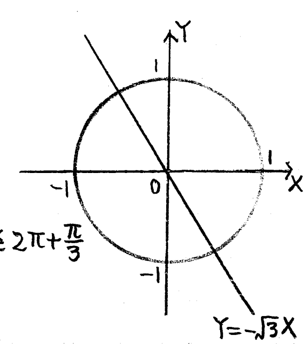
②′ − ①′ より $2\sin x\cos x+\sqrt{3}(\cos^2 x-\sin^2 x)=0$, $\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=0$, ※(補)

$\cos 2x=X$, $\sin 2x=Y$ とおいて $Y+\sqrt{3}X=0$ と $X^2+Y^2=1$ ($0\leqq x\leqq\pi$ より $0\leqq 2x\leqq 2\pi$) の交点を調べる. 右図より, $2x=\dfrac{2}{3}\pi$ or $\dfrac{5}{3}\pi$ $\therefore x=\dfrac{\pi}{3}$ or $\dfrac{5}{6}\pi$

(i) $x=\dfrac{\pi}{3}$ のとき ① に入れて $\dfrac{11}{2}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{y}{2}$ $y=14$

(ii) $x=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき ① に入れて $-\dfrac{11\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y$, $-11+1=-y$, $y=10$

$\therefore (x, y)=\left(\dfrac{\pi}{3}, 14\right), \left(\dfrac{5}{6}\pi, 10\right)$



※(補) 合成すると $2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0$, $0\leqq x\leqq\pi$, $0\leqq 2x\leqq 2\pi$, $\dfrac{\pi}{3}\leqq 2x+\dfrac{\pi}{3}\leqq 2\pi+\dfrac{\pi}{3}$

$2x+\dfrac{\pi}{3}=\pi$ or 2π, $2x=\dfrac{2}{3}\pi$ or $\dfrac{5}{3}\pi$, $x=\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5}{6}\pi$ 以下同様

(補) $\cos x\begin{pmatrix}11\\\sqrt{3}\end{pmatrix}+\sin x\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\13\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}\cos x\\\sin x\end{pmatrix}$, 両辺に $\begin{pmatrix}\sin x\\-\cos x\end{pmatrix}$ との内積を利用して

$\cos x\begin{pmatrix}11\\\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin x\\-\cos x\end{pmatrix}+\sin x\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin x\\-\cos x\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}\cos x\\\sin x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin x\\-\cos x\end{pmatrix}=0$ のようにできます.