正五角形の面積(次頁にもあります。)

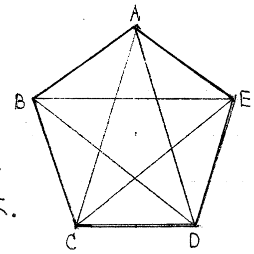
[類2] 一辺の長さaの正五角形ABCDEの面積を$S(a)$，対角線の長さ$AC=l(a)$とする。

(1) $l(a)$を求めよ。 (2) $36°=\theta$とするとき$S(a)$を$\tan\theta$とaで表せ。

(3) $l(1)=x$とするとき，$\cos\theta$をxの式で表せ。

(4) $\dfrac{1}{\tan^2\theta}$をsimpleなxの式で表すと，$\dfrac{1}{\tan^2\theta}=\dfrac{x+\square}{\square-x}$となる。適当な整数で□をうめよ。

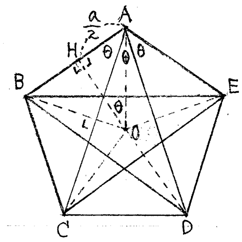
(5) $\dfrac{1}{\tan\theta}=\sqrt{\square+\dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}}$であるから，$S(a)=\dfrac{\sqrt{\square+\square\sqrt{\square}}}{\square}a^{\square}$となる。適当な整数で□をうめよ。



(解) (1) 正五角形ABCDEは，円に内接するので，四角形ACDE(台形)にトレミーの定理を用いる。

$AC=AD=CE=l(a)$，$AE=CD=DE=a$　$AD\times CE=DE\times AC+AE\times CD$

$\{l(a)\}^2=al(a)+a^2$　$\{l(a)\}^2-al(a)-a^2=0$　$\underline{l(a)}=\dfrac{a+\sqrt{5a^2}}{2}=\underline{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a}$　($\because l(a)>0$)



(2) 中心をOとし，OからABに垂線OHをおろす。$\angle AOH=\theta\ (=36°)$だから

$\tan\theta=\dfrac{HA}{OH}=\dfrac{\frac{a}{2}}{OH}=\dfrac{a}{2OH}$　$OH=\dfrac{a}{2\tan\theta}$　$\therefore \triangle OAB=\dfrac{1}{2}OH\times AB$

$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a}{2\tan\theta}\cdot a=\dfrac{a^2}{4\tan\theta}$　$\therefore \underline{S(a)}=5\times\triangle OAB=\underline{\dfrac{5a^2}{4\tan\theta}}$

(3) $AC=x$ ($=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$x^2-x-1=0$の正の解)，$AB=1$だから $\underline{\cos\theta}$ ($=\cos\angle BAC$) $=\dfrac{\frac{AC}{2}}{AB}=\dfrac{AC}{2AB}=\dfrac{x}{2\cdot1}=\underline{\dfrac{x}{2}}$

(4) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}=\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{4}{x+1}$ ($\because x^2=x+1$)　$\tan^2\theta=\dfrac{4}{x+1}-1=\dfrac{3-x}{x+1}$　$\therefore \underline{\dfrac{1}{\tan^2\theta}=\dfrac{x+1}{3-x}}$

(5) $\dfrac{1}{\tan^2\theta}=\dfrac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1}{3-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{(1+\sqrt{5})+2}{6-(1+\sqrt{5})}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}=\dfrac{(3+\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{25-5}=\dfrac{5+8\sqrt{5}+15}{20}=\dfrac{20+8\sqrt{5}}{20}=\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}=1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \underline{\dfrac{1}{\tan\theta}=\sqrt{1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}}$　$\underline{S(a)}=\dfrac{5a^2}{4}\cdot\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{5}{4}\times\sqrt{1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}\times a^2=\dfrac{1}{4}\sqrt{25\left(1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)}\,a^2=\underline{\dfrac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a^2}$

(補) (1) $l(a)$は，三角形の相似，角の2等分線の定理を用いても求まります。

(2)，(3)は，三角比の基本に戻って，図形を考えるということでした。

(4)，(5) 例えば，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$と有理化しなければなりません，という人がいます。大学入試では，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$も立派な答えです。

$\dfrac{1}{\tan^2\theta}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}=\dfrac{(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\dfrac{5+4\sqrt{5}+3}{4\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}+8}{4\sqrt{5}}=1+\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ のように，計算したいところでした。

$S(1)$と$S(a)$は，相似比が$1:a$の正五角形ですから，面積比 $S(1):S(a)=1:a^2$　$\therefore S(a)=a^2S(1)$です。

$S(1)$を他の方法で求めます。外接円の半径をRとすると，△ACDに正弦定理を用いて $\dfrac{1}{\sin\theta}=2R$。$\therefore R=\dfrac{1}{2\sin\theta}$

$S(1)=5\triangle OAB=5\times\dfrac{1}{2}R^2\sin\angle AOB=\dfrac{5}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2\sin\theta}\right)^2\sin2\theta=\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{4\sin^2\theta}\cdot2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{5}{4\tan\theta}$

一辺の長さaの正n角形の面積Sは，どうなりますか？ すぐ上にかいたのと同様に外接円の半径Rとして，

正弦定理より $2R=\dfrac{a}{\sin\frac{\pi}{n}}$　$R=\dfrac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$　$S=\dfrac{1}{2}R^2\sin\dfrac{2\pi}{n}\times n=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}\right)^2\times2\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}\times n$

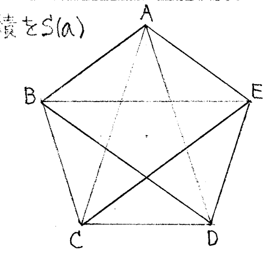
$S=\dfrac{a^2n\cos\frac{\pi}{n}}{4\sin\frac{\pi}{n}}=\dfrac{na^2}{4\tan\frac{\pi}{n}}$ となります。勿論，(解)の(2)と同様にもできます。

正五角形の面積（3平方の定理 とsinを用いました. troublesomeですが、できなくもありません.）

［類2］右図のように、一辺の長さaの正五角形ABCDEを図形F_aとする. F_aの面積を$S(a)$
一つの対角線の長さを$l(a)$とする.

