[類] (1) x軸に垂直な軸をもつ2次関数Cの接線が任意の実数kで $y=2kx-k^2$ のとき、2次関数Cを定め、そのときの接点Pの座標をkで表せ.

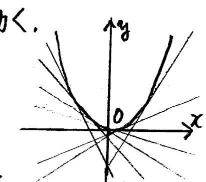
(2) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき、xについての2次方程式 $x^2-2(\cos\theta)x+\sin\theta=0$ の実数解αがとりえる値の範囲を求めよ

[考] (1)(その1)とすれば、数Iの重要基本問題です. (2) (1)を用います.

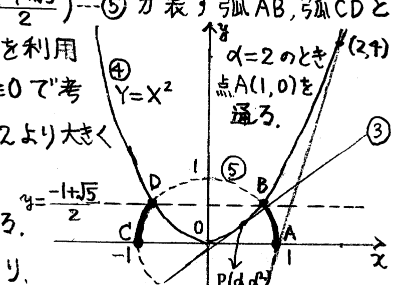
[解] (1)(その1) 2次関数Cを $y=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ ---① とおく. $y=2kx-k^2$ が①の接線だから、
$ax^2+bx+c=2kx-k^2$, $ax^2+(b-2k)x+c+k^2=0$ の判別式 $D=(b-2k)^2-4a(c+k^2)=0$
$(4-4a)k^2-4bk+b^2-4ac=0$ これが、任意の実数kで成立するから $4-4a=0$, かつ $4b=0$ かつ $b^2-4ac=0$ ∴ $a=1$ かつ $b=0$ かつ $c=0$ ∴求める2次関数Cは $y=x^2$
このときの接点Pは、$y=x^2$ と $y=2kx-k^2$ を解くことにより、$P(k, k^2)$

(その2) 2次関数Cを $y=f(x)=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ とおく. C上の点$(t, f(t))$ $(f(t)=at^2+bt+c)$ における接線の式は、$f'(x)=2ax+b$ だから、$y=(2at+b)(x-t)+at^2+bt+c=(2at+b)x-at^2+c$
これが、$y=2kx-k^2$ と一致するから $2at+b=2k$ ---① かつ $-at^2+c=-k^2$ ---② $a \neq 0$ から
①より $t=\frac{2k-b}{2a}$ を②に代入 $(-a)\cdot\frac{4k^2-4bk+b^2}{4a^2}+c=-k^2$, $-(4k^2-4bk+b^2)+4ac=-4ack^2$
$(4-4ac)k^2-4bk+b^2-4ac=0$, これが任意の実数kで成立するから $4-4ac=0$ かつ $4b=0$ かつ $b^2-4ac=0$, ∴ $b=0$, $ac=0$, $a \neq 0$ から $c=0$ ①,②より $at=k$, $at^2=k^2$, $a\cdot\frac{k^2}{a^2}=k^2$
$(a-1)k^2=0$, ∴ $a=1$ ∴求める2次関数Cは $y=x^2$
このときの接点Pは、$y=x^2$ と $y=2kx-k^2$ を解くことにより、$P(k, k^2)$

(その3) $k^2-2xk+y=0$, kは実数なので、判別式 $\frac{D}{4} \geqq 0$, $x^2-y \geqq 0$, ∴ $y \leqq x^2$ すなわち任意の実数kが動くとき、直線 $y=2kx-k^2$ は 2次関数 $y=x^2$ を境界にして、下側を動く.
$y=x^2$ が包絡線であり、(k, k^2)が接点となる. ∴求める2次関数は $y=x^2$



(2) $x^2-2(\cos\theta)x+\sin\theta=0$, $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ ---①, xは実数なので、判別式 $\frac{D}{4} \geqq 0$
$\cos^2\theta-\sin\theta \geqq 0$※, $1-\sin^2\theta-\sin\theta \geqq 0$, $\sin^2\theta+\sin\theta-1 \leqq 0$, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqq \sin\theta \leqq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ であるが、
$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より $0 \leqq \sin\theta \leqq 1$, ∴ $0 \leqq \sin\theta \leqq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ---② すなわち ②の範囲でのθ(但し、$0 \leqq \theta \leqq \pi$)のとき①の実数解αが存在する. $\cos\theta=X$, $\sin\theta=Y$ とおく. $Y=2\alpha X-\alpha^2$, $\left(0 \leqq Y \leqq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ ---③
(1)より、直線③は、$Y=X^2$ ---④ と接点$P(\alpha, \alpha^2)$で接する直線である. $\sin\theta=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ は、※より $Y=X^2$ をみたすので、$Y=X^2$上の点$\left(\pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$である. $X^2+Y^2=1$ $\left(0 \leqq Y \leqq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ ---⑤ が表す弧$\overset{\frown}{AB}$, 弧$\overset{\frown}{CD}$と直線③が交点をもてば、θが存在し、実数αが存在する. 右図、グラフを利用して、直線③の接点$P(\alpha, \alpha^2)$を動かして、傾き2αを、対称性から $X \geqq 0$ で考える. 点$A(1,0)$を通るとき、$0=2\alpha-\alpha^2$, $\alpha(\alpha-2)=0$ ∴ $\alpha=0, 2$, αが2より大きくなると、弧$\overset{\frown}{AB}$と交わらない. ∴ $0 \leqq \alpha \leqq 2$, $X \leqq 0$ の場合を入れて、
求める、実数解αがとりえる値の範囲は、$-2 \leqq \alpha \leqq 2$ $(|\alpha| \leqq 2)$ である.



(補) もしも、設問のθの範囲が $0 \leqq \theta < 2\pi$ ならば $-1 \leqq \sin\theta \leqq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ となり、
直線③が、円⑤に接するとき、円の中心$(0,0)$から直線③までの距離＝半径1 を用いて $|\alpha| \leqq \sqrt{2+\sqrt{5}}$

[類2] 座標平面上の曲線Cは、媒介変数tを用いて、$x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$ $(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2})$ と表されている
曲線Cのy軸に平行な接線をℓとし、曲線C, 直線ℓおよびx軸で囲まれる図形をDとする.
(1) 直線ℓの方程式を求めよ、
(2) 正の実数α, βに対し、次の2つの不定積分を求めよ. $I=\int e^{\alpha t}\cos\beta t\,dt$, $J=\int e^{\alpha t}\sin\beta t\,dt$
(3) Dをx軸のまわりに1回転させてできる立体の体積Vの値を求めよ

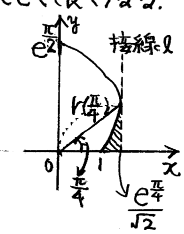
[考] 曲線Cは、パラメータ表示ですが、$r(t)=e^t$ とすれば、極方程式です.グラフの概形はすぐにかけます.
(1) y軸に平行な接線ℓの傾き $\frac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ は、存在しないので $\frac{dx}{dt}=0$ です.
(2) どちらも、部分積分を1回すれば------有名です.
(3) $V=\pi\int y^2dx$ ですが----パップスギュルダンの原理を用いるとわりと楽にできます.更にI, Jのまとめ、

[解] 点 $P(x,y)=(e^t\cos t, e^t\sin t)$ は、$OP=r(t)=e^t$, $\angle xOP=t$ とおくことができる. $r'(t)=e^t>0$ であり、
$r(t)$ は、$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ では、増加である.すなわち、$\angle xOP$ が大きくなるにつれて、$OP(=r(t))$ は、大きく(長く)なる.

(1) 接線ℓの傾き $\frac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ は、存在しない $(\pm\infty)$ ので、$\frac{dx}{dt}=0$,

$\frac{dx}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t=-\sqrt{2}e^t\sin(t-\frac{\pi}{4})=0$, $0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ より $t=\frac{\pi}{4}$

∴ 直線ℓは、$\underline{x=e^{\frac{\pi}{4}}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}}$



(2) $I=\frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\sin\beta t-\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha t}\sin\beta t\,dt=\frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\sin\beta t-\frac{\alpha}{\beta}J$ -----①

$\begin{pmatrix} p=e^{\alpha t}, & q'=\cos\beta t \\ p'=\alpha e^{\alpha t}, & q=\frac{1}{\beta}\sin\beta t \end{pmatrix}$

$J=-\frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\cos\beta t+\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha t}\cos\beta t\,dt=-\frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\cos\beta t+\frac{\alpha}{\beta}I$ ----②

$\begin{pmatrix} u=e^{\alpha t}, & v'=\sin\beta t \\ u'=\alpha e^{\alpha t}, & v=-\frac{1}{\beta}\cos\beta t \end{pmatrix}$

②より、Jを①に代入 $I=\frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\sin\beta t-\frac{\alpha}{\beta}\left(-\frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\cos\beta t+\frac{\alpha}{\beta}I\right)$

$(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2})I=\frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\sin\beta t+\frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha t}\cos\beta t$, $(\alpha^2+\beta^2)I=\beta e^{\alpha t}\sin\beta t+\alpha e^{\alpha t}\cos\beta t$

$\underline{I=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}(\beta e^{\alpha t}\sin\beta t+\alpha e^{\alpha t}\cos\beta t)+C_1}$

①より、Iを②に代入 $J=-\frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\cos\beta t+\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\sin\beta t-\frac{\alpha}{\beta}J\right)$

$(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2})J=-\frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\cos\beta t+\frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha t}\sin\beta t$, $(\alpha^2+\beta^2)J=-\beta e^{\alpha t}\cos\beta t+\alpha e^{\alpha t}\sin\beta t$

$\underline{J=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha e^{\alpha t}\sin\beta t-\beta e^{\alpha t}\cos\beta t)+C_2}$ $\left(=\int e^{\alpha t}\sin\beta t\,dt\right)$

