

[類6] $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ($n=1, 2, \dots$) とする。次の問いに答えよ。

(1) $n \rightarrow \infty$ のとき a_n は収束することを証明せよ

(2) $n \rightarrow \infty$ のときの a_n の収束値を小数第三位を四捨五入して小数第二位まで計算して求めよ

[考] 結果は、ネイピアの数 $e = 2.71828 \dots$ ですが、これを求めてみようということですが

(1) 2項定理、上からおさえます (2) (1)より $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が等号化できることを示さねばなりません。

適当な有限項までの和を求めると、四捨五入して、2.72 となりますが、残りの無限項の和をたしても、

やはり、2.72 であることを示さねばなりません。(1)で上からおさえた方法を用います。近似値の誤差の限界、

$$\begin{aligned}
 \text{[解]} (1) & (1 + \frac{1}{n})^n = {}_nC_0 (\frac{1}{n})^0 + {}_nC_1 (\frac{1}{n})^1 + {}_nC_2 (\frac{1}{n})^2 + {}_nC_3 (\frac{1}{n})^3 + {}_nC_4 (\frac{1}{n})^4 + {}_nC_5 (\frac{1}{n})^5 + \dots + {}_nC_n (\frac{1}{n})^n \\
 &= 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \cdot \frac{1}{n^4} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-(n-1))}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\
 &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} (1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \frac{1}{4!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})(1 - \frac{3}{n}) + \dots + \frac{1}{n!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{n-1}{n}) \\
 &< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad (\because 1 - \frac{k}{n} \ (k=1, 2, \dots) \text{ は } 0 \text{ より大きく } 1 \text{ より小さい}) \\
 &< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \dots \\
 &< 1 + (\frac{1}{2})^0 + (\frac{1}{2})^1 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + \dots + (\frac{1}{2})^{n-1} + (\frac{1}{2})^n + \dots \quad \left(\because \frac{1}{3!} = \frac{1}{3 \cdot 2} < \frac{1}{2 \cdot 2} = (\frac{1}{2})^2, \frac{1}{4!} = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} < \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = (\frac{1}{2})^3, \right. \\
 &= 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \quad (\because \text{等比級数の和}) \quad \left. \frac{1}{n!} = \frac{1}{n(n-1) \dots 2} < \frac{1}{2 \cdot 2 \dots 2} = (\frac{1}{2})^{n-1} \right)
 \end{aligned}$$

よって $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ は増加数列であり、かつ $a_n < 3$ (上に有界) だから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ は 3 以下に収束値をもつ。
(増加数列である理由、3行目 n が大きくなると、各項 $(1 - \frac{k}{n})$ は大きくなり、更に項数もふえる)

(2) 改めて、無限和 $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$ と定義する

(1) の3行目で $n \rightarrow \infty$ とすると $(1 - \frac{k}{n})$ は 1 に近づくので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ は上の無限和 e と一致する。

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \dots$$

$$\text{第4項 } \frac{1}{3!} = \frac{1}{6} = 0.1666 \dots \quad \text{第5項 } \frac{1}{4!} = \frac{1}{24} = 0.0416 \dots \quad \text{第6項 } \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} = 0.0083 \dots$$

$$\text{第4項までの和} = 1 + 1 + 0.1666 = 2.6666 \quad \text{第5項までの和} = 2.6666 + 0.0416 = 2.7082$$

$$\text{第6項までの和} = 2.7082 + 0.0083 = 2.7164 \quad \frac{1}{6!} = \frac{1}{6!}, \frac{1}{7!} < \frac{1}{6 \cdot 6!}, \frac{1}{8!} < \frac{1}{6 \cdot 6 \cdot 6!} \dots \text{なので}$$

$$\text{第7項以降の和} = \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \dots < \frac{1}{6!} + \frac{1}{6 \cdot 6!} + \frac{1}{6 \cdot 6 \cdot 6!} + \dots = \frac{1}{6!} (1 + \frac{1}{6} + (\frac{1}{6})^2 + \dots)$$

$$= \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{1}{6!} \cdot \frac{6}{5} = \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{600} = 0.0016 < 0.002 \quad (\because \text{無限等比級数の和})$$

したがって、第6項までの和 + 第7項以降の和 $< 2.7164 + 0.002 = 2.7184$ であるから、

第6項までの和が 2.72 を超えることはなく、求める小数第二位までは、小数第三位を四捨五入して、2.72 となる。

[問] a_n の収束値を e と定義する。 e は無理数であることを証明せよ。 [解] は、P.305, P.307 参照

[類1] $0 \leq \theta < 2\pi$ とする. $\cos \theta = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ である. 次の問いに答えよ

(1) $\cos 2\theta$ の値を求めよ (2) $\cos 2\theta + \cos 3\theta$ の値を求めよ (3) θ の値を求めよ.

[考] $\cos \theta = \frac{1-\sqrt{5}}{4} = t$ において, $\cos 2\theta, \cos 3\theta$ を t で表す. 次数下げ (3) (2) の結果にもよりますが, うまく作ってあります. 下に [類2] として, 複素数平面による設問があります (理系)

[解] $\cos \theta = \frac{1-\sqrt{5}}{4} = t (< 0)$ とおく. θ は第Ⅱ, Ⅲ象限の角である. $4t = 1-\sqrt{5}$, $4t-1 = -\sqrt{5}$, $16t^2-8t+1=5$
 $16t^2-8t-4=0$, $4t^2-2t-1=0$, $t^2 = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$

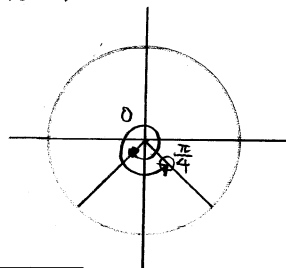
$$(1) \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 2t^2 - 1 = 2\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right) - 1 = t - \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} - \frac{2}{4} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

$$(2) \cos 3\theta = \cos(\theta+2\theta) = \cos \theta \cos 2\theta - \sin \theta \sin 2\theta = t(2t^2-1) - 2\sin^2 \theta \cos \theta = t(2t^2-1) - 2(1-t^2)t$$

$$= 2t^3 - t - 2t + 2t^3 = 4t^3 - 3t = 4t \cdot t^2 - 3t = 4t\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right) - 3t = 2t^2 - 2t = 2\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right) - 2t = -t + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos 2\theta + \cos 3\theta = \left(t - \frac{1}{2}\right) + \left(-t + \frac{1}{2}\right) = 0$$

(3) $\cos 2\theta + \cos 3\theta = 2\cos \frac{5\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 0$, $\cos \frac{5\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 0$, $\cos \theta = \frac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$ ① $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲では, $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$ である. $\cos \frac{\theta}{2} = 0$ のとき $\theta = \pi$ であるが, ①をみたさない
 $\cos \frac{5\theta}{2} = 0$ のとき $\frac{5\pi}{4} < \frac{5\theta}{2} < \frac{15\pi}{4}$, $\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{5\theta}{2} < 4\pi - \frac{\pi}{4}$
 $\frac{5\theta}{2} = \frac{3}{2}\pi, 2\pi + \frac{\pi}{2}, 3\pi + \frac{\pi}{2}, 5\theta = 3\pi, 4\pi + \pi, 6\pi + \pi, \theta = \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{7\pi}{5}$
 であるが $\theta = \pi$ は ①をみたさない $\therefore \theta = \frac{3\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}$



[類2] $\cos \frac{3}{5}\pi, \sin \frac{3}{5}\pi$ の値を複素数平面を用いて求めよ. 但し角 $\frac{3}{5}\pi$ を変えてはいけな

[解] $z^5 = -1 = \cos(2k+1)\pi + i\sin(2k+1)\pi$, $z = \cos\left(\frac{2k+1}{5}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2k+1}{5}\pi\right)$ ($k=0, 1, 2, 3, 4$)

$k=1$ のときの実部が $\cos \frac{3}{5}\pi < 0$, 虚部が $\sin \frac{3}{5}\pi > 0$ (第Ⅱ象限の角) --- ①

$z^5 + 1 = 0$, $(z+1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = 0$, $(z=-1)$ $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$ が虚数解,

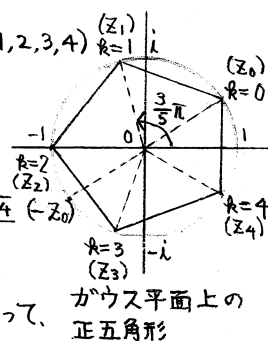
$z \neq -1$ ので両辺を z^2 でわると $z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$, $z + \frac{1}{z} = t$ --- ② とおく.

$(t^2 - 2) - t + 1 = t^2 - t - 1 = 0$, $t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, ②は, $z^2 - tz + 1 = 0$ だから, $z = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{2}$ ($-z_0$)

• $t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ のとき根号の中 $t^2 - 4 = (t+1) - 4 = t - 3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 3 = \frac{-5-\sqrt{5}}{2} = -\frac{10+2\sqrt{5}}{4} < 0$

$z = \frac{t}{2} \pm \frac{\sqrt{t^2-4}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \pm \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i$ $k=1$ のときだから ①より複号(±)の+の方をとって,

$\cos \frac{3}{5}\pi = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$, $\sin \frac{3}{5}\pi = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ ($t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ が得られます)



[補] $\theta = \frac{3}{5}\pi$ のとき, $\cos 2\theta$ は $-z_0$ の実部, $\cos 3\theta$ は z_4 の実部, を表します. $0(-z_0) + 0z_4$ は, 対称性から, 虚軸上の vector となり, $\cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$ です. 実際 $-z_0 + z_4 = -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i\right) + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i\right)$
 $= -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}i$, $\sin 2\theta + \sin 3\theta = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$ ($= 2\sin \frac{5\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2\sin \frac{3\pi}{2} \cos \frac{\pi}{10} = -2\cos(90^\circ - 36^\circ) = -2\sin 36^\circ$)

[類3] $\cos \frac{3}{5}\pi, \sin \frac{3}{5}\pi$ の値を求めよ (複素数平面ではありませんが)

[考] $\frac{3}{5}\pi = 108^\circ = 180^\circ - 72^\circ$, 正五角形, トレーの定理と3角, しかし, 下の[別解2]は, トレーの定理を介しません.