(1) $l(a)$をaで表せ　(2) $\sin 36^\circ$を$l(1)=x$ ($a=1$のとき)としてxのsimpleな式で表せ.

(3) $S(a)=\dfrac{\sqrt{\square+\square\sqrt{\square}}}{\square}a^{\square}$　□を適当な整数値でうめよ.



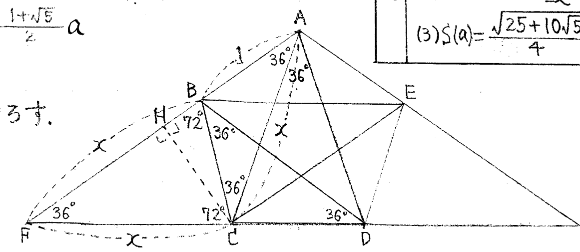
答	
	(1) $l(a)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a$
	(2) $\sin 36^\circ=\dfrac{\sqrt{x+2}}{2x}$
	(3) $S(a)=\dfrac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a^2$

（解）(1) 図形F_aは、円に内接するから、四角形ACDE（台形）にトレミーの定理を用いる.

$AC=AD=CE=l(a), AE=CD=DE=a$　$l(a)=a\times l(a)+a\times a$ ……①

$l(a)^2-al(a)-a^2=0$　$l(a)=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4a^2}}{2}=\dfrac{a+\sqrt{5}a}{2}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a$

(2) 右図のように、点Fをとり、点Cから、ABに垂線CHをおろす.



二等辺三角形AFC, BFCより $AC=FC=FB=x, AB=1$

$FA=x+1$, $AH(=FH)=\dfrac{x+1}{2}$ ※(ア)

直角三角形AHCに、三平方の定理を用いて、

$CH^2=AC^2-AH^2=x^2-\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2=\dfrac{4x^2-x^2-2x-1}{4}=\dfrac{3x^2-2x-1}{4}$

①より、$x^2=x+1$だから、$CH^2=\dfrac{3(x+1)-2x-1}{4}=\dfrac{x+2}{4}$　$\therefore CH=\dfrac{\sqrt{x+2}}{2}$　$\therefore \sin 36^\circ=\dfrac{CH}{AC}=\dfrac{\sqrt{x+2}}{2x}$

(3) 図形F_1とF_aは、相似比$1:a$だから、面積比$S(1):S(a)=1:a^2$, $S(a)=a^2S(1)$, $S(1)$を求めることにする.

$S(1)=\triangle ACD+\triangle ABC+\triangle AED=\triangle ACD+2\triangle ABC$

$\triangle AFC$を見て、$\triangle ABC=\triangle BFC\times\dfrac{1}{x}=\triangle ACD\times\dfrac{1}{x}$　$\therefore S(1)=\triangle ACD+2\triangle ACD\times\dfrac{1}{x}=\triangle ACD\times\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$ ※(イ)

$S(1)=\dfrac{1}{2}AC\times AD\times\sin 36^\circ\times\left(1+\dfrac{2}{x}\right)=\dfrac{1}{2}x^2\times\dfrac{\sqrt{x+2}}{2x}\times\dfrac{x+2}{x}=\dfrac{(x+2)\sqrt{x+2}}{4}=\dfrac{\sqrt{(x+2)^3}}{4}=\dfrac{\sqrt{x^3+6x^2+12x+8}}{4}$

①より、$x^2-x-1=0$の正の解$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$だから、$x^3+6x^2+12x+8=(x^2-x-1)(x+7)+20x+15$ =下行

$=0+20\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+15=10(1+\sqrt{5})+15=25+10\sqrt{5}$　$\therefore S(1)=\dfrac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$　したがって　$S(a)=\dfrac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a^2$

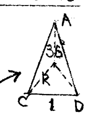
（補）(1)は、相似を利用して、他にも方法はあります（Vol. I. P.123参照）

※(ア)から $\cos 36^\circ=\dfrac{\frac{x+1}{2}}{x}=\dfrac{x+1}{2x}$ として $\sin^2 36^\circ=1-\left(\dfrac{x+1}{2x}\right)^2=$ ---- としてもできます.

※(イ)から $1+\dfrac{2}{x}$ に $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ を入れると、$1+\dfrac{2}{x}=1+\dfrac{4}{\sqrt{5}+1}=1+\dfrac{4(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\sqrt{5}$　$S(1)=\sqrt{5}\triangle ACD$ が得られ、

$S(1)=\sqrt{5}\times\dfrac{1}{2}x^2\sin 36^\circ=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x^2\times\dfrac{\sqrt{x+2}}{2x}=\dfrac{\sqrt{5}x\sqrt{x+2}}{4}=\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{x^2(x+2)}}{4}=\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{(x+1)(x+2)}}{4}=\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{x^2+3x+2}}{4}$

$=\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{x+1+3x+2}}{4}=\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{4x+3}}{4}=\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2(1+\sqrt{5})+3}}{4}=\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4}=\dfrac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$ となります.

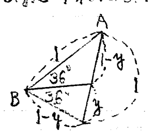


• $S(1)$を求める別方法として、正五角形の外接円の半径Rを利用して $S(1)=\dfrac{1}{2}R^2\sin 72^\circ\times 5$, 正弦定理より、$\dfrac{1}{\sin 36^\circ}=2R$ です.