(3) 図形 の微小面積 $\Delta S=\frac{1}{2}(r(t))^2\Delta t$, 重心 $G\left(\frac{2x+\Delta x}{3}, \frac{2y+\Delta y}{3}\right)$

x軸まわりの回転体の微小体積 $\Delta V_1=\frac{1}{2}(r(t))^2\Delta t\times 2\pi\left(\frac{2y+\Delta y}{3}\right)$

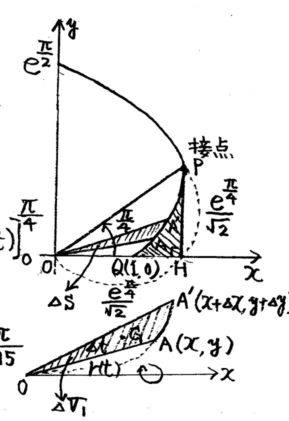
2次近似の $\Delta t\times\Delta y$ は、消去できるので、Δt を残して $\Delta V_1=\frac{2\pi}{3}(r(t))^2y\Delta t$

$\therefore V_1=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{2t}\cdot e^t\sin t\,dt=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{3t}\sin t\,dt=\frac{2\pi}{3}\left[\frac{1}{3^2+1^2}(3e^{3t}\sin t-e^{3t}\cos t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{10}\left(3\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)=\frac{\pi}{15}(\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}+1)$

$\therefore \underline{V}=\pi\cdot\left(\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\left(\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{3}-V_1=\frac{\pi}{6\sqrt{2}}e^{\frac{3\pi}{4}}-\frac{\sqrt{2}\pi}{15}e^{\frac{3\pi}{4}}-\frac{\pi}{15}=\sqrt{2}\pi e^{\frac{3\pi}{4}}\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{15}\right)-\frac{\pi}{15}$

$\underline{=\frac{\sqrt{2}\pi}{60}e^{\frac{3\pi}{4}}-\frac{\pi}{15}}$ (円錐から の回転体をひいた)



オイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, $S=\frac{1}{2}\int(r(t))^2dt$, $S=\frac{1}{2}\int\left|x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right|dt$

[証明I] $f(\theta)=\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{e^{i\theta}}$ とおく. $f'(\theta)=\dfrac{1}{(e^{i\theta})^2}\{(-\sin\theta+i\cos\theta)e^{i\theta}-ie^{i\theta}(\cos\theta+i\sin\theta)\}$

$=\dfrac{1}{(e^{i\theta})^2}\cdot e^{i\theta}\cdot(-\sin\theta+i\cos\theta-i\cos\theta+\sin\theta)=\dfrac{1}{e^{i\theta}}\times 0=0$

よって $f(\theta)$ は定数. $f(0)=1$ $\therefore \dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{e^{i\theta}}=1$ $\therefore e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

[証明II] マクローリン展開 (P.3, P.220 参照)

$$\begin{cases} e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots\cdots & \cdots ① \\ \sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots\cdots & ② \\ \cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots\cdots & ③ \end{cases}$$

①において $x=i\theta$ とおいて, 実部, 虚部の和にすると,

$e^{i\theta}=1+\frac{1}{1!}i\theta-\frac{1}{2!}\theta^2-\frac{1}{3!}i\theta^3+\frac{1}{4!}\theta^4+\frac{1}{5!}i\theta^5-\cdots\cdots$

$=(1-\frac{1}{2!}\theta^2+\frac{1}{4!}\theta^4-\frac{1}{6!}\theta^6+\cdots)+i(\frac{1}{1!}\theta-\frac{1}{3!}\theta^3+\frac{1}{5!}\theta^5-\cdots\cdots)\cdots$ ㋑

②, ③に θ を入れると ㋑ は $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ であることがわかる.

$I=\int e^{\alpha t}\cos\beta t\,dt$, $J=e^{\alpha t}\sin\beta t\,dt$, について (オイラーの公式を用いる.)

$I+iJ=\int e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)dt=\int e^{\alpha t}\cdot e^{i\beta t}dt=\int e^{(\alpha+i\beta)t}dt$ $(\because \cos\beta t+i\sin\beta t=e^{i\beta t})$

$=\dfrac{1}{\alpha+i\beta}e^{(\alpha+i\beta)t}+C=\dfrac{1}{\alpha+i\beta}e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)+C$

$=\dfrac{\alpha-i\beta}{\alpha^2+\beta^2}\cdot e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)+C=\dfrac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}\cdot(\alpha-i\beta)(\cos\beta t+i\sin\beta t)+C$

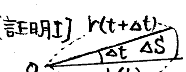
$=\dfrac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}\{(\alpha\cos\beta t+\beta\sin\beta t)+i(\alpha\sin\beta t-\beta\cos\beta t)\}+C$

よって, 実部, 虚部を比較して

$I=\dfrac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta t+\beta\sin\beta t)+C_1$, $J=\dfrac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta t-\beta\cos\beta t)+C_2$

$S=\frac{1}{2}\int(r(t))^2dt$ について

[証明I]

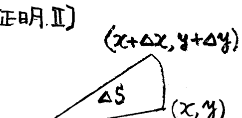


[証明I] $\Delta S=\frac{1}{2}r(t+\Delta t)\times r(t)\times\sin\Delta t=\frac{1}{2}\{(r(t+\Delta t)-r(t))r(t)+(r(t))^2\}\Delta t$

$=\frac{1}{2}\cdot\underline{\dfrac{r(t+\Delta t)-r(t)}{\Delta t}\cdot r(t)(\Delta t)^2}+\frac{1}{2}(r(t))^2\Delta t$, $\Delta t\to 0$ のとき波線部 $\frac{1}{2}r'(t)r(t)(\Delta t)^2\to 0$

よって $\Delta S=\frac{1}{2}(r(t))^2\Delta t$ $\therefore S=\frac{1}{2}\int(r(t))^2dt$

[証明.II]



[証明II] $\Delta S=\frac{1}{2}|x(y+\Delta y)-y(x+\Delta x)|=\frac{1}{2}|x\Delta y-y\Delta x|$

$$\begin{cases} x=r(t)\cos t,\ \frac{dx}{dt}=r'(t)\cos t-r(t)\sin t & \Delta x=(r'(t)\cos t-r(t)\sin t)\Delta t \\ y=r(t)\sin t,\ \frac{dy}{dt}=r'(t)\sin t+r(t)\cos t & \Delta y=(r'(t)\sin t+r(t)\cos t)\Delta t \end{cases}$$

$\therefore \Delta S=\frac{1}{2}|r(t)\cos t\times(r'(t)\sin t+r(t)\cos t)\Delta t-r(t)\sin t\times(r'(t)\cos t-r(t)\sin t)\Delta t|$

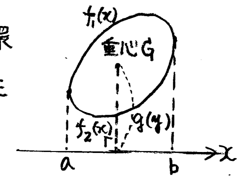
$=\frac{1}{2}|(r(t))^2\cos^2t+(r(t))^2\sin^2t|\Delta t=\frac{1}{2}(r(t))^2\Delta t$ $\therefore S=\frac{1}{2}\int(r(t))^2dt$

$S=\frac{1}{2}\int\left|x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right|dt$ について (ガウス・グリーンの定理) (P.166 参照)

$\Delta S=\frac{1}{2}|x(y+\Delta y)-y(x+\Delta x)|=\frac{1}{2}|x\Delta y-y\Delta x|=\frac{1}{2}\left|x\frac{\Delta y}{\Delta t}-y\frac{\Delta x}{\Delta t}\right|\Delta t$ $\therefore S=\frac{1}{2}\int\left|x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right|dt$

パップス・ギュルダンの定理 $V=2\pi g(y)S$　$2\pi g(y)$は円周, S面積

断面積S, 長さlのやわらかい物質(ゴムなど)でできた円柱を、端を合わせて円環にすると、この円環の体積$V=Sl$であろうと予想できる. 逆に、円環を、切って、円柱にすると、切り口の円の中心(重心)を通る長さがlの円柱になると考えられる. $V=Sl$



例1 右図、台形ABCDの重心Gの座標を求めよ

(カイ) △OABの重心$G_1(2,\frac{4}{3})$, △OABの面積$S_1=3$

△OBCの重心$G_2(1,\frac{8}{3})$, △OBCの面積$S_2=\frac{15}{2}$

台形OABCの重心$G(x,y)$, 台形OABCの面積$S=\frac{21}{2}$　　$G(\frac{9}{7},\frac{16}{7})$

y軸まわりのモーメントについて、

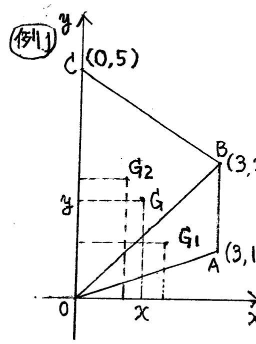
△OABは、$2S_1$, △OBCは$1\cdot S_2$, 台形OABCは$x\times S$.

∴ $xS=2S_1+1\cdot S_2$, $x\times\frac{21}{2}=2\times3+1\times\frac{15}{2}=\frac{27}{2}$, ∴ $x=\frac{27}{21}=\frac{9}{7}$

x軸まわりのモーメントについて

△OABは$\frac{4}{3}\times S_1$, △OBCは$\frac{8}{3}\times S_2$, 台形OABCは$y\times S$

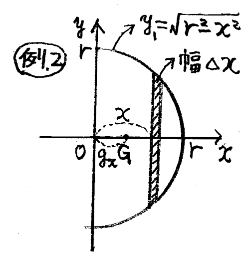
∴ $yS=\frac{4}{3}\times3+\frac{8}{3}\times\frac{15}{2}=4+20=24$, $y\times\frac{21}{2}=24$ ∴ $y=\frac{16}{7}$



(補) 図形が曲線になると、このようには、できません. パップス・ギュルダンの定理を用いると、y軸まわりの回転体の体積V_1について $V_1=2\pi x\times S$ = 円柱＋2つの円錐 $=\pi\cdot3^2\cdot2+\pi\cdot3^2\cdot(2+1)\cdot\frac{1}{3}$

これを解けば、重心Gのx座標が求まります. x軸まわりの回転体の体積V_2についても同じようにできます.