[解] 右図 $AC = BE = CE = x$, 等脚台形 $ABCE$ にトレーの定理を用いて,

$$x^2 = 1 \cdot x + 1 \cdot 1 = x + 1, x^2 - x - 1 = 0, x > 0, x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

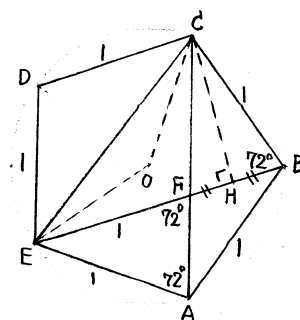
点 C から BE へ垂線 CH をおろす. $BH = BE - HE = x - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

$$BH = \frac{BH}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \cos \frac{3}{5}\pi = \cos 108^\circ = \cos (180^\circ - 72^\circ) = -\cos 72^\circ$$

$$\therefore \cos \frac{3}{5}\pi = -\frac{BH}{BC} = -\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

$$\text{三平方の定理より, } CH^2 = BC^2 - BH^2 = 1 - \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{4^2} = \frac{16 - (6 - 2\sqrt{5})}{4^2} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{4^2}$$

$$\sin \frac{3}{5}\pi = \sin 108^\circ = \sin (180^\circ - 72^\circ) = \sin 72^\circ = \frac{CH}{BC} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$



一辺の長さ1の正五角形 $ABCDE$

円周角 $\angle EBC$ = 中心角 $\angle EOC \times \frac{1}{2}$

$$= 144^\circ \times \frac{1}{2} = 72^\circ$$

等脚台形 $ABCE$

[別解1] $\cos \frac{3}{5}\pi = \cos 108^\circ = \cos (180^\circ - 72^\circ) = -\cos 72^\circ$

$$72^\circ = \alpha \text{ とおく. } 5\alpha = 360^\circ, 3\alpha = 360^\circ - 2\alpha, \cos 3\alpha = \cos (-2\alpha) = \cos 2\alpha$$

$$\cos 3\alpha = \cos (\alpha + 2\alpha) = \cos \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha = \cos \alpha (2\cos^2 \alpha - 1) - 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$= 2\cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha)\cos \alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

$$\cos 3\alpha = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \text{ から } 4\cos^3 \alpha - 2\cos^2 \alpha - 3\cos \alpha + 1 = 0, (\cos \alpha - 1)(4\cos^2 \alpha + 2\cos \alpha - 1) = 0$$

$$0 < \cos \alpha = \cos 72^\circ < 1 \text{ より } \cos \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \therefore \cos \frac{3}{5}\pi = -\cos \alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$

$$\sin \frac{3}{5}\pi = \sin 108^\circ = \sin (180^\circ - 72^\circ) = \sin 72^\circ > 0, \sin 72^\circ = 1 - \cos^2 72^\circ = 1 - \frac{(-1 + \sqrt{5})^2}{4^2} = \frac{16 - (6 - 2\sqrt{5})}{4^2} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{4^2}$$

$$\therefore \sin \frac{3}{5}\pi = \sin 72^\circ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \quad (\text{図形を用いなくて計算だけで求めると, このようなことでは"すか"-----})$$

[別解2] 等脚台形 $ABCE$ に余弦定理を用いる. 対角線 AC を介して $\triangle ABC$ と $\triangle CEA$ に適用. $\cos \frac{3}{5}\pi = t$ とおく

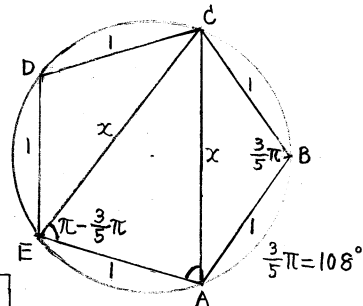
$$x^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot t = x^2 + 1^2 - 2 \cdot x \cdot 1 \cdot (-t), x^2 = 2 - 2t = x^2 + 2tx + 1$$

$$\text{後の等式より, } 1 - x^2 = 2t(x + 1), (1 + x)(1 - x) = 2t(x + 1), x + 1 > 0$$

$$1 - x = 2t, x = 1 - 2t \text{ を前の等式に代入, } (1 - 2t)^2 = 2 - 2t, 1 - 4t + 4t^2 = 2 - 2t$$

$$4t^2 - 2t - 1 = 0, t = \cos \frac{3}{5}\pi < 0, \therefore \cos \frac{3}{5}\pi = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$

$$\sin \frac{3}{5}\pi > 0, \sin \frac{3}{5}\pi = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{4^2 - (1 - \sqrt{5})^2}}{4} = \frac{\sqrt{16 - (6 - 2\sqrt{5})}}{4} \\ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$



$$\cos \frac{3}{5}\pi = t$$

$$\cos (\pi - \frac{3}{5}\pi) = -\cos \frac{3}{5}\pi = -t$$

[補] [別解2] Best で"すね. $t (= \cos \frac{3}{5}\pi)$ から, 先に求めて, $x = 1 - 2t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

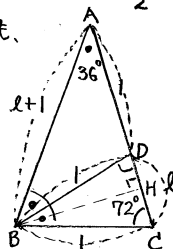
• 他にも, 右図の相似を利用する方法 ($\triangle ABC$ の $\triangle BCD$) も,

中学生(?)向けにあります. $(l + 1) : 1 = 1 : l, l(l + 1) = 1^2$

$$l^2 + l - 1 = 0, l > 0, l = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, CH = \frac{l}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$BH = \sqrt{1^2 - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{4^2 - (\sqrt{5} - 1)^2}}{4} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$(\therefore \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \sin 72^\circ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4})$$



結局, 左の図は, 最上部の円内の $\triangle ACE$ を取り出したものです.

[類4] (1) $S_m = \sum_{k=1}^m \cos\left(\frac{2k\pi}{2m+1}\right)$ の値を次の2つの方法で求めよ.

(7) 複素数平面を利用する (1) $\sin\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)$ との積を利用する

(2) $T_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$ を $\tan$ がついた n の式で表せ.

[考] (1) (ア) $S_m + i T_m$ を求めると S_m, T_m が求まる. Vol. II, 複素数平面, p. 16 参照. (イ) 積 $\rightarrow$ 和, easy だ.

[解] (1), (2) $S_n + i T_n = \sum_{k=1}^n \left\{ \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) \right\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) \right\}^k$ $\frac{2\pi}{2n+1} = \theta$ とおくと

$$\frac{(\cos\theta + i \sin\theta) \{1 - (\cos\theta + i \sin\theta)^{n+1}\}}{1 - (\cos\theta + i \sin\theta)} = \frac{(\cos\theta + i \sin\theta) \{1 - (\cos(n+1)\theta + i \sin(n+1)\theta)\}}{1 - \cos\theta - i \sin\theta} \quad (\text{公比 } \cos\theta + i \sin\theta \neq 1)$$

$$\bullet 1 - (\cos \theta + i \sin \theta) = (1 - \cos \theta) - i \sin \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ = (2 \sin \frac{\theta}{2})(\sin \frac{\theta}{2} - i \cos \frac{\theta}{2}) = (2 \sin \frac{\theta}{2}) \{ \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}) \} \quad 0 < \sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

$$\bullet 1 - \cos \theta - i \sin \theta = (2 \sin \frac{\theta}{2}) \{ \cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}) \}$$

公式 $r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \times r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$ を利用して、

$$S_m + i T_m = \frac{\sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \left\{ \cos \left(\theta + \frac{n\theta}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\theta + \frac{n\theta}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right\} = \frac{\sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \left\{ \cos \frac{(n+1)\theta}{2} + i \sin \frac{(n+1)\theta}{2} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \cdot \sin \frac{n\theta}{2} \cdot \cos \frac{(n+1)\theta}{2} + i \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \cdot \sin \frac{n\theta}{2} \cdot \sin \frac{(n+1)\theta}{2}$$

$\frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \cdot \sin \frac{n\theta}{2} \cdot \cos \frac{(n+1)\theta}{2} = S_m$
 $i \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \cdot \sin \frac{n\theta}{2} \cdot \sin \frac{(n+1)\theta}{2} = T_m$

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{\frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}} &= \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \sin \left(\frac{n\theta}{2} + \frac{(n+1)\theta}{2} \right) + \sin \left(\frac{n\theta}{2} - \frac{(n+1)\theta}{2} \right) \right\} = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \left\{ \sin \frac{(2n+1)\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right\} \quad (\text{積} \rightarrow \text{和}) \\ &= \frac{1}{2 \sin \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{2m+1} \right)} \times \sin \left(\frac{(2m+1)}{2} \cdot \frac{2\pi}{2m+1} \right) - \frac{1}{2} = \frac{\sin \pi}{2 \sin \left(\frac{\pi}{2m+1} \right)} - \frac{1}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$\frac{T_m}{\sin \frac{\theta}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\cos \frac{(2m+1)\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2}\right) = -\frac{1}{2\sin \frac{\theta}{2}} \left\{ \cos \frac{(2m+1)\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \right\} = \frac{\cos \frac{\theta}{2} - \cos \pi}{2\sin \frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\cos \frac{\theta}{2} + 1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{4}}{4 \sin \frac{\theta}{4} \cos \frac{\theta}{4}} = \frac{1}{2 \tan \frac{\theta}{4}} = \frac{1}{2 \tan \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{2m+1} \right)} = \frac{1}{2 \tan \left\{ \frac{\pi}{2(2m+1)} \right\}}$$

$$\begin{aligned} (1) \text{ (1)} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) \times S_m &= \sum_{k=1}^m \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) \cos\left(\frac{2k\pi}{2m+1}\right) \right\} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left\{ \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2m+1}\right) - \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2m+1}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\sin\left(\frac{3\pi}{2m+1}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) \right) + \left(\sin\left(\frac{5\pi}{2m+1}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2m+1}\right) \right) + \dots + \left(\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2m+1}\right) - \sin\left(\frac{(2m-1)\pi}{2m+1}\right) \right) \right\} \text{ (相殺される)} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -\sin\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) - \sin\pi \right\} = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) > 0 \text{ であるから } S_m = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

[補] (2)も(1)(イ)と同様に $\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)$ の積を利用して求まります. 設問としては(イ)を先にかくべきだったか?