$\theta=36^\circ$とすると $S(1)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2\sin\theta}\right)^2\times\sin 2\theta\times 5=\dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{5\cos\theta}{4\sin\theta}=\dfrac{5}{4\tan\theta}$, $\cos\theta=\dfrac{\frac{x}{2}}{1}=\dfrac{x}{2}$, $\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}-1=\dfrac{4}{x^2}-1$,

• F_1の内部にある正五角形F_1'の面積$S(1)'$を求めるには、どうしますか。F_1'の一辺の長さyを求めて、$S(1)'=S(y)$とすればよい.

右図より、（相似でもよいですが）角の2等分線の定理より、$1-y:1=y:1-y$　$(1-y)^2=y$　$y^2-3y+1=0$



$y=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$　$0<y<1$ より $y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$　$\therefore S(1)'=\dfrac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\cdot\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2=\dfrac{\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}}{4}\cdot\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}=\dfrac{\sqrt{5(5+2\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})^2}}{8}$

$=\dfrac{\sqrt{5\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)(94-42\sqrt{5})}}{8}=\dfrac{\sqrt{5\sqrt{5}(10\sqrt{5}-22)}}{8}=\dfrac{\sqrt{250-110\sqrt{5}}}{8}$

AAAABBCC 8文字の順列 ---- 実戦的(解)とすれば、P.102の(6)でしょうか ---- (考)を理解してから(解)を見る.

[類1] A,A,A,A,B,B,C,C, の8文字の順列を考える. 次の順列の個数を求めよ. (解)は、P.102の(6)

(1)「Aはとなりあう並びがある」かつ「Bはとなりあう並びがある」かつ「Cはとなりあう並びがある」順列の個数 N_1

(2)「Aはとなりあう並びがない」かつ「Bはとなりあう並びがない」かつ「Cはとなりあう並びがない」順列の個数 N_2

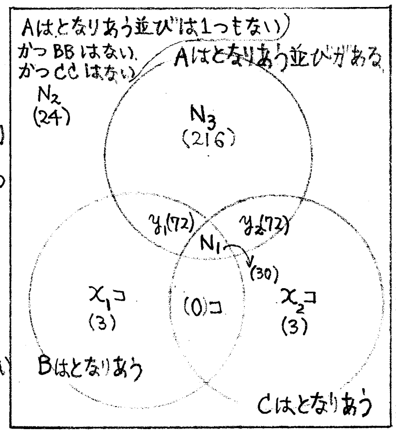
(3)「Aはとなりあう並びがある」かつ「Bはとなりあう並びがない」かつ「Cはとなりあう並びがない」順列の個数 N_3

(4)「BCの並びがない」かつ「CBの並びがない」順列の個数 N_4

(5) ABCの並びがただ1つある順列の個数 N_5

(考) 設問全体をよく読んでから、とりかかりましょう. (1)の(カイ)を得たあとで、必ずP.102の(7)~(9)を理解して下さい. [考]では、さまざまな方法を試みました. (2),(3)については、Venn図を利用すると便利です. (4),(5)についてはVenn図をかく?

最終的に、どのように、この[類]の解をかくのか、[考]のその1),(その2)などを参考にしてどの順に、解いていくかを考えて、実際に自分で(解)をかいてください



(1) Ⓐ,Ⓐ,Ⓐ,Ⓐ,BB,CC を並べればよい. 注 $N_1=\frac{6!}{4!}=30$ (P.102の(7)上参照)

(2) (その1) 全ての並べ方から4つのAを取り除きBから始まるものについて次の(i)(ii)(iii)

(i) ${}^{\vee}B^{\circ}B^{\vee}C^{\circ}C^{\vee}$ 2つの○には、必ずAが入る. 3つのVから2つのVを選んで、残り2つのAを入れる. ${}_3C_2=3$ (ii) ${}^{\vee}B^{\vee}C^{\vee}B^{\vee}C^{\vee}$ 5つのVから4つのVを選んで4つのAを入れる. ${}_5C_4=5$ (iii) ${}^{\vee}B^{\vee}C^{\circ}C^{\vee}B^{\vee}$ 1つの○にAを入れて、残りについて、${}_4C_3=4$

対称性により、Cから始まるものについても同様だから $N_2=(3+5+4)\times2=24$

(その2) ${}^{\vee}A^{\circ}A^{\circ}A^{\circ}A^{\vee}$の並びにB,B,C,Cを入れる. 3つの○には必ず入れなければならない

(i) BC,Ⓑ,Ⓒ 3つの○に並べて入れて、CB,Ⓑ,Ⓒを考えて、$3!\times2=12$

(ii) Ⓑ,Ⓑ,Ⓒ,Ⓒ (ア) 3つの○にⒷ,Ⓑ,Ⓒ, 2つのVから1つを選んでⒸを入れる.