例2 右図, 半円の重心$G(g_x,0)$を求めよ、半径rとする.



(カイ) 微小長方形の面積 $2\sqrt{r^2-x^2}\cdot\Delta x$

y軸まわりのモーメント $x\times2\sqrt{r^2-x^2}\cdot\Delta x$

このモーメントを0からrまでたすと(積分) $\int_0^r 2x\sqrt{r^2-x^2}\,dx$

半円の面積をSとすると、モーメントはg_xS　∴ $g_xS=2\int_0^r x\sqrt{r^2-x^2}\,dx$

2πをかけると、$2\pi g_x\times S=2\times2\pi\int_0^r x\sqrt{r^2-x^2}\,dx=V$ (波線部の積分は、バウムクーヘン法による半球の体積), $2\pi g_x$は、重心Gがy軸まわりに回転したときの円周の長さ ∴ $2\pi g_x\times S=V$

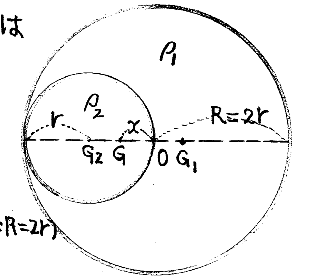
$2\pi g_x\times\frac{\pi r^2}{2}=\frac{4\pi r^3}{3}$, ∴ $g_x=\frac{4r}{3\pi}$

(補) パップスギュルダンの定理を証明する手順を示した解としました

(注) パップスギュルダンの定理は、回転軸が図形を切るときは、使えません。図形が回転軸の外側にあるとき使えます.

(例1.3) 下の(問)を物理モーメントを用いて解け、更に、パップスギュルダンの定理を応用して解け、

(問) 密度ρ_1でできている半径Rのうすい円盤から、図のように半径rの円盤をくりぬきかわりに密度ρ_2 ($\rho_2>\rho_1$)、半径rの円盤をうめこんだ。この円盤の重心は中心Oから、どの距離にあるか。r, ρ_1, ρ_2で表せ、



(カイ) 小円盤をくりぬく前の三ケ月形の図形の重心をG_1とする

モーメントより、$\pi(R^2-r^2)\rho_1\times OG_1=\pi r^2\rho_1\times r$, $3r^2\times OG_1=r^3$ $\therefore OG_1=\frac{r}{3}$ ($\because R=2r$)

密度ρ_2 ($\rho_2>\rho_1$)の小円盤をうめこんだあとの求める重心Gの位置が中心Oから、左にxの距離にあるとする。

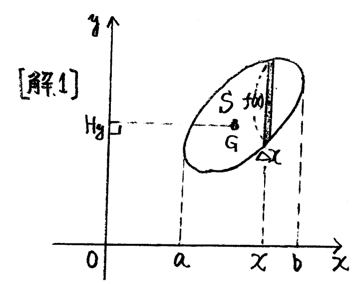
モーメントは、$\pi(R^2-r^2)\rho_1\times(x+OG_1)=\pi r^2\rho_2(r-x)$, $3r^2\rho_1(x+OG_1)=r^2\rho_2(r-x)$ ($\because R=2r$)

$3\rho_1(x+\frac{r}{3})=\rho_2(r-x)$, $3\rho_1x+r\rho_1=r\rho_2-\rho_2x$, $(3\rho_1+\rho_2)x=r(\rho_2-\rho_1)$

$\therefore x=\frac{\rho_2-\rho_1}{3\rho_1+\rho_2}r$ (>0) ($\because \rho_2>\rho_1$)　$\therefore$ 中心Oから左に $\frac{\rho_2-\rho_1}{3\rho_1+\rho_2}r$ のところにある。

定理の応用による(カイ)は、次頁下にあります。

パップス・ギュルダンの定理の証明



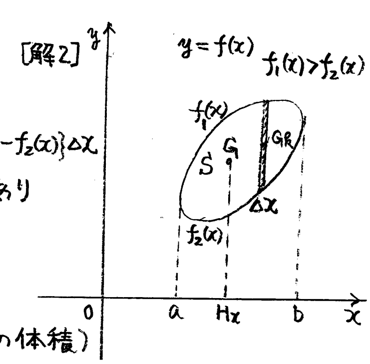
[解1] 右図形の重心G、面積Sとする。y軸まわりの回転を考える。

微小長方形の面積 $f(x)\Delta x$, y軸まわりのモーメントは $xf(x)\Delta x$

これをaからbまでたしたもの すなわち $\int_a^b xf(x)dx$ が全体のモーメント。

これが、モーメント $S\times GH_y$ に等しいので $S\times GH_y=\int_a^b xf(x)dx$

2πをかけると $(2\pi\times GH_y)\times S=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx=V$ (バウムクーヘン法による図形のy軸まわりの回転体の体積) よって証明できた



[解2] 右図形の重心G、面積Sとする。x軸まわりの回転を考える。

微小長方形の面積 $\{f_1(x)-f_2(x)\}\Delta x$, この微小長方形の重心$G_R$は

x軸から、$\frac{f_1(x)+f_2(x)}{2}$ の距離にある。このモーメントは $\frac{f_1(x)+f_2(x)}{2}\times\{f_1(x)-f_2(x)\}\Delta x$

このモーメントをaからbまでたしたも(積分)は、$\int_a^b\frac{(f_1(x))^2-(f_2(x))^2}{2}dx$ であり

これが、全体のモーメント $S\times GH_x$ に等しい。

$S\times GH_x=\int_a^b\frac{(f_1(x))^2-(f_2(x))^2}{2}dx$　両辺に2πをかけると、

$(2\pi\times GH_x)\times S=\pi\int_a^b\{(f_1(x))^2-(f_2(x))^2\}dx=V$ (教科書でいう回転体の体積)

よって証明できた。

極方程式 $r(\theta)$ による回転体の体積

x軸まわりの回転体の体積 $V_x=\frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta}(r(\theta))^3\sin\theta\,d\theta$ の証明

微小面積 $\Delta S=\frac{1}{2}(r(\theta))^2\sin\Delta\theta=\frac{1}{2}(r(\theta))^2\Delta\theta$ $(\because \sin\Delta\theta=\Delta\theta)$

微小図形の重心 $\left(\frac{2x+\Delta x}{3},\frac{2y+\Delta y}{3}\right)$

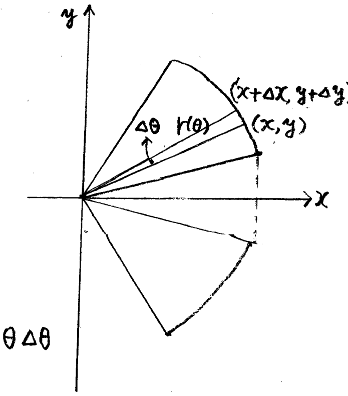
パップスギュルダンの定理より、x軸まわりの微小体積ΔVは

$\Delta V=\Delta S\times 2\pi\times\frac{2y+dy}{3}=\frac{1}{2}(r(\theta))^2\Delta\theta\times\left(\frac{4\pi}{3}y+\frac{2\pi}{3}\Delta y\right)$

$\Delta\theta\cdot\Delta y$ は、2次近似で0としてよい

よって $\Delta V=\frac{1}{2}(r(\theta))^2\Delta\theta\cdot\frac{4\pi}{3}y=\frac{2\pi}{3}(r(\theta))^2y\Delta\theta=\frac{2\pi}{3}(r(\theta))^2\cdot r(\theta)\sin\theta\Delta\theta$

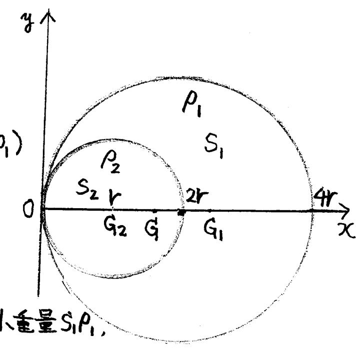
$\Delta V=\frac{2\pi}{3}(r(\theta))^3\sin\theta\Delta\theta$ $\therefore V=\frac{2\pi}{3}\int(r(\theta))^3\sin\theta\,d\theta$



y軸まわりの回転体については、yをxにかえて $\Delta V=\frac{2\pi}{3}(r(\theta))^2x\Delta\theta=\frac{2\pi}{3}(r(\theta))^3\cos\theta\Delta\theta$ だから