(7)をわかって欲しかったからです。実際の入試では、directに S_m (or T_m)を求めよ、です。帰納法もありです。正 $(2m+1)$ 角形の虚数解の和の実部は、常に $-\frac{1}{2}$ ということです。

[類5] $\theta = \frac{2}{7}\pi$ のとき、次の問いに答えよ

(1) $\cos \theta = \cos \frac{2}{7}\pi = x$ がみたす3次方程式の1つを求めよ

(2) $t = \cos \frac{2}{7}\pi + \cos \frac{4}{7}\pi + \cos \frac{6}{7}\pi$ の値を求めよ

[考] $7\theta = 2\pi$, $4\theta = 2\pi - 3\theta$, $\cos 4\theta = \cos(2\pi - 3\theta) = \cos 3\theta$ から、3次方程式は得られますが、

(2)の t の値を求めるときの説明はどうするか、ここでは、複素数平面を利用して正7角形を考えます

[解] $z^7 = 1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$, $z = \cos \frac{2k\pi}{7} + i \sin \frac{2k\pi}{7}$ ($k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$) である

(1) $z^7 - 1 = (z-1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$, $z \neq 1$ である $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ --- ① の解が

虚数解 $z_k = \cos \frac{2k\pi}{7} + i \sin \frac{2k\pi}{7}$ ($k=1, 2, 3, 4, 5, 6$) となる。

①の両辺を $z_1^3 (\neq 0)$ でわって $z_1^3 + z_1^2 + z_1 + 1 + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_1^3} = 0$ --- ①'

$z_1 + \frac{1}{z_1} = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7} + (\cos(-\frac{2\pi}{7}) + i \sin(-\frac{2\pi}{7})) = 2\cos \theta = 2x$ とおく。

$z_1^2 + \frac{1}{z_1^2} = (z_1 + \frac{1}{z_1})^2 - 2 = (2x)^2 - 2 = 4x^2 - 2$

$z_1^3 + \frac{1}{z_1^3} = (z_1 + \frac{1}{z_1})(z_1^2 - 1 + \frac{1}{z_1^2}) = 2x(4x^2 - 2 - 1) = 8x^3 - 6x$

①'は $(8x^3 - 6x) + (4x^2 - 2) + 2x + 1 = 0$

$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$ --- ②

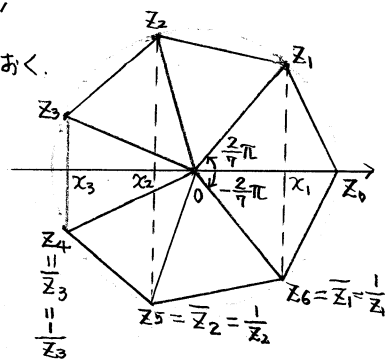
(2) $z_1 + \frac{1}{z_1} = 2\cos \frac{2\pi}{7} = 2\cos \theta = 2x_1$ ($z_6 = \frac{1}{z_1} = \bar{z}_1$)

$z_2 + \frac{1}{z_2} = 2\cos \frac{4\pi}{7} = 2\cos 2\theta = 2x_2$ ($z_5 = \frac{1}{z_2} = \bar{z}_2$)

$z_3 + \frac{1}{z_3} = 2\cos \frac{6\pi}{7} = 2\cos 3\theta = 2x_3$ ($z_4 = \frac{1}{z_3} = \bar{z}_3$)

とおけば、 $t = \cos \frac{2}{7}\pi + \cos \frac{4}{7}\pi + \cos \frac{6}{7}\pi = \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = x_1 + x_2 + x_3$,

②の解が x_1, x_2, x_3 であるから、解と係数の関係より $t = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$



正7角形 $z_0 z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6$

[補] $7\theta = 2\pi$, $4\theta = 2\pi - 3\theta$, $\cos 4\theta = \cos 3\theta$, $\cos 4\theta = \cos 2 \cdot 2\theta = \dots = 8\cos^4 \theta - 8\cos^2 \theta + 1$,

$\cos 3\theta = \cos(\theta + 2\theta) = \dots = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$ から②が得られます。R30の(2)ウ[類4]の(1)(ア)で、

$n=3$ のときが t の値 $-\frac{1}{2}$ です。(2)は $\sin \frac{\pi}{7}$ との積を利用すると次のように求められます。

$$\begin{aligned} t \times \sin \frac{\pi}{7} &= \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{-\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} + \sin \frac{-3\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{-\pi}{7} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{-\pi}{7} = -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{7} \quad \therefore t = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

[類.7] $T = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} \sum_{k=3}^n k C_2 \cdot k-1 C_2$ (n は3以上の整数)の値を次の2通りの方法で求めよ.

(1) 区分求積法を用いて T の値を求めよ.

(2) (ア) $S_n = \sum_{i=1}^n i(i+1)(i+2)(i+3)$ (n は1以上の整数)を n を用いて表せ.

(イ) (ア)の結果(または考え方)を利用して、 $L_n = \sum_{k=3}^n k C_2 \cdot k-1 C_2$ を n の式で表し、 $T = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{n^5}$ を求めよ.

[考] (1) $\sum_{k=3}^n k C_2 \cdot k-1 C_2 = 3 C_2 \cdot 2 C_2 + 4 C_2 \cdot 3 C_2 + \dots + n C_2 \cdot n-1 C_2 = \sum_{i=2}^{n-1} i+1 C_2 \cdot i C_2 = \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(i+1)i}{2} \cdot \frac{i(i-1)}{2} = \sum_{i=2}^{n-1} \frac{i^4 - i^2}{4}$,
 k のままでもできます.

(2) (ア) 準公式で"す"から、結果を知っている人は、帰納法があります、次に(例)をかきました.

(例) $\sum_{i=1}^n i(i+1)(i+2) = A_n$ を求めよ. (代入した式をたてにかいて、辺々たせばわかりやすい)

(カ1.1) 恒等式 $i(i+1)(i+2)(i+3) - (i-1)i(i+1)(i+2) = i(i+1)(i+2)\{(i+3) - (i-1)\} = 4i(i+1)(i+2)$

の下線部に $i=1, 2, 3, \dots, n-1, n$ と入れて辺々たすと、相殺されて $n(n+1)(n+2)(n+3) = 4A_n$ を得る. $\therefore A_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ ($0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 0$)[↑]

(カ1.2) $\sum_{i=1}^n i(i+1)(i+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ ($n=1, 2, \dots$) で"あることを帰納法で"示す

[I] $n=1$ のとき 左辺 $= 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, 右辺 $= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4} = 6$, $\therefore$ 左辺 = 右辺 = 6 で"あり"成立.

[II] $n=k$ (≥ 1) のとき $\sum_{i=1}^k i(i+1)(i+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$ が"成立"すると仮定する.

$n=k+1$ のとき $\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1)(i+2) = \sum_{i=1}^k i(i+1)(i+2) + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3)$
 $= (k+1)(k+2)(k+3) \left(\frac{k}{4} + 1 \right) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$ よって $n=k+1$ で"成立".

以上 [I], [II] より示された.

(イ) $L_n = \sum_{k=3}^n k C_2 \cdot k-1 C_2 = \dots = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-2} i(i+1)^2(i+2)$ となり、 $(i+1)^2 = (i+1)(i+1) = (i+1)\{(i+3) - 2\}$
 $= (i+1)(i+3) - 2(i+1)$ と変形すると、連続する整数の積が"現"れます.

[解] (1) $T = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} (3 C_2 \cdot 2 C_2 + 4 C_2 \cdot 3 C_2 + \dots + n C_2 \cdot n-1 C_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} \sum_{i=2}^{n-1} i+1 C_2 \cdot i C_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(i+1)i}{2} \cdot \frac{i(i-1)}{2}$
 $= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} \sum_{i=2}^{n-1} (i^4 - i^2) = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} \left\{ \sum_{i=1}^n (i^4 - i^2) - (n^4 - n^2) \right\}$
 $= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^4 - \left(\frac{1}{n^2} \right) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^2 - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \right) \right\} = \frac{1}{4} \left\{ \int_0^1 x^4 dx - 0 \cdot \int_0^1 x^2 dx - (0-0) \right\}$
 $= \frac{1}{4} \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{20}}}$

(2) (ア) (その1) 恒等式 $\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4) - (\lambda-1)\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}{5}$

$$= \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) \{(\lambda+4) - (\lambda-1)\} = 5\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$$

の下線部に $\lambda=1, 2, 3, \dots, (n-1), n$ を入れて加えたとき、左辺は相殺されて

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) - 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 5S_n \text{ となる. } \therefore S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$$

(その2) $\sum_{i=1}^n \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$ で"あることを帰納法で示す.

$$[I] \ n=1 \text{ のとき 左辺} = \sum_{i=1}^1 \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, \text{ 右辺} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{5} = 24,$$

$\therefore$ 左辺 = 右辺 = 24 となり成立

$$[II] \ n=k(k \geq 1) \text{ のとき } \sum_{i=1}^k \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{5} \text{ が成立すると仮定する.}$$

$$n=k+1 \text{ のとき } \sum_{i=1}^{k+1} \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = \sum_{i=1}^k \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) + (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{5} + (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$$

$$= (k+1)(k+2)(k+3)(k+4) \left(\frac{k}{5} + 1 \right) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)}{5}$$

よって $n=k+1$ で"成立

以上 [I], [II] より示された.

$$(イ) \ L_n = \sum_{k=3}^n kC_2 \cdot k-1C_2 = \sum_{k=3}^n \frac{k(k-1)}{2} \cdot \frac{(k-1)(k-2)}{2} = \frac{1}{4} \sum_{k=3}^n (k-2)(k-1)^2 k = \frac{1}{4} \{1 \cdot 2^3 \cdot 3 + 2 \cdot 3^3 \cdot 4 + \dots + (n-2)(n-1)^2 n\}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-2} i(i+1)^2(i+2) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-2} i(i+1)(i+1)(i+2) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-2} i(i+1)\{(i+3)-2\}(i+2)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-2} \{i(i+1)(i+2)(i+3) - 2i(i+1)(i+2)\}$$

(ア) の結果と同様にして得られる $\sum_{i=1}^n i(i+1)(i+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ の n に $n-2$ を入れて

$$L_n = \frac{1}{4} \left\{ \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{5} - 2 \cdot \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{4} \right\}$$

$$= \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{4} \cdot \left(\frac{n+2}{5} - \frac{1}{2} \right) = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{4} \cdot \frac{(2n-1)}{10} = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(2n-1)}{40}$$

$$(L_3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{40} = 3)$$

$$\underline{T} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{n^5} = \frac{1}{40} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n} \right) \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 - \frac{1}{n} \right) = \frac{2}{40} = \underline{\underline{\frac{1}{20}}}$$

[類.12] n は4以上の整数であり, x, y, z はすべて正の整数とする.