$\frac{3!}{2}\times2=6$ (イ) 3つの○にⒷ,Ⓒ,Ⓒを入れるときも(ア)と同様に 6

よって $N_2=12+6+6=24$

答	(1) $N_1=30$ (2) $N_2=24$ (3) $N_3=216$ (4) $N_4=110$ (5) $N_5=108$

(3) (その1) Aがとなりあわない、Bがとなりあう、Cがとなりあわない、(x_1コ) は、$A^{\circ}A^{\circ}A^{\circ}A$ 3つの○には、BB,Ⓒ,Ⓒが必ず入るから、$x_1=3$. BとCの対称性により $x_2=x_1=3$, $y_1(=y_2)$を求め、全ての順列$=\frac{8!}{4!\cdot2!\,2!}=N_1+N_2+N_3+x_1+x_2+y_1+y_2+0$ を利用して、N_3を求める. Bがとなりあうもの(Aは、となりあっていてもとなりあっていなくてもどちらでもよい. Cも同じ. すなわち、上Venn図で $x_1+y_1+N_1+0$ ということ)は BBⒶⒶⒶⒶⒸⒸ の7つの順列であり、$\frac{7!}{4!2!}=x_1+y_1+N_1+0=3+y_1+30+0$

$\frac{7\cdot6\cdot5}{2}=33+y_1$ $y_1=105-33=72$ ※補(次頁) よって $\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{2\cdot2}=30+24+N_3+3+3+72+72+0=N_3+204$ $420=N_3+204$ $N_3=216$

(その2) 全ての並べ方から4つのAをとり除き、Bから始まるものについて、次の(i),(ii),(iii)に場合分けし、4つのAを組にわけて入れる. Cについては、対称性から、Bから始まるものと同数になる. (i) ${}^{\vee}B^{\vee\!\!\vee}B^{\vee}C^{\vee\!\!\vee}C^{\vee}$ (ア) AAⒶⒶ のとき 2つの$\vee\!\!\vee$にⒶⒶを入れると3つのVから1つのVを選んでAAを入れる 3通り, 2つの$\vee\!\!\vee$にAA,Ⓐをふりわけて入れると、$2\times3=6$通り) (イ) AA AA のとき 1通り) (ウ) AAA Ⓐ のとき 2通り (エ) AAAA のとき 0通り

(ii) ${}^{\vee}B^{\vee}C^{\vee}B^{\vee}C^{\vee}$ (ア) AAⒶⒶ のとき ${}_5C_3\cdot\frac{3!}{2!}=\frac{5\cdot4}{2}\cdot3=30$ (イ) AA AA のとき ${}_5C_2=10$ (ウ) AAA Ⓐ のとき ${}_5C_2\cdot2=20$

(エ) AAAA のとき 5 (iii) ${}^{\vee}B^{\vee}C^{\vee\!\!\vee}C^{\vee}B^{\vee}$ (ア) AAⒶⒶ のとき $\vee\!\!\vee$にAAを入れると ${}_4C_2=6$ $\vee\!\!\vee$にⒶを入れると ${}_4C_2\cdot2=12$

(イ) AA AA のとき 4 (ウ) AAA Ⓐ のとき $4+4=8$ (エ) AAAA のとき 1

以上よりBから始まるものについては $(3+6+1+2)+(30+10+20+5)+(6+12+4+8+1)=108$

対称性からCから始まるものについても同様 $\therefore N_3=108\times2=216$

(1)の 注 Ⓐは4コあるので必ずとなりあいます. 4コのAを先に並べてもできます. BB CCを先に並べてもできます. tryする.

(4) (その1) 全ての順列から、Aを全て取り除き、対称性からBから始まるものを求めることにする。BC, CBの間には必ずAが入る。

(i) B B C C　　ᵛBᵛBᵒAᵒCᵛCᵛ　2つのoにAを入れることは同じになるから、5つのVから重複を許して、3つのVをとり、残り3つのAを入れる。$_5H_3 = {}_7C_3 = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2} = 35$

(ii) B C B C　　ᵛBAᵛCAᵛBAᵛCᵛ　(i)と同じように5つのVから重複(?)を許して1つのVをとり、残り1つのAを入れる $_5H_1 = 5$

(iii) B C C B　　ᵛBAᵛCᵛCAᵛBᵛ　同じように5つのVから重複を許して2つのVをとり、残り2つのAを入れる。

$_5H_2 = {}_6C_2 = \frac{6\cdot5}{2} = 15$

Cから始まるものも、同様だから、$N_4 = \{(i)+(ii)+(iii)\} \times 2 = (35+5+15) \times 2 = 55 \times 2 = 110$

(その2) A, A, A, A, C, C を先に並べておいて、Cの前と後にBを入れない。(Cが連続しているか連続していないかで場合分けに注意)

(i) CがCCと連続している場合　例えば ᵛAᵛAᵛAᵛCCAᵛ　4つのVから重複を許して2つのVをとり2つのBを入れる。

$_4H_2 = {}_5C_2 = \frac{5\cdot4}{2} = 10$　A A A A CC の順列は $\frac{5!}{4!} = 5$　よって $10 \times 5 = 50$

(ii) CがAとAの間に入ってCが連続していない場合　例えば ᵛAᵛAᵛACAC　3つのVから重複を許して2つのVをとり、2つのBを入れる。$_3H_2 = {}_4C_2 = 6$　この場合は A A A A C C の順列から A A A A CC の順列を引いて $\frac{6!}{4!2!} - \frac{5!}{4!} = 15 - 5 = 10$ 通りあるから $6 \times 10 = 60$

$N_4 = (i) + (ii) = 50 + 60 = 110$

(その3) 次頁にあります。これがBest(カイ)ですかね。しかし、設問によっては、(その1)(その2)の方法がBestになることもあります。

(補) N_1, N_2, N_3 については、求めやすいものを先に求めて、前頁の(3)(その1)のように求めることができます。$y_1(=y_2)$については、下※

N_1は誰でも気付くことでしょう。$y_1(=y_2)$を求めることがpointになります。$x_1(=x_2)$, $x_1+y_1+N_1+0$は、前頁(考)(3)(その1)です。