$V_y=\frac{2\pi}{3}\int(r(\theta))^3\cos\theta\,d\theta$

前頁 例3 (問)のパップスギュルダンの定理を用いた(カイ)です。



$S=S_1+S_2=4\pi r^2$, $S_2=\pi r^2$
$S_1=3\pi r^2$

- 小円盤をくりぬく前の三ケ月形の図形の重心G_1, 面積S_1, 微小重量$S_1\rho_1$
  小円盤の重心G_2, 面積S_2, 微小重量$S_2\rho_1$ (くりぬく前だから密度は同じρ_1)
  $S=S_1+S_2$ $\quad S\cancel{\rho_1}\times\cancel{2\pi}\cdot 2r=S_1\cancel{\rho_1}\times\cancel{2\pi}\cdot OG_1+S_2\cancel{\rho_1}\times\cancel{2\pi}\cdot r$,
  $S=4\pi r^2$, $S_1=3\pi r^2$, $S_2=\pi r^2$ を代入 $4\cancel{\pi}r^2\times 2r=3\cancel{\pi}r^2\cdot OG_1+\cancel{\pi}r^2\times r$
  $8r^3=3r^2\cdot OG_1+r^3$, $7r^3=3r^2\cdot OG_1$ $\therefore OG_1=\frac{7}{3}r$
- 密度ρ_2の小円盤をうめこんだあとの三ケ月形の図形の重心G_1, 面積S_1, 微小重量$S_1\rho_1$,
  小円盤の重心G_2, 面積S_2, 微小重量$S_2\rho_2$, 全体の重心G,
  $(S_1\rho_1+S_2\rho_2)\times\cancel{2\pi}\cdot OG=S_1\rho_1\times\cancel{2\pi}\cdot OG_1+S_2\rho_2\times\cancel{2\pi}\cdot OG_2$
  $S_1=3\pi r^2$, $S_2=\pi r^2$, $OG_1=\frac{7}{3}r$, $OG_2=r$ を代入
  $(3\pi r^2\rho_1+\pi r^2\rho_2)\times OG=\cancel{3}\pi r^2\rho_1\times\frac{7}{\cancel{3}}r+\pi r^2\rho_2\times r=7\pi\rho_1r^3+\pi\rho_2r^3$,
  $\pi r^2(3\rho_1+\rho_2)\times OG=\pi r^3(7\rho_1+\rho_2)$ $\therefore OG=\frac{7\rho_1+\rho_2}{3\rho_1+\rho_2}\cdot r$

したがって物理的には、大円の中心からは、$2r-\frac{7\rho_1+\rho_2}{3\rho_1+\rho_2}r=\frac{6\rho_1+2\rho_2-7\rho_1-\rho_2}{3\rho_1+\rho_2}\cdot r=\frac{\rho_2-\rho_1}{3\rho_1+\rho_2}r>0$ $(\because\rho_2>\rho_1)$

よって、元の大円の中心から、左に$\frac{\rho_2-\rho_1}{3\rho_1+\rho_2}r$のところに重心がうつる。

[類1] $a_n=(-1)^n(b_n+b_{n+1})$, $b_1=1$, $\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{n(n+1)}{2}$, で表される数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$の一般項を定めよ.

[考] まず, a_n, $(-1)^n=\frac{1}{(-1)^n}$ でもある

[解] $a_1=\sum_{k=1}^{1} a_1=\frac{1\cdot 2}{2}=1$, $\underline{a_n}=\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{n-1} a_k=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{(n-1)n}{2}=\frac{n\{(n+1)-(n-1)\}}{2}=\frac{2n}{2}=\underline{n}$ $(n=1,2,\cdots)$

$n=(-1)^n b_n+(-1)^n b_{n+1}=(-1)^n b_n-(-1)^{n+1} b_{n+1}$

$$\left.\begin{aligned}1&=(-1)^1 b_1-\cancel{(-1)^2 b_2}\\2&=\cancel{(-1)^2 b_2}-\cancel{(-1)^3 b_3}\\3&=\cancel{(-1)^3 b_3}-\cancel{(-1)^4 b_4}\\&\ \vdots\\+)\ n-1&=\cancel{(-1)^{n-1} b_{n-1}}-(-1)^n b_n\end{aligned}\right\}(n-1)\text{行}$$

$$\frac{(n-1)n}{2}=(-1)^1 b_1-(-1)^n b_n$$

$(-1)^n b_n=-1-\frac{(n-1)n}{2}$

$\underline{b_n}=\frac{1}{(-1)^n}\left\{-\frac{(n-1)n}{2}-1\right\}=(-1)^n\left\{-\frac{(n-1)n}{2}-1\right\}$

$=\underline{(-1)^{n+1}\left\{\frac{(n-1)n}{2}+1\right\}}$ $(n=1,2,\cdots)$

$b_1=(-1)^2\left\{\frac{0\cdot 1}{2}+1\right\}=1$

[補] $b_n+b_{n+1}=\frac{a_n}{(-1)^n}=\frac{n}{(-1)^n}=(-1)^n n$, $\frac{b_n}{(-1)^n}+\frac{b_{n+1}}{(-1)^n}=n$, $\frac{b_n}{(-1)^n}-\frac{b_{n+1}}{(-1)^{n+1}}=n$ のように変形してもよい

[類2] $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \cdots, a_n$ $(n=1,2,\cdots)$ の順に $1,1,2,2,3,3,\cdots$ である数列$\{a_n\}$の一般項a_n $(n=1,2,\cdots)$について,次の問いに答えよ.

(1) $\left[\frac{n}{2}\right]$と$\left[\frac{n-1}{2}\right]$ $(n=1,2,\cdots)$の値を考えることにより,a_nの一般項をガウス記号のついたnの式で表せ

(2) $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 \cdots b_n$ $(n=1,2,\cdots)$の順に $0,1,0,1,0,1,\cdots$ (0, 1 の repeat) である数列$\{b_n\}$の一般項b_n $(n=1,2,\cdots)$をガウス記号のついたnの式で表せ

(3) (2)の数列$\{b_n\}$の一般項b_n $(n=1,2,\cdots)$をガウス記号のつかないnの式で表せ

(4) 数列$\{a_n\}$の一般項a_n $(n=1,2,\cdots)$をガウス記号のつかないnの式で表せ

(5) $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ $(n=1,2,\cdots)$をガウス記号のつかないnの式で表せ

[考] (1) 表をつくる、証明しておく (2) (1)の表を利用 (3) 階差は等比数列ですが,少し考えると---
(4) (3)を利用します。 (5) (1),(4)の結果からです

例1 $-1\ +1\ -1\ +1\ \cdots$ $a_n=(-1)^n$ $(n=1,2,\cdots)$ (等比数列)

例2 $1,0,1,0,\cdots$ $a_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$ (階差は,例1ですが---) $\left(=\frac{1-(-1)^n}{2}\right)$

例3 $-1,\frac{3}{2},-1,\frac{3}{2},-1\cdots$

階差: $\frac{5}{2}\ \ -\frac{5}{2}\ \ \frac{5}{2}\ \ -\frac{5}{2}$

$\underline{a_n}=-1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{5}{2}(-1)^{k-1}=-1+\frac{5}{2}\cdot\frac{1\cdot\left(1-(-1)^{n-1}\right)}{1-(-1)}=-1+\frac{5-5\cdot(-1)^{n-1}}{4}=\underline{\frac{1+5\cdot(-1)^n}{4}}$ $(n=1,2,\cdots)$

[解] 次頁

[解] (1) 右表より $\underline{a_n=\left[\frac{n-1}{2}\right]+1=\left[\frac{n-1}{2}+1\right]=\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ $(n=1,2,\cdots)$

(i) $n=2m-1$ $(m=1,2,\cdots)$ のとき $a_{2m-1}=\left[\frac{2m-1+1}{2}\right]=m$

(ii) $n=2m$ $(m=1,2,\cdots)$ のとき $a_{2m}=\left[\frac{2m+1}{2}\right]=\left[m+\frac{1}{2}\right]=m$

(2) (1)の表より $\underline{b_n=\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ $(n=1,2,\cdots)$

(i) $n=2m-1$ $(m=1,2,\cdots)$ のとき $b_{2m-1}=\left[\frac{2m-1}{2}\right]-\left[\frac{2m-1-1}{2}\right]$

$=\left[m-1+\frac{1}{2}\right]-[m-1]=(m-1)-(m-1)=0$

(ii) $n=2m$ $(m=1,2,\cdots)$ のとき $b_{2m}=\left[\frac{2m}{2}\right]-\left[\frac{2m-1}{2}\right]=[m]-\left[m-1+\frac{1}{2}\right]$

$=m-(m-1)=1$

(1)

n	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\left[\frac{n-1}{2}\right]$
1	0	0
2	1	0
3	1	1
4	2	1
5	2	2
6	3	2
7	3	3
8	4	3

(3) $\underline{b_n=\frac{1+(-1)^n}{2}}$ $(n=1,2,\cdots)$ (階差を用いる迄もないでしょう) $\left(=\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n-1}{2}\right]\text{でもあります}\right)$

(4)

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} a_1 && a_2 && a_3 && a_4 && a_5 && a_6 && a_7 && a_8 \\ 1 && 1 && 2 && 2 && 3 && 3 && 4 && 4 \\ & 0 && 1 && 0 && 1 && 0 && 1 && 0 & \\ & b_1 && b_2 && b_3 && b_4 && b_5 && b_6 && b_7 & \end{array} \quad b_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cancel{a_2}-a_1=b_1=\frac{1}{2}(1+(-1)^1) \\ \cancel{a_3}-\cancel{a_2}=b_2=\frac{1}{2}(1+(-1)^2) \\ \cancel{a_4}-\cancel{a_3}=b_3=\frac{1}{2}(1+(-1)^3) \\ \quad\vdots \\ +)\ a_n-\cancel{a_{n-1}}=b_{n-1}=\frac{1}{2}(1+(-1)^{n-1}) \end{array}\right\}(n-1)\text{行}$$

$$a_n-a_1=\frac{1}{2}\left\{(n-1)+\frac{(-1)(1-(-1)^{n-1})}{1-(-1)}\right\}=\frac{1}{2}\left\{n-1+\frac{-1-(-1)^n}{2}\right\}=\frac{1}{2}\times\frac{2n-2-1-(-1)^n}{2}$$

$$\underline{a_n}=\frac{2n-3-(-1)^n}{4}+1=\underline{\underline{\frac{2n+1-(-1)^n}{4}}}\ (n=1,2,\cdots) \quad a_1=\frac{2\cdot1+1-(-1)^1}{4}=1$$