- (1) $1 \leq r < n$ をみたす整数 r に対して $nCr = n-1Cr + n-1Cr-1$ および $n+1Cr+1 = \sum_{k=r}^n nCr$ が成り立つことを示せ
- (2) 空間の点 (x, y, z) で $x+y+z < n$ をみたすものの個数を n を用いて表せ
- (3) 空間の点 (x, y, z) で $x+y+z = 3n$ かつ $x < y < z$ をみたすものの個数を n を用いて表せ

[考] (1) 有名公式で, $\sum_{k=r}^n nCr$ は, 公式の n に $n+1$, r に $r+1$ を入れて $n+1Cr+1 = nCr+1 + nCr$,

$nCr = n+1Cr+1 - nCr+1$ として $n = r, r+1, r+2, \dots, r+(n-r)-1 (=n-1), r+(n-r) (=n)$ を順に入れて, 辺々たすと $\sum_{k=r}^n nCr = n+1Cr+1$ となります. 帰納法も勿論です.

- (2) (1) を利用してもできますが, $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$ なので, $x-1 = X \geq 0, y-1 = Y \geq 0, z-1 = Z \geq 0$ において, $X+Y+Z < n-3, X+Y+Z \leq n-4$, 更に $(n-4) - (X+Y+Z) = U \geq 0$ とおくと, $X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0, U \geq 0$ のとき $X+Y+Z+U = n-4$ をみたす (X, Y, Z, U) の負でない整数解の組の個数と一致します. (1) を利用すると, * から, $n = 4, 5, \dots, n-4$, を順に入れて, その和を求めることになります.

- (3) $1 \leq x < y < z$ は $1 \leq x \leq y-1 \leq z-2$ ですから $0 \leq X-1 \leq Y-2 \leq Z-3, X-1 = X, Y-2 = Y, Z-3 = Z$, において, $0 \leq X \leq Y \leq Z$, かつ $X+Y+Z = 3n-6$ ($n \geq 4$) の格子点の個数として, Z を消去して, (X, Y) 平面上の格子点の個数を求めます. 等号付きの不等式なので, 内部及び周上の格子点の個数となります. X 軸方向から数えるか, Y 軸方向から数えるか, あるいは----

[解] (1) • $nCr = n-1Cr + n-1Cr-1$ について

$$\begin{aligned} \text{(その1) 右辺} &= \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!r!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-r-1)!(r-1)!} = \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!(r-1)!} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r} \right) = \frac{(n-1)!(n-r+r)}{(n-r-1)!(r-1)!r(n-r)} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!r!} = nCr = \text{左辺} \end{aligned}$$

(その2) 異なる n 個 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ から r 個とる組合せ nCr は, r 個の中に a_n が含まれるか,

含まれないかで2つの場合に分けることができる. (i) r 個の中に a_n が含まれない場合,

残り $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ の $n-1$ 個から r 個とればよい. $n-1Cr$ (ii) r 個の中に a_n が含まれる

場合, 残り $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ の $n-1$ 個から $r-1$ 個とればよい. $n-1Cr-1$

$$\therefore nCr = n-1Cr + n-1Cr-1 \quad \dots \textcircled{1}$$

• $n+1Cr+1 = \sum_{k=r}^n nCr$ について ①の n に $n+1$, r に $r+1$ を入れると $n+1Cr+1 = nCr+1 + nCr$ *

$nCr = n+1Cr+1 - nCr+1$ の n に $r, r+1, r+2, \dots, r+(n-r)-1 (=n-1), r+(n-r) (=n)$ を順に入れて 辺々たすと

$$\left. \begin{aligned} rCr &= r+1Cr+1 - rCr+1 \\ r+1Cr &= r+2Cr+1 - r+1Cr+1 \\ r+2Cr &= r+3Cr+1 - r+2Cr+1 \\ &\vdots \\ n-1Cr &= nCr+1 - n-1Cr+1 \\ +) nCr &= n+1Cr+1 - nCr+1 \\ \hline \sum_{k=r}^n nCr &= n+1Cr+1 \quad (\because rCr+1=0) \end{aligned} \right\} (n-r+1) \text{ 行}$$

(別解) 帰納法により示す. * を用いる.

[I] $n=r$ のとき 左辺 $= r+1Cr+1 = 1$, 右辺 $= \sum_{k=r}^r nCr = rCr = 1$
 $\therefore$ 左辺 $=$ 右辺 $= 1$ であり成立.

[II] $n=l$ ($\geq r$) のとき $l+1Cr+1 = \sum_{k=r}^l nCr$ が成立すると仮定.

$$\begin{aligned} n=l+1 \text{ のとき 左辺} &= l+2Cr+1 = l+1Cr+1 + l+1Cr \\ &= \sum_{k=r}^l nCr + l+1Cr = \sum_{k=r}^{l+1} nCr \quad \uparrow * \text{ を用いた.} \end{aligned}$$

よって $n=l+1$ で成立.

以上 [I], [II] より示された.

(2) $x+y+z < n$, $x+y+z \leq n-1$, $1 \leq x, 1 \leq y, 1 \leq z$, $x-1 = X \geq 0$, $y-1 = Y \geq 0$, $z-1 = Z \geq 0$, とおくと.

$X+Y+Z \leq n-4$ ($n \geq 4$), ここで更に $(n-4)-(X+Y+Z) = U \geq 0$ とおくと, $X+Y+Z+U = n-4$ --- ①
求める個数は, ①の負でない整数解 (X, Y, Z, U) の組の個数 $4H_{n-4}$ に等しい

$$\therefore 4H_{n-4} = 4 + (n-4) - 1 C_{n-4} = n-1 C_{n-4} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} \quad (n \geq 4)$$

(別解) (1)を用いる. (上の解)より $n=4, 5, 6, \dots, n-4$, を順に入れて, それぞれのときの負でない整数解 (X, Y, Z) の組の個数の和を求めると $\sum_{i=0}^{n-4} 3H_i$ が求める個数である.

$$3H_i = 3+i-1 C_i = i+2 C_i = i+2 C_{(i+2)-i} = i+2 C_2$$

よって $\sum_{i=0}^{n-4} 3H_i = \sum_{i=0}^{n-4} i+2 C_2 = \sum_{k=2}^{n-2} k C_2$ ここで (1)を用いると $k=2$, n に $n-2$ を入れて

$$\sum_{k=2}^{n-2} k C_2 = n-1 C_3 = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} \quad (n \geq 4) \quad \left(\begin{array}{l} \Sigma \text{がわかりにくいならば, 最後の } \Sigma \text{ まで} \\ \Sigma \text{の記号は, 用いないで } \text{解をすすめればよい} \end{array} \right)$$

(3) $1 \leq x < y < z$, $1 \leq x \leq y-1 \leq z-2$, $0 \leq x-1 \leq y-2 \leq z-3$, $x-1 = X$, $y-2 = Y$, $z-3 = Z$ とおけば,

$0 \leq X \leq Y \leq Z$ かつ $X+Y+Z = 3n-6$ をみたす整数解 (X, Y, Z) の組の個数を求めることになる.

ここで, Z を消去して, (X, Y) 平面で格子点の個数と捉えることにする. $Z = 3n-6-X-Y$ を不等式に入れて $0 \leq X \leq Y \leq 3n-6-X-Y$ この領域の内部及び周上の格子点の個数を求めることになるが, わかりにくいので, X と Y を入れかえて, $0 \leq Y \leq X \leq 3n-6-Y-X$, すなわち $0 \leq Y$ かつ $Y \leq X$ かつ

$Y \leq -2X + 3n-6$ として求める. (領域は, $Y=X$ に関して対称), 求める個数 $P(n)$ とする.

• $0 \leq X \leq n-2$ のときの, 直角二等辺三角形の個数 $S(n) = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) = \frac{(n-1)n}{2}$
(i) $n(\geq 4)$ が偶数のとき $\frac{3n-6}{2}$ は整数だから, の個数 $T(n)$ は

$$T(n) = \sum_{k=n-1}^{\frac{3n-6}{2}} \{-2k + (3n-6) + 1\} = \sum_{k=n-1}^{\frac{3n-6}{2}} \{-2k + (3n-5)\}$$

$(n-1)$ から $(\frac{3n-6}{2})$ までの総項数は $\frac{3n-6}{2} - (n-2) = \frac{3n-6-2n+4}{2} = \frac{n-2}{2}$ 項

したがって $T(n) = (-2) \cdot \frac{(\frac{n-2}{2})\{(n-1) + \frac{3n-6}{2}\}}{2} + (\frac{n-2}{2})(3n-5)$

$$= -(\frac{n-2}{2}) \left(\frac{2n-2+3n-6}{2} - 3n+5 \right) = -(\frac{n-2}{2}) \cdot \frac{5n-8-6n+10}{2} = -(\frac{n-2}{2}) \cdot \frac{(-n+2)}{2}$$

$$= \frac{(n-2)^2}{4} \therefore \text{求める個数 } P(n) = S(n) + T(n) = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-2)^2}{4} = \frac{3n^2-6n+4}{4}$$

(ii) n が奇数のとき, 領域内の最大の整数 $X = \frac{3n-7}{2}$

$T(n) = \sum_{k=n-1}^{\frac{3n-7}{2}} \{-2k + (3n-5)\}$, $(n-1)$ から $(\frac{3n-7}{2})$ までの総項数は,

$$(\frac{3n-7}{2}) - (n-2) = \frac{3n-7-2n+4}{2} = \frac{n-3}{2}$$

したがって $T(n) = (-2) \cdot \frac{(\frac{n-3}{2})\{(n-1) + \frac{3n-7}{2}\}}{2} + (\frac{n-3}{2})(3n-5)$

$$= -(\frac{n-3}{2}) \left(\frac{2n-2}{2} + \frac{3n-7}{2} - \frac{6n-10}{2} \right) = -(\frac{n-3}{2}) \left(\frac{-n+1}{2} \right) = \frac{(n-3)(n-1)}{4}$$

$$\therefore \text{求める個数 } P(n) = S(n) + T(n) = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-3)(n-1)}{4} = \frac{(n-1)}{4} \{2n + (n-3)\}$$

$$= \frac{(n-1)}{4} \cdot (3n-3) = \frac{3(n-1)^2}{4}$$

(i) n が偶数のとき

$$\frac{3n-6}{2} = n-3 + \frac{n}{2} \text{ は整数}$$

(ii) n が奇数のとき

$$\frac{3n-6}{2} \text{ を超えない}$$

最大の整数は

$$\left[\frac{3n-6}{2} \right] = \left[n-3 + \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} \right]$$

$$= n-3 + \frac{n-1}{2}$$

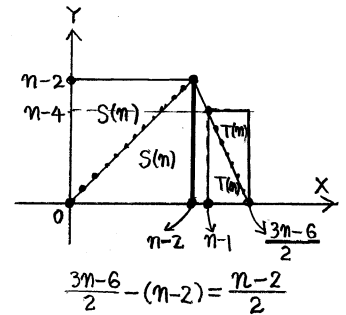
$$= \frac{3n-7}{2}$$

(3)の[別解]領域図示までは、前頁(3)の解の6行目迄同じ。

(i) n が偶数のとき

$$\begin{aligned}
 (n-1)^2 &= 2S(n) - (n-1), \quad S(n) = \frac{(n-1)^2 + (n-1)}{2} = \frac{(n-1)n}{2} \\
 \left(\frac{n-2}{2}\right) \cdot (n-3) &= 2T(n) - \left(\frac{n-2}{2}\right), \quad 2T(n) = \left(\frac{n-2}{2}\right)(n-3+1) = \frac{(n-2)^2}{2} \\
 T(n) &= \frac{(n-2)^2}{4} \quad \therefore \text{求める個数 } P(n) = S(n) + T(n) = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-2)^2}{4} \\
 &= \frac{2n^2 - 2n}{4} + \frac{n^2 - 4n + 4}{4} = \underline{\underline{\frac{3n^2 - 6n + 4}{4}}}
 \end{aligned}$$