$y_1+y_2+N_1+N_3$ を4つのAを場合分けして求め、$y_1(=y_2)$, N_1を利用して、N_3を求める。

(i) AAAA B B C C　$\frac{5!}{2!2!} = \frac{5\cdot4\cdot3}{2} = 30$　(ii) A AAA B B C C　ᵛBᵛBᵛCᵛCᵛ を並べて、5つのVから2つのVを選び、A AAA を入れる。$\frac{4!}{2!2!} \times {}_5C_2 \times 2 = 6 \times \frac{5\cdot4}{2} \times 2 = 120$　(iii) AA AA B B C C　ᵛBᵛBᵛCᵛCᵛ を並べて、5つのVから2つのVを選び、AA AA を入れる。$\frac{4!}{2!2!} \times {}_5C_2 = 60$　(iv) A A AA B B C C　同様に5つのVから3つのVを選び、A A AA を並べて入れる。$\frac{4!}{2!2!} \times {}_5C_3 \times \frac{3!}{2!} = 6 \times \frac{5\cdot4}{2} \times 3 = 180$　よって $y_1+y_2+N_1+N_3 = (i)+(ii)+(iii)+(iv) = 30+120+60+180 = 390$, $y_1 = y_2 = 72$

$N_1 = 30$ を入れて、$72+72+30+N_3 = 390$　$\therefore N_3 = 390 - 174 = 216$

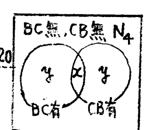
※ $y_1(=y_2)$について、x_1+y_1 (Aはとなりあってもとなりあわなくてもよい、Bはとなりあう、Cはとなりあわない) を求めます。

A A A A BB C C の順列から、A A A A BB CC の順列をひく。$x_1+y_1 = \frac{7!}{4!2!} - \frac{6!}{4!} = 105-30 = 75$　$x_1 = 3$ より $y_1 = 72$

Venn図を利用する場合、求めやすい集合の個数をいかに速く求めるかということです。対称性を利用することは、大切です。double countを防ぐために、場合わけを多くしても、annoyingになるだけだし、そのあたりの見極めが難しいですね。

この[類]の(2), (3)を解くのには、順に解くのではなく、対称性を利用し、Venn図を用いて、しばりの多いものから、順に、解いていくという方法が、Slow and steady wins the race. (More haste, less speed. 急がば回れ) ですかねぇ〜。

(4)の(その4) 右Venn図　x (「BCの並びがある」かつ「CBの並びがある」) を求める。ᵛAᵛAᵛAᵛAᵛ に入れる。



(i) BC CB　$_5C_2 \times 2 = 20$　(ii) BCB C or CBC B　$({}_5C_2 \times 2) \times 2 = 40$　(iii) BCBC or BCCB or CBCB or CBBC $5 \times 4 = 20$

$x = 20+40+20 = 80$　　$x+y$ (「BCの並びがある」) を求める。BC B C A A A A　$x+y = \frac{7!}{4!} - \frac{6!}{2!4!} = 195$

$y = 195 - x = 195 - 80 = 115$　全ての順列は $\frac{8!}{4!2!2!} = 420 = x + 2y + N_4 = 80 + 230 + N_4$　$\therefore N_4 = 110$

(4)(その3) Bestですね. B, B, C, C を次の(i)〜(iv)に分けて, $^{\vee}A^{\vee}A^{\vee}A^{\vee}A^{\vee}$ の5つのVにふり分けて並べる.

(i) Ⓑ Ⓑ Ⓒ Ⓒ を5つのVから4つのVを選び,並べて入れる. ${}_5C_4 \times \frac{4!}{2!2!} = 5 \times \frac{4\cdot 3}{2} = 30$

(ii) (BB) Ⓒ Ⓒ を5つのVから3つのVを選び並べて入れる. ${}_5C_3 \times \frac{3!}{2!} = \frac{5\cdot 4}{2} \times 3 = 30$

(iii) (CC) Ⓑ Ⓑ も(ii)と同様 30

(iv) (BB) (CC) を5つのVから,2つのVを選び並べて入れる. ${}_5C_2 \times 2 = \frac{5\cdot 4}{2} \times 2 = 20$

よって $N_4 = 30+30+30+20 = 110$ (P.102の(7)(考察)の(2)(その3)もこの方法でした.)

(5)(その1) (ABC) Ⓐ Ⓐ Ⓐ Ⓑ Ⓒ の全ての順列は $\frac{6!}{3!} = 6\cdot 5\cdot 4 = 120$ double countである (ABC) (ABC) Ⓐ Ⓐ の順列 $\frac{4!}{2!2!} = 6$ を引いて

$N_5 = 120 - 6 = 114$ 注 (例えば Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓐ (ABC) Ⓐ と (ABC) Ⓐ Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓐ の並びは,同じABCAABCAとなります.)

(その2) $^{\vee\!\!\vee}A^{\vee}A^{\vee}A^{\vee}A^{\vee}$ に B, B, C, C を組に分けて,並べて入れる.

(i) (BC) Ⓑ Ⓒ の3つに分けて, (BC) を4つのVから1つのVを選んで入れ,残り3つのVと$\vee\!\!\vee$の1つをあわせた4つから2つを選んで Ⓑ Ⓒ を並べて入れる. $4 \times {}_4C_2 \times 2 = 4 \times 6 \times 2 = 48$

(ii) (BC) (BC) の2つに分けて, 1つの$\vee\!\!\vee$と4つのVをあわせて,5つから2つを選んで,入れる.(この場合,必ずABCの並びはあります.) ${}_5C_2 = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$

(iii) (BC) (CB) の2つに分けて, (BC) を4つのVから1つのVを選んで入れ,残り3つのVと$\vee\!\!\vee$の1つをあわせた4つから1つを選んで (CB) を入れる. $4 \times 4 = 16$

(iv) (BCB) Ⓒ の2つに分けて,(iii)のように入れる. $4 \times 4 = 16$

(v) (BCC) Ⓑ の2つに分けて(iii)のように入れる. $4 \times 4 = 16$

(vi) (BCBC) を4つのVから1つを選んで入れる. 4

(vii) (BCCB) も(vi)と同じ. 4

よって, $N_5 = 48+10+16+16+16+4+4 = 114$

注 N_5 =「(ABC)の並びがちょうど1つある順列の個数 + (ABC)の並びがちょうど2つある順列の個数」です.