(3)

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} b_1 && b_2 && b_3 && b_4 && b_5 && b_6 && b_7 && b_8 \\ 0 && 1 && 0 && 1 && 0 && 1 && 0 && 1 \\ & 1 && -1 && 1 && -1 && 1 && -1 && 1 & \\ & c_1 && c_2 && c_3 && c_4 && c_5 && c_6 && c_7 & \end{array} \quad c_n=(-1)^{n-1}$$

$$\begin{array}{l} \cancel{b_2}-b_1=(-1)^0 \\ \cancel{b_3}-\cancel{b_2}=(-1)^1 \\ \quad\vdots \\ +)\ b_n-\cancel{b_{n-1}}=(-1)^{n-2} \\ \hline b_n-0=\frac{1-(-1)^{n-1}}{2}=\frac{1+(-1)^n}{2}\ (n=1,2,\cdots) \end{array}$$

(5) (1), (4) より $\underline{\left[\frac{n+1}{2}\right]=\frac{2n+1-(-1)^n}{4}}$ $(n=1,2,\cdots)$ (n は、すべての整数で成立します)

[補] $1\,1\,2\,2\,3\,3\cdots$ $a_n=\left[\frac{n+1}{2}\right]$, $1\,1\,1\,2\,2\,2\,3\,3\,3\cdots$ $a_n=\left[\frac{n+2}{3}\right]$※, $1\,1\,1\,1\,2\,2\,2\,2\,3\,3\,3\,3\cdots$ $a_n=\left[\frac{n+3}{4}\right]$

$0\,1\,0\,1\,0\,1\cdots$ $a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}=\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n-1}{2}\right]$☆, $1\,0\,1\,0\,1\,0\cdots$ $a_n=\frac{1-(-1)^n}{2}$●$=\left[\frac{n+1}{2}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]\left(=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\right)$

☆の n に $n+3$ を入れます $\frac{1+(-1)^{n+3}}{2}=\left[\frac{n+3}{2}\right]-\left[\frac{n+3-1}{2}\right]=\left[\frac{n+1}{2}+1\right]-\left[\frac{n}{2}+1\right]=\left[\frac{n+1}{2}\right]+1-\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$

$=\left[\frac{n+1}{2}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{1-(-1)^{n+1}}{2}$ となり●になります。(n に $n+1$ を入れたら当然です) ☆→● になる。

☆の n に $n-3$ を入れると、$\frac{1+(-1)^{n-3}}{2}=\frac{1+\frac{(-1)^n}{(-1)^3}}{2}=\frac{1-(-1)^n}{2}=\left[\frac{n-3}{2}\right]-\left[\frac{n-4}{2}\right]=\left[\frac{n-4+1}{2}\right]-\left[\frac{n-4}{2}\right]$

$=\left[\frac{n+1}{2}-2\right]-\left[\frac{n}{2}-2\right]=\left[\frac{n+1}{2}\right]-2-\left\{\left[\frac{n}{2}\right]-2\right\}=\left[\frac{n+1}{2}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]$ となり●になります。

※ $a_n=\left[\frac{n+2}{3}\right]$ の階差 $b_n=1+\omega^n+\omega^{2n}$ $(\omega^2+\omega+1=0,\ \omega^3=1)$ であり $a_n=\frac{1}{3}\left(n+1-\frac{\omega^n-\omega^{2n+1}}{1-\omega}\right)$ です。

[類] 正の整数nに対して、$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{2n-1}dx$ とおく.次の問いに答えよ

(1) I_1 の値を求めよ　(2) $I_{n+1}+I_n$ をnを用いて表せ.

(3) $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ のとき $0\leqq\tan x\leqq\frac{4}{\pi}x$ が成り立つことを示せ

(4) 極限値 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$ を求めよ

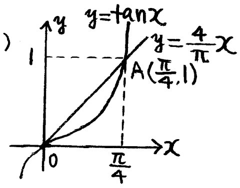
[考] 交代調和級数と呼ばれ、有名です. (4)はまず(2)を利用して、$-\log 2-2(-1)^{n+1}I_{n+1}$となります.
次に、(3)を用いてハサミウチです.

[解] (1) $\underline{I_1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\Big[-\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=-\log 2^{-\frac{1}{2}}=\underline{\underline{\frac{\log 2}{2}}}$

(2) $J_n=\underline{I_{n+1}+I_n}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{(\tan x)^{2n+1}+(\tan x)^{2n-1}\}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{2n-1}(\tan^2x+1)\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{2n-1}\cdot\frac{1}{\cos^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{2n-1}(\tan x)'dx=\Big[\frac{1}{2n}(\tan x)^{2n}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\underline{\frac{1}{2n}}$

(3)



$y=\tan x$は、$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ では下に凸であり、
点$A(\frac{\pi}{4},1)$と原点Oを結ぶ線分 $y=\frac{4}{\pi}x$ の下にある
$\therefore 0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ のとき $0\leqq\tan x\leqq\frac{4}{\pi}x$ が成り立つ

(4) (2)より $\frac{(-1)^k}{k}=2(-1)^k(I_{k+1}+I_k)=2\{(-1)^kI_{k+1}+(-1)^kI_k\}=2\{(-1)^kI_k-(-1)^{k+1}I_{k+1}\}$

$\frac{(-1)^1}{1}=2\{(-1)^1I_1-\cancel{(-1)^2I_2}\}$

$\frac{(-1)^2}{2}=2\{\cancel{(-1)^2I_2}-\cancel{(-1)^3I_3}\}$

$\vdots$

$+)\ \frac{(-1)^n}{n}=2\{\cancel{(-1)^nI_n}-(-1)^{n+1}I_{n+1}\}$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}=2\{-I_1-(-1)^{n+1}I_{n+1}\}=-\log 2-2(-1)^{n+1}I_{n+1}$ ----①

(3)より $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ のとき $0\leqq(\tan x)^{2n+1}\leqq\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n+1}x^{2n+1}$,

$0\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{2n+1}dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n+1}x^{2n+1}dx=\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n+1}\Big[\frac{1}{2n+2}x^{2n+2}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2n+2}\cdot\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n+1}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2}$

$=\frac{1}{2n+2}\cdot\left(\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8(n+1)}$, $\therefore 0\leqq I_{n+1}\leqq\frac{\pi}{8(n+1)}\to 0$ ($n\to\infty$ のとき)

ハサミウチの原理により、$\lim_{n\to\infty}I_{n+1}=0$

よって ①から $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}=\underline{-\log 2}$

[補] $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(\frac{2}{2}+\frac{2}{4}+\frac{2}{6}+\cdots+\frac{2}{2n}\right)$

$=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\to\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$

$\therefore\Big[\log|1+x|\Big]_0^1=\log 2$, $+\frac{1}{2n+1}$ があるとき、$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$ だから、やはり $\log 2$ に収束　($n\to\infty$ のとき)

減衰曲線の界限

$\boxed{1}$ $x \geqq 0$ における関数 $y=f(x)=e^{-x}\sin x$ について、次の問いに答えよ

(1) 閉区間 $[0, 2\pi]$ における $y=f(x)$ のグラフをかけ、凹凸も調べる

(2) $f(x)$ と $f(x+\pi)$ の関係を調べ、(1)のグラフを基準にして、$x \geqq 0$ における $y=f(x)$ のグラフの特性を調べて、$x \geqq 0$ における $y=f(x)$ のグラフのかき方をのべよ。

(3) 閉区間 $[(n-1)\pi, n\pi]$ ($n=1,3,\cdots$ 奇数)において、$y=e^{-x}$ と $y=f(x)$ の接点を P_n とする。P_n の座標を求めて、点 P_n における接線の式を求めよ

(4) 閉区間 $[(n-1)\pi, n\pi]$ ($n=1,2,\cdots$) において $y=f(x)$ と x 軸で囲まれる面積を S_n とする。$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k$ を求めよ。

[解] (1) $f(x)=e^{-x}\sin x$, $f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=-e^{-x}(\sin x-\cos x)=-\sqrt{2}\,e^{-x}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

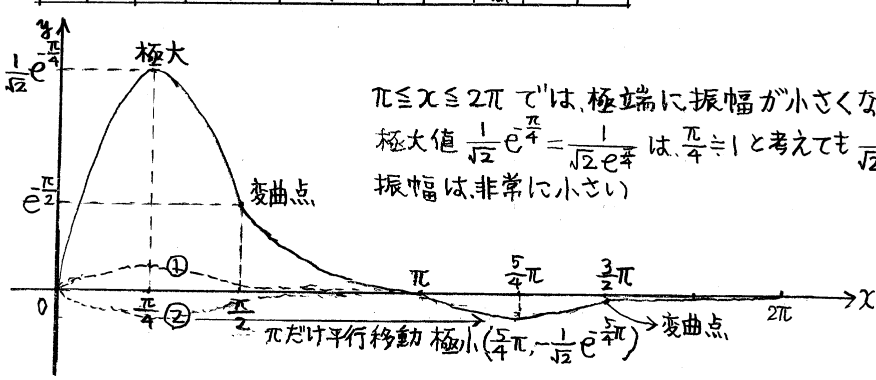
$$f''(x)=-\sqrt{2}\left\{-e^{-x}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+e^{-x}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=\sqrt{2}\,e^{-x}\left\{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$
$$=2e^{-x}\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

x	0	…	$\frac{\pi}{4}$	…	$\frac{\pi}{2}$	…	$\frac{5}{4}\pi$	…	$\frac{3}{2}\pi$	…	2π
$f'(x)$	$f'(0)$	+	0	−	−	−	0	+	+	+	$f'(2\pi)$
$f''(x)$	$f''(0)$	−	−	−	0	+	+	+	0	−	$f''(2\pi)$
$f(x)$	$f(0)$	↗	極大	↘	変曲点	↘	極小	↗	変曲点	↗	$f(2\pi)$