(i) n が偶数のとき



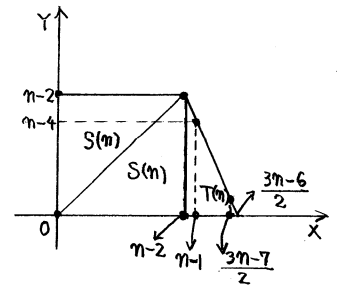
(ii) n が奇数のとき $S(n) = \frac{(n-1)n}{2}$

$$\left(\frac{n-3}{2}\right)(n-2) = 2T(n) - \frac{n-3}{2}, \quad 2T(n) = \left(\frac{n-3}{2}\right)(n-2+1) = \frac{(n-3)(n-1)}{2}$$

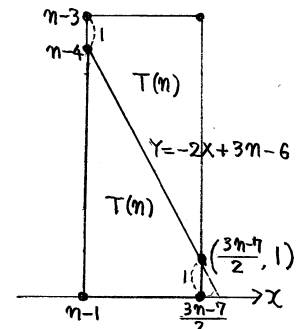
$$T(n) = \frac{(n-3)(n-1)}{4}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{求める個数 } P(n) &= S(n) + T(n) = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-3)(n-1)}{4} \\
 &= \frac{n-1}{4} \cdot \{2n + (n-3)\} = \frac{(n-1)(3n-3)}{4} = \underline{\underline{\frac{3(n-1)^2}{4}}}
 \end{aligned}$$

(ii) n が奇数のとき



$T(n)$ を取り出して拡大



n が奇数のとき

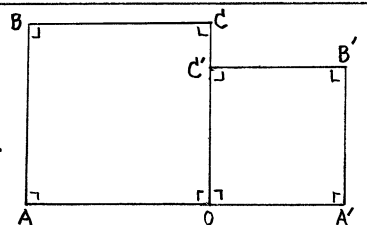
$$\begin{aligned}
 \left[\frac{3n-6}{2}\right] &= \left[n-3 + \frac{n}{2}\right] \\
 &= \left[n-3 + \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}\right] \\
 &= n-3 + \frac{n-1}{2} = \frac{3n-7}{2} \\
 \frac{3n-7}{2} - (n-2) &= \frac{n-3}{2}
 \end{aligned}$$

[類6] 平面上に正方形OABCと正方形OA'B'C'(OA>OA')が図の位置にある。

正方形OABCを固定して、正方形OA'B'C'を点Oを中心に、反時計回りに1周させる。3点A, O, A'が一直線にないとき、点Oを通り、直線AA'に垂直な直線と直線CC'の交点をPとする。次の問いに答えよ。

(1) 点Pの軌跡をのべよ。

(2) 線分OPの長さ と 線分AA'の長さの関係をのべよ



[考1] 複素数平面を利用する。しかし、初等幾何による[解3]がBestです。定点O(0), 定点A(α), 動点A'(β),

[解1] 複素数平面を利用する。定点O(0), 定点A(α), 動点A'(β)とおく。

$\vec{OA}$ を点Oを中心に、 -90° 回転させると $\vec{OC}$ だから、定点C($-i\alpha$),

$\vec{OA'}$ を点Oを中心に、 $+90^\circ$ 回転させると $\vec{OC'}$ だから、動点C'($i\beta$)

sは実数

(1) 動点P(z)とおく。動点Pは、直線CC'上にあるから、 $z = (-i\alpha) + s(i\beta - (-i\alpha))$ (1)

AA' $\perp$ OPだから、 $\vec{AA'}$ を点Oを中心に $+90^\circ$ 回転させたvectorの実数倍(t 倍)

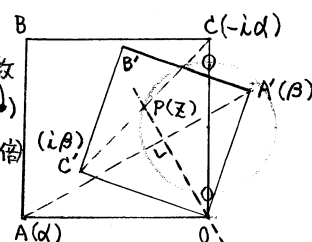
が $\vec{OP}$, すなわち $(\beta - \alpha)i \times t = (-i\alpha) + s(i\beta - (-i\alpha))$, 両辺を i でわって

$$(\beta - \alpha)t = -\alpha + s(\beta + \alpha), \quad t\beta - t\alpha = -\alpha + s\beta + s\alpha,$$

$(s+t-1)\alpha = (t-s)\beta$, $t-s \neq 0$ すると、 $\beta = \frac{s+t-1}{s-t}\alpha$ となり、 β は α の実数倍であり、3点A, O, A'が一直線上にあることになる。これは条件に反する。 $\therefore t-s=0$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ から $s+t-1=0 \therefore s=t=\frac{1}{2}$

$$z = -i\alpha + \frac{1}{2}(i\beta + i\alpha) = \frac{i\beta - i\alpha}{2}, \quad z + \frac{i\alpha}{2} = \frac{i\beta}{2}, \quad |z - (-\frac{i\alpha}{2})| = |\frac{i\beta}{2}| = |\frac{\beta}{2}| = \frac{|\beta|}{2}$$

したがって、点 z は、定点、 $(-\frac{i\alpha}{2})$ を中心にして、半径 $\frac{|\beta|}{2}$ の円を描く。但し、直線OCと円の交点(2点ある)は除く。すなわち、点Pは、線分OCの中点を中心にして、半径 $\frac{OA'}{2}$ の円を描く。但し、直線OCと円の交点(2点ある)は除く。



$$(2) OP = |z| = \left| \frac{i\beta - i\alpha}{2} \right| = |\alpha| \cdot \frac{|\beta - \alpha|}{2} = 1 \cdot \frac{AA'}{2} = \frac{AA'}{2}, \therefore \text{線分OPの長さは線分AA'の長さの}\frac{1}{2}\text{である。}$$

[考2] 「三角」と「図形と方程式」のコラボ。原点O, A($a, 0$) ($a > 0$), A'($ka, 0$) ($0 < k < 1$), 動点A'を原点Oのまわりに θ 回転させると、 $\vec{OA'} = ka \{ \cos \theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$, $\vec{OC'} = ka \{ \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$, C(0, a), $\theta \neq 0$, $\theta \neq \pi$, 直線OPと直線CC'を k, a, θ の入った x, y の式で表し、 θ を消せば、OKですが、(2)がありますので、具体的に、点Pの座標を求めると、除外点もmistakeがありません。

vectorの回転について

(例) $\vec{OP} = (-1, -\sqrt{3})$ を点Oを中心に、反時計回り(左回り)に θ 回転させると $\vec{OQ} = (\square, \square)$ となる

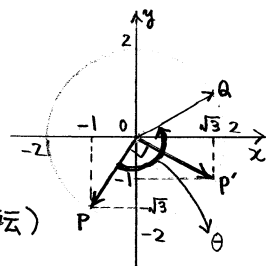
$$(カ1) \vec{OQ} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left\{ \cos \theta \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} -\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta \\ -\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} = (-1, -\sqrt{3}), \vec{OP'} = (\sqrt{3}, -1), |\vec{OP}| = |\vec{OP'}| = 2, \vec{OP} \perp \vec{OP'},$$

$\vec{OP}$ から左回りに $\frac{\pi}{2}$ 回転したvector $\vec{OP'}$ である。

(補) $\theta = 0$ ならば $(-1, -\sqrt{3})$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ならば $(\sqrt{3}, -1)$ に確かになっています。

$\theta = \frac{5}{6}\pi$ ならば $(\sqrt{3}, 1)$, $\theta = -\frac{\pi}{3}$ ならば $(-2, 0)$ (時計回りに $\vec{OP}$ を $\frac{\pi}{3}$ 回転)



[解2] 次頁

[解2] 右図のように、原点をOとするxy座標平面で考える。A(-a, 0) (a>0), C(0, a), 始めは、A'(ka, 0) (kは、0<k<1なる定数), C'(0, ka)である。正方形OA'B'C'を点Oを中心に、反時計回りに θ 回転させると、

$$\vec{OA'} = ka \left\{ \cos \theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = ka \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (\theta \neq 0, \pi) \quad ka \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{OC'} = ka \left\{ \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = ka \left\{ -\sin \theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos \theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} =$$

(1) $OP \perp AA'$ より、直線OPの傾き $m = -\frac{1}{AA' \text{の傾き}} = -\frac{ka \cos \theta + a}{ka \sin \theta} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{1}{k \sin \theta} \quad (\theta \neq 0, \pi)$

直線OPは $y = \left(-\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{1}{k \sin \theta} \right) x \quad (\theta \neq 0, \pi) \quad \cdots \textcircled{1}$

直線CC'は、 $y = \frac{a - ka \cos \theta}{ka \sin \theta} x + a = \left(\frac{1}{k \sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) x + a \quad \cdots \textcircled{2}$

①, ②より、 $\theta \neq 0, \pi$ のもとで θ を消去して、x, yの関係式を求めれば、これが点Pの軌跡であるか(2)があるので、交点Pの座標を求めることにする。

①, ②より $\left(-\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{1}{k \sin \theta} \right) x = \left(\frac{1}{k \sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) x + a, -\frac{2}{k \sin \theta} x = a, x = -\frac{ka \sin \theta}{2} \quad \cdots \textcircled{3}$

①に入れて $y = \left(-\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{1}{k \sin \theta} \right) \left(-\frac{ka \sin \theta}{2} \right) = \frac{ka \cos \theta}{2} + \frac{a}{2} \quad \cdots \textcircled{4} \quad (\theta \neq 0, \pi)$