(補)(その3)として BBCC を(i) BBCC (ii) BCBC (iii) BCCB (iv) CCBB (v) CBCB (vi) CBBC の6つに分けて, 4つのAをABCの並びがあるように入れることもできます. (i)のときは $^{\vee}B^{\vee}ABC^{\vee}C^{\vee}$ として4つのVから重複を許して3つのVを選び,3つのAを入れる. ${}_4H_3 = {}_6C_3$ (iii),(v),(vi)は,全て ${}_4H_3 = {}_6C_3$ (iv)は,ABCの並びはできないので0.

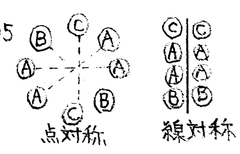
(ii)が少々 troublesome. Aを入れてABCの並びを作っておきますが,次の(ア),(イ),(ウ)の場合に分けてdouble countを防ぐことになります. (ア) $^{\vee}ABC^{\circ}B^{\vee}C^{\vee}$ (イ) $^{\circ}B^{\vee}C^{\vee}ABC^{\vee}$ (ウ) $^{\vee\!\!\vee}A\,B^{\vee}C\,{}^{\vee\!\!\vee}A\,B^{\vee}C^{\vee}$ (ア),(イ)は, oにAを入れないで,3つのVから3つのVを重複を許して選び,残り3つのAを入れる. ${}_3H_3 = {}_5C_3$. (ウ)は,5つのVから,2つのVを重複して選びますが,ABCの並びができないABACABACの1通りを引くことに注意です.すなわち ${}_5H_2 - 1 = {}_6C_2 - 1$ となります.とにかく, carefulにしないと,どこか見落しそうです.それに較べると,(その1)のsmartさが身にしみます.しかしながら,このような(カイ)を考えることが,君の数学力を高めることになります.更に(ウ)については,ABCの並びができないものを引くと考えることもできます. tryして下さい.

次頁に(解) 本番では,どの順にどのように解くかです.私は,(1),(5),(2),(3),(4)の順でした.

(問) A, A, A, A, B, B, C, C, の (1)円順列の個数 (2)数珠順列の個数 を求めよ. (詳しくは, Black Vol.Ⅲ, 順列,組合せ P.153の(2)〜)

(カイ) (1)(半公式化の式を利用して) Cを固定して,点対称は, $\frac{3!}{2!} = 3$, Cを固定すると, $\frac{7!}{4!\cdot 2!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{2} = 105$

よって $\frac{105-3}{2} + 3 = 54$ (2)線対称は, $\frac{4!}{2!} = 12$ よって, $\frac{54-12}{2} + 12 = 33$



(解) (1) Aは4つあるので、A A A A BB CC を並べるとAは必ずとなりあう. $\underline{N_1}=\frac{6!}{4!}=\underline{30}$

(2) 全ての順列から、2つのB、2つのCをとり除き、4つの $^{v}A^{o}A^{o}A^{o}A^{v}$ にして、B, B, C, Cを組にわけて、v o o o v に入れる.

(i) B B C C の4つにわける. 3つのoには必ず入れる. (vooo) or (ooov) に並べて入れる. $\frac{4!}{2!2!}\times 2=\underline{12}$

(ii) BC B C or CB B C の3つにわける. 3つのoに並べて入れる. $3!\times 2=\underline{12}$ したがって $\underline{N_2}=12+12=\underline{24}$

(3) P.102の(3)のVenn図を利用する.「Aはとなりあわない」かつ「Bはとなりあう」かつ「Cはとなりあう」は0個(0と表示)

対称性から $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ を求め、$N_1=30$, $N_2=24$ を利用して、全体の順列 $\frac{8!}{4!2!2!}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{2\cdot2}=420$ から引くことにする.

・x_1(「Aはとなりあわない」かつ「Bはとなりあう」かつ「Cはとなりあわない」)は、4つのAを並べて $A^{v}A^{v}A^{v}A$, 3つのvに BB, C, C を並べて入れて、$x_1=\frac{3!}{2!}=3\ (=x_2)$

・$y_1(=y_2)$ を求める. $x_1+y_1+N_1+0$ (「Bはとなりあう」かつ「Aはとなりあってもとなりあわなくてもどちらでもよい」かつ「Cはとなりあってもとなりあわなくてもどちらでもよい」)は、A A A A BB C C を並べるとよいから、

$x_1+y_1+N_1+0=\frac{7!}{4!\cdot2!}=\frac{7\cdot6\cdot5}{2}=105$, $x_1=3$, $N_1=30$ (∵(1)より)を入れて $y_1=105-3-30=72\ (=y_2)$

$420=x_1+x_2+y_1+y_2+0+N_1+N_2+N_3$ に $x_1=x_2=3$, $y_1=y_2=72$, $N_1=30$ (∵(1)より), $N_2=24$ (∵(2)より)を入れて、

$\underline{N_3}=420-3-3-72-72-30-24=\underline{216}$

(4) 全ての順列から、2つのB、2つのCをとり除き、4つのAを並べて、$^{v}A^{v}A^{v}A^{v}A^{v}$ として、BBCCを次の(i)(ii)(iii)の3つの組にわけて

5つのvから(i)(ii)(iii)の場合に応じて、4つのv, 3つのv, 2つのv, を選んで並べて入れる.