極大値 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$

極小値 $f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5}{4}\pi}$

変曲点 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}$, $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-e^{-\frac{3}{2}\pi}$



$\pi \leqq x \leqq 2\pi$ では、極端に振幅が小さくなることがわかる。

極大値 $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$ は、$\frac{\pi}{4}\fallingdotseq 1$ と考えても $\frac{1}{\sqrt{2}\cdot e}\fallingdotseq\frac{1}{4}$ であり、極小値の振幅は、非常に小さい

(2) $f(x+\pi)=e^{-x-\pi}\sin(x+\pi)=-e^{-\pi}\cdot e^{-x}\sin x=-e^{-\pi}f(x)=-\frac{1}{e^{\pi}}f(x)$　(1)のグラフ参照

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ では、$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で、$y=f(x)$ を y 軸方向に $\frac{1}{e^{\pi}}$ したグラフ①をかく。グラフ①を x 軸対称に折ったグラフ②をかく。グラフ②を x 軸方向に π だけ平行移動すると $\pi \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲での $y=f(x)$ のグラフとなる。同様に、$\pi \leqq x \leqq 2\pi$ のグラフを利用して、$2\pi \leqq x \leqq 3\pi$ での $f(x)$ のグラフがかける。このようにして、次々とグラフがかける。$2\pi \leqq x$ の範囲では、振幅が非常に小さくなり、グラフをかくのは、difficultという度合では、ないことがわかる。(不可能)

(3) 接点を$(\alpha, e^{-\alpha})$とおく. $e^{-\alpha}=e^{-\alpha}\sin\alpha$, $\sin\alpha=1$ ∴ $\alpha=(n-1)\pi+\frac{\pi}{2}=n\pi-\frac{\pi}{2}$ ($n=1,3,\cdots$奇数)

$y=e^{-x}$, $y'=-e^{-x}$ また $y=e^{-x}\sin x$, $y'=-e^{-x}(\sin x-\cos x)$ であるから, $x=\alpha$における接線の傾きは, $-e^{-\alpha}=-e^{-\alpha}(\sin\alpha-\cos\alpha) \Leftrightarrow \sin\alpha-\cos\alpha=1 \Leftrightarrow \sin(n\pi-\frac{\pi}{2})-\cos(n\pi-\frac{\pi}{2})=1$ (n奇数)

$\Leftrightarrow 1-0=1$ (成立), よって 接点$\underline{P_n(n\pi-\frac{\pi}{2}, e^{\frac{\pi}{2}-n\pi})}$ $\underline{(n=1,3,\cdots奇数)}$

接線は, $\underline{y}=-e^{-\alpha}(x-\alpha)+e^{-\alpha}=-e^{-\alpha}x+e^{-\alpha}(\alpha+1)=\underline{-e^{\frac{\pi}{2}-n\pi}x+e^{\frac{\pi}{2}-n\pi}(n\pi-\frac{\pi}{2}+1)\ (n=1,3,奇数)}$

(4) (2)より, $S_{n+1}=\frac{1}{e^{\pi}}S_n$ であり, Sは, 初項S_1, 公比$\frac{1}{e^{\pi}}=r$ $(0<r<1)$である無限等比級数.

$S_1=\int_0^{\pi}e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}[e^{-x}(\sin x+\cos x)]_0^{\pi}=-\frac{1}{2}\{e^{-\pi}(-1)-e^0\}=\frac{e^{-\pi}+1}{2}=\frac{e^{\pi}+1}{2e^{\pi}}$

$$\left(\begin{array}{l} I=\int e^{-x}\sin x\,dx,\ J=\int e^{-x}\cos x\,dx \text{ とおく.} \\ I=-e^{-x}\cos x-J,\ J=e^{-x}\sin x+I \\ I=-e^{-x}\cos x-(e^{-x}\sin x+I),\ 2I=-e^{-x}(\sin x+\cos x) \\ I=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x) \end{array}\right)$$

$u=e^{-x}$, $v'=\sin x$
$u'=-e^{-x}$, $v=-\cos x$

$s=e^{-x}$, $t'=\cos x$
$s'=-e^{-x}$, $t=\sin x$

よって $\underline{S}=S_1\times\frac{1}{1-r}=\frac{e^{\pi}+1}{2e^{\pi}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{e^{\pi}}}=\underline{\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}}$

[補] (3)の接点は, $y=f(x)$の$y>0$の部分の変曲点, $y=-e^{-x}$と$y=f(x)$の接点は$y<0$の部分の変曲点,
$-1\leqq\sin x\leqq1$, $e^{-x}(>0)$をかけて $-e^{-x}\leqq e^{-x}\sin x\leqq e^{-x}$, $-e^{-x}\leqq f(x)\leqq e^{-x}$ だから, $y=f(x)$ は $y=-e^{-x}$ と $y=e^{-x}$のグラフの間におさまっている.

② $S=\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}\lvert e^{-x}\sin x\rvert dx$ を求めよ

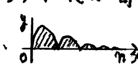
[解] $e^{-x}>0$ なので $S_n=\int_0^{n\pi}e^{-x}|\sin x|\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-x}|\sin x|\,dx$ ※, $x=(k-1)\pi+t$ とおく. $dx=dt$ $\begin{array}{c|c} x & (k-1)\pi\to k\pi \\ \hline t & 0\to\pi \end{array}$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}e^{-(k-1)\pi-t}|\sin\{(k-1)\pi+t\}|\,dt=\sum_{k=1}^{n}e^{\pi}\cdot\left(\frac{1}{e^{\pi}}\right)^k\int_0^{\pi}e^{-t}|\pm\sin t|\,dt=e^{\pi}\left\{\int_0^{\pi}e^{-t}\sin t\,dt\right\}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{e^{\pi}}\right)^k$

(∵ $|\pm\sin t|=|\sin t|$, 積分区間$[0,\pi]$より$|\sin t|=\sin t$)

設問①の(4)より $\int_0^{\pi}e^{-t}\sin t\,dt=\frac{e^{\pi}+1}{2e^{\pi}}$ であるから,

$S_n=e^{\pi}\cdot\frac{e^{\pi}+1}{2e^{\pi}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{e^{\pi}}\right)^k$ ∴ $\underline{S}=\frac{e^{\pi}+1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{e^{\pi}}\right)^k=\frac{e^{\pi}+1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{e^{\pi}}}{1-\frac{1}{e^{\pi}}}=\underline{\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}}$

[補] 計算だけで解をすすめましたが, 本質的には, 設問①と同じことです. ※ kが奇数のとき $|\sin x|=\sin x$, kが偶数のとき $|\sin x|=-\sin x$ ですから, $\int_0^{n\pi}e^{-x}|\sin x|\,dx=S_n$ は,  の面積を表します.
$x-(k-1)\pi=t$, $x=(k-1)\pi+t$ と置換するところが, この積分の要でした.
しかしながら $f(x)=e^{-x}|\sin x|\geqq0$ だから, $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-x}|\sin x|\,dx=\left|\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-x}\sin x\,dx\right|$ のように計算できます.

③ $S_n=(-1)^{n-1}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}\sin x\,dx$ を求めて、$\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求めよ.

[解] $\begin{cases} I=\int e^{-x}\sin x\,dx=-e^{-x}\cos x-J \\ J=\int e^{-x}\cos x\,dx=e^{-x}\sin x+I \end{cases}$ $\begin{pmatrix} p=e^{-x} & q'=\sin x \\ p'=-e^{-x} & q=-\cos x \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} r=e^{-x} & s'=\cos x \\ r'=-e^{-x} & s=\sin x \end{pmatrix}$

$I=-e^{-x}\cos x-(e^{-x}\sin x+I)$　$2I=-e^{-x}(\sin x+\cos x)$

$I=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)$

$\therefore \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}\Big[e^{-x}(\sin x+\cos x)\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi}$ ※

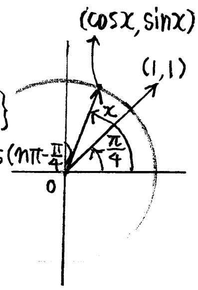
$=-\frac{1}{2}\{e^{-n\pi}(\sin n\pi+\cos n\pi)-e^{-(n-1)\pi}(\sin(n-1)\pi+\cos(n-1)\pi)\}$

$=-\frac{1}{2}\{e^{-n\pi}\cos n\pi-e^{-n\pi+\pi}\cos(n-1)\pi\}=-\frac{1}{2}e^{-n\pi}(\cos n\pi+e^{\pi}\cos n\pi)$

$=-\frac{1}{2}e^{-n\pi}\cos n\pi(1+e^{\pi})=-\frac{1}{2}e^{-n\pi}\cdot(-1)^n(1+e^{\pi})=\frac{1}{2}(-1)^{n+1}(1+e^{\pi})e^{-n\pi}$ $(\because \cos n\pi=(-1)^n)$

よって $S_n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot(-1)^{n+1}(1+e^{\pi})\left(\frac{1}{e^{\pi}}\right)^n=\frac{1}{2}(-1)^{2n}(1+e^{\pi})\left(\frac{1}{e^{\pi}}\right)^n=\frac{1+e^{\pi}}{2}\left(\frac{1}{e^{\pi}}\right)^n$

$0<\frac{1}{e^{\pi}}<1$ だから無限等比級数の和より $\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{1+e^{\pi}}{2}\cdot\frac{\frac{1}{e^{\pi}}}{1-\frac{1}{e^{\pi}}}=\frac{e^{\pi}-1}{2(e^{\pi}-1)}$