③, ④より $x^2 + \left(y - \frac{a}{2} \right)^2 = \frac{k^2 a^2 \sin^2 \theta}{4} + \frac{k^2 a^2 \cos^2 \theta}{4} = \frac{k^2 a^2}{4} = \left(\frac{ka}{2} \right)^2 \quad (x \neq 0)$

よって、点Pの軌跡は $\left(0, \frac{a}{2} \right)$ を中心とする半径 $\frac{ka}{2}$ の円である。但し、y軸と円の交点(2点ある)は除く、すなわち点Pの軌跡は、線分OCの中点を中心にして、半径 $\frac{OA'}{2}$ の円である。但し、直線OCと円の交点(2点ある)は除く。

(2) 点P $\left(-\frac{ka \sin \theta}{2}, \frac{ka \cos \theta}{2} + \frac{a}{2} \right), OP^2 = \frac{k^2 a^2 \sin^2 \theta}{4} + \frac{k^2 a^2 \cos^2 \theta}{4} + \frac{ka^2 \cos \theta}{2} + \frac{a^2}{4}$
 $= \frac{k^2 a^2 + 2ka^2 \cos \theta + a^2}{4} = \frac{a^2 (k^2 + 2k \cos \theta + 1)}{4} = \frac{a^2 \{ (k + \cos \theta)^2 + 1 - \cos^2 \theta \}}{4} > 0 \quad (\because \theta \neq 0, \pi \text{ ので } 1 - \cos^2 \theta > 0)$

$AA'^2 = (ka \cos \theta + a)^2 + k^2 a^2 \sin^2 \theta = k^2 a^2 + 2ka^2 \cos \theta + a^2 = a^2 (k^2 + 2k \cos \theta + 1)$

$\therefore OP = \frac{a \sqrt{k^2 + 2k \cos \theta + 1}}{2} = \frac{AA'}{2}$ すなわち線分OPの長さは、線分AA'の長さの $\frac{1}{2}$ である。

(補) [解1]の良さがよくわかりますが、次の[解3]は、Bestです。基本に戻れということでした。

[考3] 高校(中学)入試、平面幾何。△OAA'を点Oを中心に、左回りに90°回転させると△OC'Cと重なる。中点連結定理を用いると、美しい解が得られます。[解3]は、次頁。

[解3](1) 右図、 $\triangle OAA'$ を点Oを中心にして、左回りに 90° 回転させると、 $\triangle OC'C'$ と

合同になる。 $AA' \perp C'C'$ だから、条件 $AA' \perp OP$ より、 $C'C' \parallel OP$ となる。

$OC = OC' (= OA)$ だから、中点連結定理により、 $PC = PC'$ (点Pは CC' の中点)。

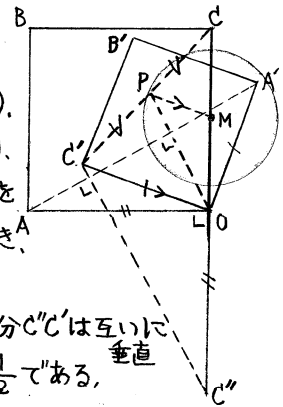
点Pを通り OC' に平行な直線と OC の交点をMとする。中点連結定理より、

点Mは、 OC の中点。更に $MP = \frac{1}{2} OC' = \frac{1}{2} OA'$ (一定)。よって点Pは、点Mを中心とする半径 $\frac{1}{2} OA'$ の円を描く。但し、3点A、O、 A' が一直線上にあるとき、

$\triangle OAA'$ は存在しないので、直線 OC との交点(2点ある)は除く。

※ $\triangle OAA'$ を 90° 回転させたものが $\triangle OC'C'$ だから対応する線分 AA' と線分 $C'C'$ は互いに垂直

(2). (1)より $OP = \frac{1}{2} C'C' = \frac{1}{2} AA'$ だから、線分OPの長さは、線分 AA' の長さの $\frac{1}{2}$ である。



【類】複素数平面上の点 z が点 $\alpha(-2+6i)$ から点 $\beta(6+2i)$ まで、端点を含む線分 $\alpha\beta$ 上を動く。

$w = \frac{1}{z}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $|w|$ が最大となる点 z の値 z_0 とそのときの w の値 w_0 を求めよ

(2) 点 w の軌跡を図示せよ

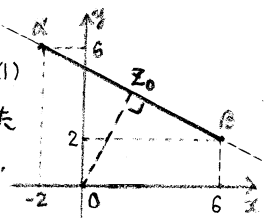
【考1】(1) $|w| = \frac{1}{|z|}$ ですから $|z|$ が最小のとき $|w|$ は最大、 $z = x + yi$ とおく。

(2) $w = x + yi$, $z = x + yi = \frac{1}{x + yi}$, $x + yi \neq 0$ ($(x, y) \neq (0, 0)$), $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \bar{z} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$

【解1】(1) $z = x + yi$ とおく。線分 $\alpha\beta$ は $y = -\frac{6-2}{-2-6}(x-6)+2 = -\frac{1}{2}x+5$ ($-2 \leq x \leq 6$) をみたす。(1)

$|w| = \frac{1}{|z|}$ だから $|z|$ が最小のとき $|w|$ は最大。右図、原点 O から線分 $\alpha\beta$ へおろした垂線のあし z_0 とすればよい。 $y = 2x$ と連立して、 $2x = -\frac{1}{2}x+5$, $4x = -x+10$,

$5x = 10$, $x = 2$, $y = 4$ $\therefore z_0 = 2 + 4i$ このとき $w_0 = \frac{1}{2+4i} = \frac{2-4i}{4+16} = \frac{1}{10} - \frac{1}{5}i$



(2) $w = x + yi$ とおく。 $x + yi = \frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}$, $x + yi \neq 0$ ($(x, y) \neq (0, 0)$)

$x = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $y = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ を直線 $y = -\frac{1}{2}x + 5$ に代入して $\frac{-y}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} + 5$

$-y = -\frac{1}{2}x + 5(x^2 + y^2)$, $-\frac{1}{5}y = -\frac{1}{10}x + x^2 + y^2$, $(x - \frac{1}{20})^2 + (y + \frac{1}{10})^2 = (\frac{1}{20})^2 + (\frac{1}{10})^2 = \frac{5}{400} = (\frac{\sqrt{5}}{20})^2$... ①

線分 $\alpha\beta$ 上の点 z なので、 w の軌跡は、①の円に制限がある。

$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \bar{z} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$,

$z = \alpha = -2 + 6i$ のとき $w_1 = \frac{1}{-2+6i}(-2-6i) = -\frac{1}{20} - \frac{3}{20}i$... ②

$z = \beta = 6 + 2i$ のとき $w_2 = \frac{1}{6+2i}(6-2i) = \frac{3}{20} - \frac{1}{20}i$... ③

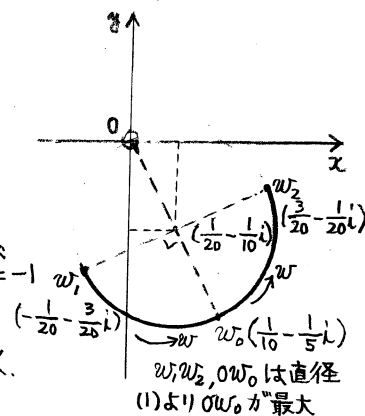
②と③の中点、が、①の円の中心 $(\frac{1}{20} - \frac{1}{10}i)$ である。(線分 w_1w_2 は直径)

(線分 w_1w_2 の傾き) $\times$ (線分 ow_0 の傾き) $= \frac{-\frac{3}{20} - (-\frac{1}{20})}{\frac{1}{20} - (-\frac{1}{10})} \times \frac{-\frac{1}{5}}{\frac{1}{10}} = \frac{-2}{-4} \times (-2) = -1$ ※

なので、線分 w_1w_2 と線分 ow_0 は垂直に交わる。

点 w は、点 w_1 から点 w_0 を経由して点 w_2 まで、円①の半円上を動く。

(補) $(w_1 - w_2)i = (-\frac{4}{20} - \frac{2}{20}i)i = \frac{1}{10} - \frac{1}{5}i = w_0$ なので $\overrightarrow{w_2w_1}$ を左回りに 90° 回転させたものが $\overrightarrow{ow_0}$ 。



【考2】 $z = \alpha + t(\beta - \alpha)$, $0 \leq t \leq 1$ (1) $|w|$ の分母 $|z|$ の根号の中は t の2次関数

(2) $z = a + bi$, a, b は、 t の1次式、 t を消して、 a と b の関係式、 $w = x + yi$, x, y は a, b で表せます。

$0 \leq t \leq 1$ の制限をはずして、 a と b を消去すると、 x, y の関係式が得られます。 $z = \alpha$ ($t=0$) のときの w_1 ,

$z = \beta$ ($t=1$) のときの w_2 を求めると、 $w_1 \rightarrow w_0 \rightarrow w_2$ がわかります。

[解2] $z = \alpha + t(\beta - \alpha) = (-2 + 6i) + t(8 - 4i) = (8t - 2) + (-4t + 6)i$ ($0 \leq t \leq 1$) とおく.

$$\begin{aligned} (1) |w| &= \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{(8t-2)^2 + (-4t+6)^2}} = \frac{1}{\sqrt{80t^2 - 80t + 40}} = \frac{1}{\sqrt{80(t^2 - t + \frac{1}{2})}} = \frac{1}{\sqrt{80\{(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}\}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{80(t - \frac{1}{2})^2 + 20}}, \quad 0 \leq t \leq 1 \text{ の範囲で } t = \frac{1}{2} \text{ のとき、最小値 } \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ をとるので、} \\ &\quad |w| \text{ の最大値は、} t = \frac{1}{2} \text{ のとき } \frac{1}{2\sqrt{5}} \text{ である。} \end{aligned}$$

このとき $z_0 = (8 \times \frac{1}{2} - 2) + (-4 \times \frac{1}{2} + 6)i = 2 + 4i$

$$w_0 = \frac{1}{z_0} = \frac{1}{2+4i} = \frac{1}{2(1+2i)} = \frac{1-2i}{2 \cdot 5} = \frac{1}{10} - \frac{1}{5}i$$

(2) $8t - 2 = a, -4t + 6 = b$ --- ① とおき、 $z = a + bi$ とする。 $0 \leq t \leq 1$ の制限をはずして $w = x + yi$ の軌跡を求める。