(i) B B C C の4つにして、5つのvから4つのvを選び並べて入れる. ${}_5C_4\times\frac{4!}{2!2!}=5\times6=\underline{30}$

(ii) BB C C or CC B B の3つにして、5つのvから3つのvを選び並べて入れる. ${}_5C_3\times\frac{3!}{2!}\times2=\frac{5\cdot4}{2}\cdot3\cdot2=\underline{60}$

(iii) BB CC の2つにして、5つのvから2つのvを選び並べて入れる. ${}_5C_2\times2=\frac{5\cdot4}{2}\cdot2=\underline{20}$

$\underline{N_4}=30+60+20=\underline{110}$ (P.102の(7)(考察)の(2)もこの方法がBestでした.)

(5) まず、ABCの並びがあるもの(ABCの並びが1つだけあるもの+ABCの並びが2つあるもの)を求める.

ABC A A A B C の順列は $\frac{6!}{3!}=6\cdot5\cdot4=120$ double count である ABC ABC A A $\frac{4!}{2!2!}=6$ をひいて $120-6=104$

(例えば、A ABC A B C A と A A B C ABC A は、同じ、AABCABCA の並びとなる.)

求めるN_5は、更に104から「ABCの並びが2つあるもの」をひいて、$\underline{N_5}=104-6=\underline{108}$ (P.102の(8)の(3)(その1), (補)参照))

(補)(別解)(3)N_3を先に求め、(2)N_2を求める. N_1, 0, $x_1(=x_2)$, $y_1(=y_2)$を求める迄は、上(解)(1)と(3)の途中迄に同じ.

$y_1+y_2+N_1+N_3$ (「Aはとなりあう」かつ「Bはとなりあっても、となりあわなくてもどちらでもよい」かつ「Cはとなりあっても、となりあわなくてもどちらでもよい」)は、全ての順列から、4つのAをとり除き、2つのB, 2つのCにして、BBCCを並べて考える. BBCCの順列は

$\frac{4!}{2!2!}=6$. 例えば、$^{v}B^{v}B^{v}C^{v}C^{v}$ のとき、5つのvから重複を許して4つのvを選び4つのAを入れる. ${}_5H_4$. この中には、Aがとなりあわない順列(5つのvから4つのvを選び4つのAを入れる順列) ${}_5C_4$が含まれるから、${}_5H_4-{}_5C_4={}_8C_4-{}_5C_4$

$=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2}-5=65$ $^{v}B^{v}C^{v}B^{v}C^{v}$, $^{v}B^{v}C^{v}C^{v}B^{v}$, $^{v}C^{v}C^{v}B^{v}B^{v}$, $^{v}C^{v}B^{v}C^{v}B^{v}$, $^{v}C^{v}B^{v}B^{v}C^{v}$, のときも同様だから、

$y_1+y_2+N_1+N_3=65\times6=390$, $y_1=y_2=72$, $N_1=30$ を入れて、$\underline{N_3}=390-72-72-30=\underline{216}$. 次に(2)$N_2$を求める.

全ての順列 $=\frac{8!}{4!2!2!}=420=x_1+x_2+y_1+y_2+0+N_1+N_2+N_3$. $x_1=x_2=3$, $y_1=y_2=72$, $N_1=30$, $N_3=216$ を入れて、$\underline{N_2}=\underline{24}$

[類]の(1)の(その1)を基本に戻り求めます.大切な方法をまとめることになります.

(その1′)AAAA BB CCは,わかっている.Aは4つあるから,6つのます目(□□□□□□)を作っておき,6つのます目から4つのます目を選んで,4つのAを入れ,残り2つのます目にBB CCを並べて入れる.Aは必ずとなりあう並びがある.

よって,$\underline{N_1}={}_6C_4\times 2=\frac{6!}{2!4!}\cdot 2=6\cdot 5=\underline{30}$

(別)6つのます目から2つを選んで,BB CCを並べて入れる.残り4つのます目は,4つのAが入る.Aは,となりあう並びが必ずある. $\underline{N_1}={}_6C_2\cdot 2=\frac{6!}{4!2!}\cdot 2=6\cdot 5=\underline{30}$

(補)当然の(カイ)として,(その1)をかきました.

(その1″)まず,4つのAを並べておき,${}^{\vee}A{}^{\vee}A{}^{\vee}A{}^{\vee}A{}^{\vee}$ 5つのVから重複を許して,2つのVをとり,BB CCを並べて入れる. $\underline{N_1}={}_5H_2\cdot 2={}_6C_2\cdot 2=\underline{30}$

(別)まず,${}^{\vee}BB{}^{\vee}CC{}^{\vee}$を並べておき,3つのVから重複を許して,4つのVをとり,4つのAを入れる.${}^{\vee}CC{}^{\vee}BB{}^{\vee}$も同様だから,

$\underline{N_1}={}_3H_4\cdot 2={}_6C_4\cdot 2=\underline{30}$ ((その1″)も(別)も必ずAはとなりあう並びがある.)

AABBCCの6文字の順列

(考察)AABBCC 6文字の順列について,理解して欲しいことをかいてみます.(AA BB CCなどVenn図をかく方法は,除いてあります)

(1)全ての順列 ($\underline{N_1=90}$)

(その1)全ての順列の個数をN_1とする.AABBCCと並ぶpro.は$\frac{1}{N_1}$である.6文字から,$\frac{2}{6}$のpro.でAをとり出し,左端におき,次に$\frac{1}{5}$のpro.でAをとり出し並べる.次に$\frac{2}{4}$のpro.でBをとり出し並べる.次に$\frac{1}{3}$のpro.でBをとり出し並べる.次はpro.1で自動的にC,Cとなる. $\frac{1}{N_1}=\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{90}$

したがって$\underline{N_1=90}$(教科書にかいてある方法で,$\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}=90$は,有名ですね.)