[補] ※から合成すると、$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big[e^{-x}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{e^{-n\pi}\cos\left(n\pi-\frac{\pi}{4}\right)-e^{-(n-1)\pi}\cos\left((n-1)\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-n\pi}\left\{\cos\left(n\pi-\frac{\pi}{4}\right)+e^{\pi}\cos\left(n\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$ $\left(\because \cos\left\{(n-1)\pi-\frac{\pi}{4}\right\}=\cos\left\{\left(n\pi-\frac{\pi}{4}\right)-\pi\right\}=-\cos\left(n\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-n\pi}\cos\left(n\pi-\frac{\pi}{4}\right)(1+e^{\pi})=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-n\pi}(1+e^{\pi})\cdot\cos n\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}e^{-n\pi}(1+e^{\pi})\cdot(-1)^n$

$=\frac{1}{2}\cdot(-1)^{n+1}(1+e^{\pi})e^{-n\pi}$ (やはり、[解]のようにする方が速い、次のようにすると---)

[補] ①のように $x=(n-1)\pi+t$ とおくと $\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}\sin x\,dx=\int_0^{\pi} e^{-(n-1)\pi-t}\sin\{(n-1)\pi+t\}\,dt$

$=e^{-(n-1)\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}\cdot\{\sin(n-1)\pi\cos t+\cos(n-1)\pi\sin t\}\,dt=e^{-(n-1)\pi}\cos(n-1)\pi\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt$

$=e^{-(n-1)\pi}\cdot(-1)^{n-1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\Big[e^{-t}(\sin t+\cos t)\Big]_0^{\pi}=e^{-(n-1)\pi}\cdot(-1)^{n-1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-e^{-\pi}-1)$

よって $S_n=(-1)^{n-1}\cdot e^{-n\pi}\cdot e^{\pi}\cdot(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)=(-1)^{2n-2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(1+e^{\pi})\cdot e^{-n\pi}=\frac{1+e^{\pi}}{2}\cdot\left(\frac{1}{e^{\pi}}\right)^n$

[補] $\int e^{-x}\sin x\,dx=I$ について、次のようにすると、もっとeasyにかけます.

$(e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x)'=(-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x)+(-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x)=-2e^{-x}\sin x$

$\therefore e^{-x}\sin x=\left\{-\frac{1}{2}(e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x)\right\}'$　$\therefore \int e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}(e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x)+C$

更に、P.167の(2)イ にオイラーの公式を用いる方法もあります.

4 曲線 $y=e^{-x}\cos x\ (x\geqq 0)$ と x 軸との交点の x 座標を原点に近い方から順に $x_1, x_2 \cdots$ とする。
$x_0=0$ として、$I_k=\int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{-x}\cos x\,dx\ (k=1,2,\cdots)$ とするとき、次の問いに答えよ。
(1) 不定積分 $\int e^{-x}\cos x\,dx$ を求めよ　　(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} I_k$ を求めよ。

[解] (1) $(e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x)' = (-e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x) - (-e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x) = 2e^{-x}\cos x$

$\therefore e^{-x}\cos x = \left\{\frac{1}{2}(e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x)\right\}'$　$\therefore \int e^{-x}\cos x\,dx = \underline{\frac{1}{2}(e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x)+C}$

$\left(=\underline{\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x)+C}\right)$

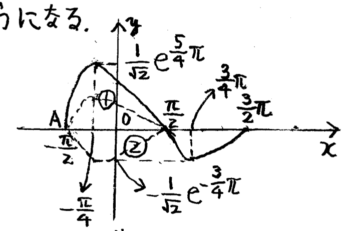
(2) $y=e^{-x}\cos x=0$ より、$x\geqq 0$ では、$x=\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\cdots$ が順に $x_1, x_2, x_3, \cdots$ となり、$x_k=\frac{2k-1}{2}\pi$

特別に $x_0=0$ である。点 $A(-\frac{\pi}{2}, 0)$ とする。$x\geqq -\frac{\pi}{2}$ の範囲で $y=f(x)=e^{-x}\cos x$ のグラフを考える。

$f'(x)=-e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x = -e^{-x}(\sin x+\cos x) = -\sqrt{2}e^{-x}\sin(x+\frac{\pi}{4})$ だから、$-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq \frac{3}{2}\pi$ の範囲では、

$f'(x)$ は、$x=-\frac{\pi}{4}$ の前後で符号を正から負に変え、$x=\frac{3}{4}\pi$ の前後で符号を負から正に変える。よって

極大値 $f(-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}$、極小値 $f(\frac{3}{4}\pi)=-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{4}\pi}$、グラフは、右のようになる。



$f(x+\pi)=e^{-x-\pi}\cos(x+\pi) = -\frac{1}{e^{\pi}}e^{-x}\cos x = -\frac{1}{e^{\pi}}f(x)$ だから

$-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ の範囲の $f(x)$ のグラフを y 軸方向に $\frac{1}{e^{\pi}}$ 倍したグラフ①を

x 軸対称に折ったグラフ②として、グラフ②を x 軸方向に π だけ

平行移動したグラフが、$\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{3}{2}\pi$ での $y=f(x)$ のグラフと一致する。

同様に、$\frac{3}{2}\pi\leqq x\leqq\frac{5}{2}\pi$ のグラフは $\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{3}{2}\pi$ のグラフを利用してかくことができる。

$x\to+\infty$ とすると、$y=f(x)$ のグラフは、減衰関数であることがわかる。

I_k は、$y\geqq 0$ では、面積であるが、$y\leqq 0$ では、負の面積である。したがって、$k\geqq 2$ のとき I_k を単なる積分として捉える。$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} I_k$ は、点 $A(-\frac{\pi}{2}, 0)$ からの公比 $-\frac{1}{e^{\pi}}$ の等比級数の和（初項 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$）から、面積 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,dx$ を引いたものである。

初項 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[e^{-x}(\sin x-\cos x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left\{e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}(-1)\right\} = \frac{1}{2}(e^{-\frac{\pi}{2}}+e^{\frac{\pi}{2}})$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[e^{-x}(\sin x-\cos x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{1}{2}\left\{-1-e^{\frac{\pi}{2}}(-1)\right\} = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)$

したがって、$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} I_k = \frac{1}{2}(e^{-\frac{\pi}{2}}+e^{\frac{\pi}{2}})\cdot\frac{1}{1-(-\frac{1}{e^{\pi}})} - \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1) = \frac{1}{2}(e^{-\frac{\pi}{2}}+e^{\frac{\pi}{2}})\cdot\frac{e^{\pi}}{e^{\pi}+1} - \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{\frac{3}{2}\pi}}{e^{\pi}+1}\right) - \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\frac{\pi}{2}}(1+e^{\pi})}{e^{\pi}+1} - \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{2}}$

[補] $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} I_k = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx + \cdots = \int_0^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} e^{-x}\cos x\,dx$

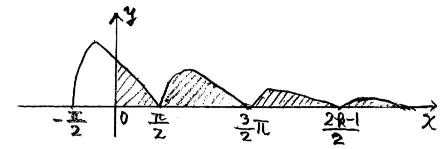
$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[e^{-x}\sin(x-\frac{\pi}{4})\right]_0^{\infty}$　$\underline{\infty のとき}$ $\sin(x-\frac{\pi}{4})$ は $-1\leqq\sin(x-\frac{\pi}{4})\leqq 1$ の振動、$e^{-\infty}\to 0$ $\therefore \underline{0}$

$\underline{0 のとき}$ $\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{0}\sin(-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \underline{-\frac{1}{2}}$ だから $0-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ に収束する。検算に使えます。

[問] $S_k=\int_{x_{k-1}}^{x_k}|e^{-x}\cos x|\,dx\ (k=1,2,\cdots)$ のとき $S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k$ を求めよ。(カイ) は、次頁。

前頁[問]の(カイ)

$S_k=\int_{x_{k-1}}^{x_k}|e^{-x}\cos x|\,dx=\int_{x_{k-1}}^{x_k}e^{-x}|\cos x|\,dx$ は、右図の面積である



したがって $S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\cos x\,dx\times\frac{1}{1-\frac{1}{e^{\pi}}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}e^{-x}\cos x\,dx$

$=\frac{1}{2}(e^{-\frac{\pi}{2}}+e^{\frac{\pi}{2}})\times\frac{e^{\pi}}{e^{\pi}-1}-\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)=\frac{1}{2}\times\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{\frac{3}{2}\pi}}{e^{\pi}-1}-\frac{(e^{\frac{\pi}{2}}-1)(e^{\pi}-1)}{2(e^{\pi}-1)}$

$=\frac{1}{2(e^{\pi}-1)}(e^{\frac{\pi}{2}}+e^{\frac{3}{2}\pi}-e^{\frac{3}{2}\pi}+e^{\frac{\pi}{2}}+e^{\pi}-1)=\underline{\underline{\frac{e^{\pi}+2e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2(e^{\pi}-1)}}}$

$\boxed{5 \quad I=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}x^2|\sin nx|\,dx \text{ を求めよ}}$

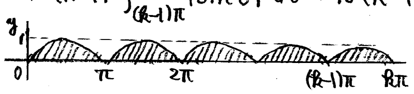
[解1] $nx=t$ とおく $dx=\frac{1}{n}dt$, $\begin{array}{c|c} x & 0\to\pi \\ t & 0\to n\pi \end{array}$, $I=\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}\frac{t^2}{n^2}|\sin t|\cdot\frac{1}{n}dt=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\int_0^{n\pi}t^2|\sin t|\,dt$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}t^2|\sin t|\,dt$ ※