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{z\bar{z}} \cdot \bar{z} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z} = \frac{1}{a^2+b^2} (a - bi) = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i = x + yi \quad (x, y) \neq (0, 0) \text{ とおく。}$$

$$x = \frac{a}{a^2+b^2}, y = \frac{-b}{a^2+b^2}, \quad x^2 + y^2 = \frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{1}{a^2+b^2}, \quad \therefore x = a(x^2+y^2), y = -b(x^2+y^2) \quad \text{--- ②}$$

① より t を消去すると $a + 2b = 10$, 両辺に (x^2+y^2) をかけて ② を用いると、 $x - 2y = 10(x^2+y^2)$

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{10}x + \frac{2}{10}y = 0, \quad (x - \frac{1}{20})^2 + (y + \frac{1}{10})^2 = \frac{1}{400} + \frac{1}{100} = \frac{5}{400} = \left(\frac{\sqrt{5}}{20}\right)^2 \quad (\text{但し, } (x, y) \neq (0, 0)) \quad \text{--- ③}$$

ここで $0 \leq t \leq 1$ の制限を取り込む。

$$t = 0 \text{ のとき } z = \alpha = -2 + 6i, \quad w_1 = \frac{1}{-2+6i} = \frac{1}{2(-1+3i)} = \frac{-1-3i}{2 \cdot 10} = -\frac{1}{20} - \frac{3}{20}i$$

$$t = 1 \text{ のとき } z = \beta = 6 + 2i, \quad w_2 = \frac{1}{6+2i} = \frac{1}{2(3+i)} = \frac{3-i}{2 \cdot 10} = \frac{3}{20} - \frac{1}{20}i$$

したがって、 z が $\alpha \rightarrow \beta$ (t は $0 \rightarrow 1$) と動くとき w は ③ の円周上を $w_1 \rightarrow w_0 \rightarrow w_2$ (t は $0 \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow 1$) と動く。

$\frac{w_1 + w_2}{2} = \frac{1}{20} - \frac{1}{10}i$ であり、円の中心と一致するから w_1, w_2 は直径、 $\frac{w_0}{2} = \frac{1}{20} - \frac{1}{10}i$ であり、円の中心と一致するから、 $0w_0$ は直径。

$$\text{更に、(線分 } w_1w_2 \text{ の傾き)} \times \text{(線分 } 0w_0 \text{ の傾き)} = \frac{-\frac{3}{20} - (-\frac{1}{20})}{-\frac{1}{20} - \frac{3}{20}} \times \frac{-\frac{1}{5}}{\frac{1}{10}} = \frac{-3+1}{-1-3} \times (-2) = \frac{-2}{-4} \times (-2) = -1$$

だから、線分 w_1w_2 と線分 $0w_0$ は垂直に交わる。

軌跡の図示は、前頁[解1]参照

[補] $\arg w = \arg \frac{1}{z} = \arg \left(\frac{1}{z\bar{z}} \cdot \bar{z} \right) = \arg \frac{1}{|z|^2} + \arg \bar{z} = 0 + \arg \bar{z} = \arg \bar{z}$, w の軌跡が"円"で

あることがわかると、右図のようなことであり、目で見て w の動きがわかります。

$$\arg w_2 - \arg w_1 = \arg \beta - \arg \alpha = \arg \frac{\beta}{\alpha} = \arg \frac{6+2i}{-2+6i} = \arg \frac{3-i}{-1+3i} = \arg \frac{(3-i)(-1-3i)}{10}$$

$$= \arg (-3+9i+i+3) - 0 = \arg 10i = \arg 10 + \arg i = 0 + 90^\circ = 90^\circ \quad (\text{計算しなくても目で}$$

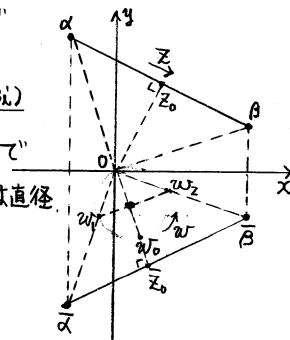
見て 90° です)。 $\angle w_2 0 w_1 = 90^\circ$ だから、 w_1, w_2 は直径です。最大値 $|w_0|$ だから $0w_0$ は直径。

$z, \bar{z}$ が実軸に対称だから、さまざまなことが見えてきます。P.94 参照です。

• $w = \frac{1}{z}$ による変換(反転)

1. 原点を通らない直線は、原点を通る円(原点は除く)に移る。

2. 原点を通る直線は原点を通る直線(原点は除く)に移る。



w の円は、実際には小さくてかけないが、拡大すると上図のよう、

[類1] $z^2 + z - i\bar{z} = i$ を解け

[考1] $z = x + yi$, (x, y 実数) とおく.

[解1] $z = x + yi$ (x, y 実数) とおく. $\bar{z} = x - yi$ を与式に代入

$$(x + yi)^2 + (x + yi) - i(x - yi) = i, \quad x^2 + 2xyi - y^2 + x + yi - xi - y - i = 0,$$

$$(x^2 - y^2 + x - y) + (2xy - x + y - 1)i = 0, \quad \text{実部} = 0 \quad \text{かつ} \quad \text{虚部} = 0,$$

$$x^2 - y^2 + x - y = 0 \quad \cdots \textcircled{1}, \quad 2xy - x + y - 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{2} \quad \textcircled{1} \text{より } (x+y)(x-y) + (x-y) = (x-y)(x+y+1) = 0$$

$$(i) \quad x - y = 0, \quad y = x \text{ のとき } \textcircled{2} \text{に代入 } 2x^2 - x + x - 1 = 0, \quad 2x^2 - 1 = 0, \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (複号同順)}$$

$$(ii) \quad x + y + 1 = 0, \quad y = -x - 1 \text{ のとき } \textcircled{2} \text{に代入 } 2x(-x-1) - x + (-x-1) - 1 = 0, \quad -2x^2 - 4x - 2 = 0,$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0, \quad (x+1)^2 = 0, \quad x = -1, \quad y = 0$$

$$\text{よって } \underline{z = -1, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)}$$

[考2] $z^2 + z = i\bar{z} + i = i(\bar{z} + 1)$, 両辺に絶対値をつけると $|z^2 + z| = |i(\bar{z} + 1)| = |\bar{z} + 1|$,

$|z||z+1| = |\bar{z}+1|$, $|z||z-(-1)| = |\bar{z}-(-1)|$, $|z-(-1)|$ は点 z と点 -1 の距離, $|\bar{z}-(-1)|$ は点 $\bar{z}$ と点 -1 の距離
 z と $\bar{z}$ は実軸 (x 軸) 対称. $|z-(-1)| = |\bar{z}-(-1)|$ となり $z \neq -1$ ($\bar{z} \neq -1$) のとき両辺を $|z-(-1)|$ でわる.

[解2] $z^2 + z = i(\bar{z} + 1)$, $|z(z+1)| = |i(\bar{z} + 1)|$, $|z||z+1| = |i||\bar{z} + 1| = |\bar{z} + 1| \quad \cdots \textcircled{1}$

$|z+1| = |\bar{z}-(-1)|$, $|\bar{z}+1| = |\bar{z}-(-1)|$ はそれぞれ点 z , 点 $\bar{z}$ から点 -1 までの距離を表す.

z と $\bar{z}$ は実軸 (x 軸) 対称なので $z \neq -1$ のとき $|z+1| = |\bar{z}+1|$.

$$\textcircled{1} \text{の両辺を } |z+1| (= |\bar{z}+1|), (z \neq -1) \text{ でわって } |z| = 1, \quad |z|^2 = 1, \quad z\bar{z} = 1$$

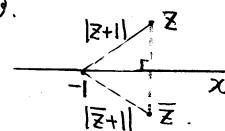
$$z \neq 0 \text{ から } \bar{z} = \frac{1}{z} \text{ を与式に入れて } z^2 + z - \frac{1}{z} = i, \quad z^3 + z^2 - i = i z$$

$$z^2(z+1) - i(z+1) = 0, \quad (z^2 - i)(z+1) = 0, \quad z \neq -1 \quad \therefore z^2 = i = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \quad (k=0, 1), \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, \text{このとき } z \text{ は与式をみたす (下*)}$$

$$z = -1 \text{ のとき, 左辺} = (-1)^2 + (-1) - i(-1) = 1 - 1 + i = i = \text{右辺} \text{ だから } \underline{z = -1} \text{ は解である}$$

$$* \quad z^2 = i, \quad z = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \text{ のとき, 左辺} = i \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) - i\left\{\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right\} = i = \text{右辺}$$



[類2] $|z|=1$ かつ $z^6 + z = 1$ をみたす複素数 z が存在するならば z を求めよ

[解] $|z|=1 \quad \cdots \textcircled{1} \quad z^6 + z = 1 \quad \cdots \textcircled{2} \quad \textcircled{1} \text{より } z\bar{z} = 1, \quad z \neq 0 \text{ から } \bar{z} = \frac{1}{z} \quad \cdots \textcircled{1}' \quad \textcircled{2} \text{より } z^6 + \bar{z} = 1 \text{ に } \textcircled{1}' \text{を代入}$

$$\frac{1}{z^6} + \frac{1}{z} = 1, \quad 1 + z^5 = z^6 \quad \cdots \textcircled{3} \quad \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ から } z^6 \text{ を消すと } 1 + z^5 + z = 1, \quad z^5 + z = 0, \quad z(z^4 + 1) = 0 \quad z \neq 0 \text{ から}$$

$$z^4 + 1 = 0, \quad z^4 = -1 \text{ を } \textcircled{2} \text{に代入 } z^6 + z = 1, \quad (-1)z^2 + z = 1, \quad z^2 - z + 1 = 0, \quad z+1 \text{ をかけて } z^3 + 1 = 0$$

$$z^3 = -1 \text{ を } \textcircled{2} \text{に代入 } (-1)^2 + z = 1 \quad \therefore z = 0 \text{ これは不合理} \quad \therefore z \text{ は存在しない}$$

[補] $|z|=1$ より $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を $z^6 + z - 1 = 0$ に代入 $(\cos 6\theta + \cos\theta - 1) + (i\sin 6\theta + i\sin\theta) = 0$

$$\sin 6\theta + \sin\theta = 2\sin\frac{7\theta}{2}\cos\frac{5\theta}{2} = 0 \quad \text{より } 0 \leq \frac{7\theta}{2} < 7\pi \text{ だから } \sin\frac{7\theta}{2} = 0 \text{ は } \frac{7\theta}{2} = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi$$

このとき $\cos 6\theta + \cos\theta - 1 = 2\cos\frac{7\theta}{2}\cos\frac{5\theta}{2} - 1 = \pm 2\cos\frac{5\theta}{2} - 1 = 0$ をみたすがどうかを調べねばならず
 いたって troublesome.

[類3] 実数 x, y が $x^3 + y^3 = 3xy$ をみたすとき $x+y=a$, $xy=b$, のそれぞれがとりえる値の範囲を求めよ.

[考] デカルトの正葉線 (Vol. III, 理系微積, P.166の(2)) で $x+y=a$ の範囲は、一文字消去、判別式 ≥ 0 で求めますが、 $xy=b$ の方は、分数関数の微分が必要で、正葉線のグラフを知っている人は、すぐに解けますが、グラフをかくこと自体が大変なので(?)、グラフをかいて解く方法は、考えものです。

[解] $(x+y)^3 - 3xy(x+y) = 3xy$, $a^3 - 3ab = 3b \cdots \textcircled{1}$, x, y は、解と係数の関係より、

2次式 $t^2 - at + b = 0$ の実数解なので、判別式 $D = a^2 - 4b \geq 0 \cdots \textcircled{2}$

① から、 $3(a+1)b = a^3$, $a = -1$ のとき $0 \cdot b = -1$ となり、 b の実数値が存在しない、 $\therefore a \neq -1$, $b = \frac{a^3}{3(a+1)} \cdots \textcircled{1}'$

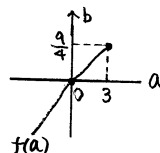
①' を ② に代入 $a^2 - \frac{4a^3}{3(a+1)} \geq 0$, $a^2 \left\{ 1 - \frac{4a}{3(a+1)} \right\} \geq 0$, $a^2 \left\{ \frac{3(a+1) - 4a}{3(a+1)} \right\} \geq 0$,

$\frac{a^2(-a+3)}{3(a+1)} \geq 0$, $\frac{a^2(a-3)}{3(a+1)} \leq 0$, $a=0$ のとき成立, $a \neq 0$ のとき $a^2 > 0$ だから $-1 < a \leq 3$ ($a=0$ を含む)

①' の右辺を $f(a)$ とおく、 $-1 < a \leq 3$ の範囲で、 $f(a) = \frac{a^3}{3(a+1)}$ のグラフを考える。

$f'(a) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2(a+1) - a^3}{(a+1)^2} = \frac{2a^3 + 3a^2}{3(a+1)^2} = \frac{a^2(2a+3)}{3(a+1)^2} > 0$ ($-1 < a \leq 3$) よって $f(a)$ は増加関数

$\lim_{a \rightarrow -1+0} f(a) = -\infty$, $f(3) = \frac{3^3}{3 \cdot 4} = \frac{9}{4}$ したがって b のとりえる値の範囲は $b \leq \frac{9}{4}$



[補] a の範囲 (数I) $y = a - x$ を $x^3 + y^3 = 3xy$ に代入

$$x^3 + (a-x)^3 = 3x(a-x), \quad \check{x}^3 + \check{a}^3 - 3\check{a}^2\check{x} + 3\check{a}\check{x}^2 - \check{x}^3 = 3\check{a}\check{x} - 3\check{x}^2$$

$$3(a+1)x^2 - 3a(a+1)x + a^3 = 0, \quad a = -1 \text{ のとき、実数 } x \text{ が存在しない、} \therefore a \neq -1$$

$$x \text{ は実数なので、判別式 } D = 9a^2(a+1)^2 - 12a^3(a+1) \geq 0, \quad 3a^2(a+1)\{3(a+1) - 4a\} \geq 0$$

$$3a^2(a+1)(-a+3) \geq 0, \quad a^2(a+1)(a-3) \leq 0, \quad a^2 \geq 0, \quad a \neq -1 \text{ のとき } -1 < a \leq 3$$

[補] デカルトの正葉線 $x^3 + y^3 = 3xy \cdots \textcircled{2}$ のグラフは、右のようです。

$x+y=a$, $y=-x+a$ を上下させてグラフとの交点、を考えると

$-1 < a \leq 3$ がわかります、 $a=3$ のとき $(x, y) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ です。

逆に上の[解]から、漸近線が $y = -x - 1$ であるということにもなりますが、

$xy=b$ についてですが、(i) $xy=b(<0)$ のとき、第II, IV象限を通るグラフ

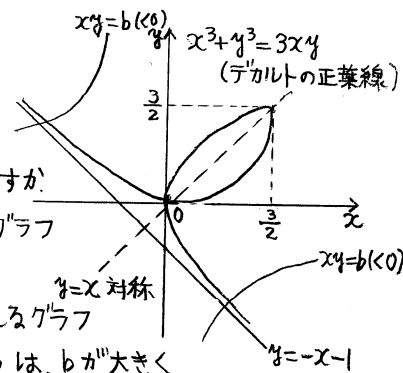
であり、曲線②との交点は無限に存在するので $-\infty < b < 0$

(ii) $(x, y) = (0, 0)$ のとき $b=0$ (iii) $xy=b(>0)$ のとき、第I, III象限を通るグラフ

である。 $xy=b(>0)$, 曲線② いずれも $y=x$ に対称であり、 $xy=b$ は、 b が大きく

なるにつれて、原点 O から遠ざかる、反比例のグラフであるから、上の[解]で求めた、 b の最大値 $\frac{9}{4}$ が、

$(x, y) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ を通るときと一致します。



[類6] (1) $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき $z = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$ を極形式に変形せよ。(偏角に $+2m\pi$, m 整数は、必要としない)
 (2) $0 \leq x < 2\pi$ のとき $f_n(x) = nC_1 \cos x + nC_2 \cos 2x + nC_3 \cos 3x + \dots + nC_n \cos nx$ ($n=1, 2, \dots$) を求めよ

[考] (1) 極形式の定義は、 $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $r > 0$ です。 $\pi < \theta < 2\pi$ に注意です

(2) $g_n(x) = \sum_{k=1}^n nC_k \sin kx$ とおく。 $f_n(x) + i g_n(x)$ にド・モアブルの定理が使える、二項定理、

[解] (1) $z = 1 + \cos \theta + i \sin \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = (2 \cos \frac{\theta}{2})(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}) \dots \textcircled{1}$

(i) $0 \leq \theta < \pi$ のとき $2 \cos \frac{\theta}{2} > 0$ だから $\textcircled{1}$ は極形式

(ii) $\theta = \pi$ のとき $z = 0$ であり極形式は存在しない

(iii) $\pi < \theta < 2\pi$ のとき $2 \cos \frac{\theta}{2} < 0$ だから $\textcircled{1}$ は極形式ではなくて、更に変形して

$$\begin{aligned} z &= (-2 \cos \frac{\theta}{2})(-\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2}) = (-2 \cos \frac{\theta}{2})\{\cos(\pi - \frac{\theta}{2}) - i \sin(\pi - \frac{\theta}{2})\} \\ &= (-2 \cos \frac{\theta}{2})\{\cos(\frac{\theta}{2} - \pi) + i \sin(\frac{\theta}{2} - \pi)\} \end{aligned}$$

まとめて (i) $0 \leq \theta < \pi$ のとき $z = (2 \cos \frac{\theta}{2})(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2})$

(ii) $\theta = \pi$ のとき、極形式は存在しない

(iii) $\pi < \theta < 2\pi$ のとき $z = (-2 \cos \frac{\theta}{2})\{\cos(\frac{\theta}{2} - \pi) + i \sin(\frac{\theta}{2} - \pi)\}$

注、(iii)の偏角は $\frac{\theta}{2} - \pi + 2\pi = \frac{\theta}{2} + \pi$ でもよい

(2) $f_n(x) = \sum_{k=1}^n nC_k \cos kx$, $g_n(x) = \sum_{k=1}^n nC_k \sin kx$ とおく、

$$\begin{aligned} f_n(x) + i g_n(x) &= \sum_{k=1}^n nC_k (\cos kx + i \sin kx) = \sum_{k=1}^n nC_k (\cos x + i \sin x)^k \\ &= \{1 + (\cos x + i \sin x)\}^n - nC_0 (\cos x + i \sin x)^0 = (2 \cos^2 \frac{x}{2} + 2i \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2})^n - 1 \\ &= \{(2 \cos \frac{x}{2})(\cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2})\}^n - 1 = (2 \cos \frac{x}{2})^n (\cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2}) - 1 \\ &= \{(2 \cos \frac{x}{2})^n \cos \frac{nx}{2} - 1\} + i \{(2 \cos \frac{x}{2})^n \sin \frac{nx}{2}\} \quad \therefore f_n(x) = (2 \cos \frac{x}{2})^n \cos \frac{nx}{2} - 1 \end{aligned}$$

[補] 例えば、 $w^n = (-1 - \sqrt{3}i)^n = \{2(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)\}^n = 2^n (\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi)^n = 2^n (\cos \frac{4n}{3}\pi + i \sin \frac{4n}{3}\pi)$ ($n=1, 2, \dots$)

$w^n = (-1 - \sqrt{3}i)^n = \{(-2)(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)\}^n = (-2)^n (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})^n = (-2)^n (\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3})$ とかいてもよいということ。 $\cos \frac{4n\pi}{3} = \cos(n\pi + \frac{n\pi}{3}) = \cos n\pi \cos \frac{n\pi}{3} - \sin n\pi \sin \frac{n\pi}{3} = (-1)^n \cos \frac{n\pi}{3} - 0 \cdot \sin \frac{n\pi}{3} = (-1)^n \cos \frac{n\pi}{3}$ ($n=1, 2, 3, \dots$ のとき $\cos n\pi$ は $-1, +1, -1, +1, \dots$ です。)

(2) $f_n(0) = nC_1 + nC_2 + \dots + nC_n = (1+1)^n - nC_0 = 2^n - 1$ です。一方 $f_n(0) = (2 \cos 0)^n \cos 0 - 1 = 2^n - 1$ であり一致、
 $f_n(\pi) = (-1)^n nC_1 + (-1)^n nC_2 + \dots + (-1)^n nC_n = (1+(-1))^n - (-1)^n nC_0 = 0^n - 1 = -1$ 、一方 $f_n(\pi) = (2 \cdot 0)^n \cos \frac{n\pi}{2} - 1 = -1$ であり一致、すなわち (2) の解は、 $0 \leq x < 2\pi$ で成立します。

ド・モアブルの定理は、 $\{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)\}^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, $r < 0$ でもこのように計算できます。

(1) の極形式は $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $r > 0$ でなければなりません。