$(k-1)\pi\leqq t\leqq k\pi$ $(k=1,2,---)$, $(k-1)^2\pi^2\leqq t^2\leqq k^2\pi^2$, $(k-1)^2\pi^2|\sin t|\leqq t^2|\sin t|\leqq k^2\pi^2|\sin t|$

$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}(k-1)^2\pi^2|\sin t|\,dt\leqq\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}t^2|\sin t|\,dt\leqq\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}k^2\pi^2|\sin t|\,dt$

左辺 $=\pi^2(k-1)^2\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin t|\,dt=\pi^2(k-1)^2\int_0^{\pi}\sin t\,dt=\pi^2(k-1)^2[-\cos t]_0^{\pi}=2\pi^2(k-1)^2$

(∵  $y=|\sin x|$ ∴ $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin x|\,dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx$)

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}2\pi^2(k-1)^2=2\pi^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2=2\pi^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2-1\right\}=2\pi^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2-2\pi^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$

$=2\pi^2\int_0^1x^2\,dx=2\pi^2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2\pi^2}{3}$

右辺 $=\pi^2k^2\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\sin t\,dt=2\pi^2k^2$　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}2\pi^2k^2=2\pi^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=2\pi^2\int_0^1x^2\,dx=\frac{2\pi^2}{3}$

よってハサミウチの原理より $\underline{\underline{I=\frac{2\pi^2}{3}}}$

[解2] [解1]の※から更に $t=(k-1)\pi+u$ とおく. $dt=du$, $\begin{array}{c|c} t & (k-1)\pi\to k\pi \\ u & 0\to\pi \end{array}$

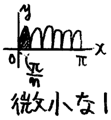
$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\{(k-1)^2\pi^2+2(k-1)\pi u+u^2\}|\sin((k-1)\pi+u)|\,du$, $\left(|\sin((k-1)\pi+u)|=|\sin u|=\sin u \quad ∵\ 0\leqq u\leqq\pi\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\pi^2\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2\int_0^{\pi}\sin u\,du+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot2\pi\sum_{k=1}^{n}(k-1)\int_0^{\pi}u\sin u\,du+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\underbrace{\int_0^{\pi}u^2\sin u\,du}_{\text{定数}}$

$=\lim_{n\to\infty}\pi^2\int_0^{\pi}\sin u\,du\cdot\underline{\underline{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2}}+\lim_{n\to\infty}2\pi\cdot\underbrace{\int_0^{\pi}u\sin u\,du}_{\text{定数}}\cdot\frac{1}{n}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)}_{\text{定数}}+0$

$\underline{\underline{\qquad}}=\int_0^1x\,dx=$ 定数, $\lim_{n\to\infty}$ 定数 $\times\frac{1}{n}\times$ 定数 $=0$

∴ $I=\pi^2[-\cos u]_0^{\pi}\cdot\int_0^1x^2\,dx+0+0=2\pi^2\cdot\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\underline{\underline{\frac{2\pi^2}{3}}}$

[補]  $y=|\sin nx|$ の $[0,\pi]$ を n 等分して、微小な1個の面積は $\int_0^{\frac{\pi}{n}}|\sin nx|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin nx\,dx=\frac{2}{n}$

微小な1個の平均の高さ $\frac{\frac{2}{n}}{\frac{\pi}{n}}=\frac{2}{\pi}$ (長方形と見る). したがって $S=\int_0^{\pi}\frac{2}{\pi}x^2\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3}$

6 rを正の実数とし、数列$\{a_n\}$を $a_n=\int_0^{n\pi}e^{-rx}|\sin x|dx$ ($n=1,2,3\cdots$) と定めるとき、次の問いに答えよ. (1) $a_{n+1}-a_n$ を求めよ (2) $\{a_n\}$の一般項を求めよ (3) $\lim_{n\to\infty}a_n$ をrを用いて表せ. (4) (3)で求めた極限値を$f(r)$とするとき $\lim_{r\to+0}rf(r)$ を求めよ

[解] (1) $y=g(x)=e^{-rx}|\sin x|=e^{-rx}\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ とおく. $g'(x)=-re^{-rx}\sin x+e^{-rx}\cos x$

$=-e^{-rx}(r\sin x-\cos x)=-e^{-rx}\cdot\sqrt{r^2+1}\sin(x-\alpha)$, αは$\tan\alpha=\frac{1}{r}$をみたす正の鋭角

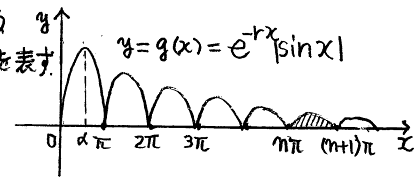
$0\leqq x\leqq\pi$ の範囲では、$g'(x)$は$x=\alpha$の前後で正から負へ符号をかえ、$x=\alpha$で極大値$g(\alpha)$をとる.

$g(x+\pi)=e^{-r(x+\pi)}|\sin(x+\pi)|=e^{-r\pi}\cdot e^{-rx}|-\sin x|=e^{-\pi r}\cdot e^{-rx}|\sin x|=e^{-\pi r}g(x)$

したがって、$g(x)$をy軸方向に$e^{-\pi r}(=\frac{1}{e^{\pi r}}<1)$倍して、$x$軸方向に$\pi$だけ平行移動すると

$g(x+\pi)$のグラフがかける. 今、$y=g(x)$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ をかけば、$\pi\leqq x\leqq 2\pi$, $2\pi\leqq x\leqq 3\pi$, ---

のグラフが次々とかけて、$y=g(x)$のグラフは、次のようである



a_nは、$0\leqq x\leqq n\pi$ のとき $y=g(x)$とx軸で囲まれる面積を表す.

よって、$a_{n+1}-a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-rx}|\sin x|dx=S_n$ とおく.

$x=n\pi+t$ とおく、$dx=dt$, $\begin{array}{c|c} x & n\pi\to(n+1)\pi \\ \hline t & 0\to\pi \end{array}$

$S_n=\int_0^{\pi}e^{-r(n\pi+t)}|\sin(n\pi+t)|dt=e^{-\pi rn}\int_0^{\pi}e^{-rt}|\pm\sin t|dt=e^{-\pi rn}\int_0^{\pi}e^{-rt}\sin t\,dt$

$$\begin{cases} I=\int_0^{\pi}e^{-rt}\sin t\,dt=[-e^{-rt}\cos t]_0^{\pi}-rJ=e^{-\pi r}+1-rJ=e^{-\pi r}+1-r^2I \cdots① \\ J=\int_0^{\pi}e^{-rt}\cos t\,dt=[e^{-rt}\sin t]_0^{\pi}+rI=rI \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} p=e^{-rt}, & q'=\sin t \\ p'=-re^{-rt}, & q=-\cos t \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} s=e^{-rt} & u'=\cos t \\ s'=-re^{-rt}, & u=\sin t \end{pmatrix}$

①より $(1+r^2)I=e^{-\pi r}+1$, $I=\int_0^{\pi}e^{-rt}\sin t\,dt=\frac{e^{-\pi r}+1}{1+r^2}$ $(=a_1)$

$\therefore\ S_n=\underline{a_{n+1}-a_n}=\underline{\frac{e^{-\pi r}+1}{1+r^2}\cdot e^{-\pi rn}}$

(2) $a_2-a_1=a_1(e^{-\pi r})^1$

$a_3-a_2=a_1(e^{-\pi r})^2$

$\vdots$

$+)\ a_n-a_{n-1}=a_1(e^{-\pi r})^{n-1}$

$a_n-a_1=a_1\cdot\frac{e^{-\pi r}(1-(e^{-\pi r})^{n-1})}{1-e^{-\pi r}}$

$\underline{a_n}=a_1\left\{1+\frac{e^{-\pi r}-(e^{-\pi r})^n}{1-e^{-\pi r}}\right\}=\frac{e^{-\pi r}+1}{1+r^2}\times\frac{1-e^{-\pi r}+e^{-\pi r}-(e^{-\pi r})^n}{1-e^{-\pi r}}$

$=\underline{\frac{(1+e^{-\pi r})(1-e^{-\pi rn})}{(1+r^2)(1-e^{-\pi r})}}$ $\left(a_1=\frac{1+e^{-\pi r}}{1+r^2}\right)$

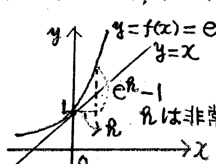
$\underline{(n=1,2,\cdots)}$

(3) $0<e^{-\pi r}<1$, $(e^{-\pi r})^n\to0$ ($n\to\infty$のとき) $\therefore\ \underline{\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1+e^{-\pi r}}{(1+r^2)(1-e^{-\pi r})}}$ $(=f(r))$

(4) $\underline{rf(r)}=\frac{r(1+e^{-\pi r})}{(1+r^2)(1-e^{-\pi r})}=\frac{1+e^{-\pi r}}{1+r^2}\cdot\frac{r}{1-e^{-\pi r}}\longrightarrow\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{\pi}=\underline{\frac{2}{\pi}}$ $(r\to+0)$

$\pi r=h$ とおく, $r\to+0$ のとき $h\to+0$ $\quad\frac{r}{1-e^{-\pi r}}=\frac{re^{\pi r}}{e^{\pi r}-1}=\frac{\frac{h}{\pi}\cdot e^h}{e^h-1}=\frac{e^h}{\pi}\cdot\frac{1}{\frac{e^h-1}{h}}\to\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1}$ $(h\to+0)$

(補)



$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^{0+h}-e^0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=e^0=1$

hは非常に小さい. (点(0,1)における傾き1)

or $f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}$

xをhに

$=\lim_{h\to0}\frac{e^h-e^0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=e^0=1$