(その2.)全ての順列からCをとり除き,AとBだけにすると,(i)${}^{\vee}A{}^{\vee}A{}^{\vee}B{}^{\vee}B{}^{\vee}$ (ii)${}^{\vee}A{}^{\vee}B{}^{\vee}A{}^{\vee}B{}^{\vee}$ (iii)${}^{\vee}A{}^{\vee}B{}^{\vee}B{}^{\vee}A{}^{\vee}$ (iv)${}^{\vee}B{}^{\vee}B{}^{\vee}A{}^{\vee}A{}^{\vee}$ (v)${}^{\vee}B{}^{\vee}A{}^{\vee}B{}^{\vee}A{}^{\vee}$ (vi)${}^{\vee}B{}^{\vee}A{}^{\vee}A{}^{\vee}B{}^{\vee}$のいずれかである.(この4文字の順列の個数は$\frac{4!}{2!2!}=6$)

(i)〜(vi)の全ての場合,それぞれの順列の個数は,5つのVから2つのVを重複を許してとり出し,Cを入れればよい.よって $\underline{N_1}={}_5H_2\cdot 6={}_6C_2\cdot 6=\frac{6\cdot 5}{2}\cdot 6=\underline{90}$

(2)AとBがとなりあわない(AB,BAの並びがない)順列 $\underline{N_2=12}$

(その1)全ての順列からCをとり除きAとBだけにすると (i)${}^{\vee}A{}^{\vee}A{}^{\vee\vee}B{}^{\vee}B{}^{\vee}$ (ii)ABAB (iii)$A{}^{\vee}BB{}^{\vee}A$ (iv)${}^{\vee}B{}^{\vee}B{}^{\vee\vee}A{}^{\vee}A{}^{\vee}$ (v)BABA (vi)$B{}^{\vee}AA{}^{\vee}B$ (i)のとき${}^{\vee\vee}$にCを1コ入れ,4コのVと1つの${}^{\vee\vee}$をあわせた5コから1コを選んで,残りの1コのCを入れる.(${}^{\vee\vee}$にCを入れたとき,このCの前,後にCを入れることは同じことです.)よって5(通り) (ii)のとき,2コのCを,どこに入れてもAB,BAの並びは存在し,0(通り) (iii)のとき,2つのVに2つのCを入れるだけ1(通り) (iv)のとき(i)と同じようなことで5(通り) (v)のとき(ii)と同様に0コ (vi)のとき(iii)と同様1通り ∴$\underline{N_2}=5+0+1+5+0+1=\underline{12}$

(その2)全ての順列からBをとり除き,AとCだけにすると,(i)$AAC{}^{\vee}C{}^{\vee}$ (ii)$ACAC{}^{\vee}$ (iii)$AC{}^{\vee}CA$ (iv)${}^{\vee}C{}^{\vee}CAA$ (v)${}^{\vee}CACA$ (vi)${}^{\vee}CAAC{}^{\vee}$ (i),(iv),(vi)のとき2つのVから重複を許して,2つのVをとり,2つのBを入れる. ${}_2H_2\times 3={}_3C_2\times 3=9$ (ii),(iii),(v)のとき1つのVから重複を許して2つのVをとり,2つのBを入れる.(明らかにBBを入れるのみですが) ${}_1H_2\times 3={}_2C_2\times 3=3$ ∴$\underline{N_2}=9+3=\underline{12}$

(その3)Best 全ての順列から,2つのA,2つのBをとり除き,2つのCにして,${}^{\vee}C{}^{\vee}C{}^{\vee}$の3つのVにA,A,B,Bの4文字をAとBがとなりあわないように組わけて入れる.(i)3つの組AA B B or BB A Aにわけ,3つのVにふりわけて並べて入れる. $3\times 2=6$ (ii)AA BBの2つの組にわけ,3つのVから2つのVを選び並べて入れる. ${}_3C_2\cdot 2=6$ ∴$\underline{N_2}=6+6=\underline{12}$

(補)(その3)はeasyですが,(その1),(その2)も忘れずに!「AとBがとなりあう」順列の個数は,90−12=78ですが,上のようにすると,${}^{\vee}C{}^{\vee}C{}^{\vee}$ AA+B+B, BB+A+A, ----などとして(カイ)が得られます.tryする.

AABBCC 6文字の順列の続き

(3) ABの並びがある(ABがこの順でとなりあう)順列 $N_3=54$ (2つある場合と1つだけある場合に注意する)

(その1) (AB)(A)(B)(C)(C) の順列の個数から、double count である (AB)(AB)(C)(C) の順列の個数をひく、$N_3=\frac{5!}{2!}-\frac{4!}{2!2!}=54$

(例えば、(AB)(C)(A)(B)(C) と (A)(B)(C)(AB)(C) の並びは、同じABCABCとなります。)

(その2)(i) ABの並びが2つある場合 (AB)(AB)(C)(C) を並べて、$\frac{4!}{2!2!}=6$

(ii) ABの並びが1つだけある場合 全ての順列から2つのBをとり除き、2つのAと2つのCにして調べる。

(ア) AACCのとき ˇABˇACˇCˇ or ˇAABˇCˇCˇ として 4つのvから1つを選び残り1つのBを入れる。4+4=8

(このとき B̌ の前後にBを入れることは同じです)

(イ) ACAC (ウ) ACCA (エ) CCAA (オ) CACA (カ) CAAC のときもそれぞれ(ア)と同じ ∴ $8\times6=48$

N_3=(i)+(ii)=6+48=54

(補)(その3)として、2つのAと2つのBをとり除き、2つのCだけにして、ˇCˇCˇ に入れるとすると、((AB)(A)(B))((AB)(AB))((AB)(BA))((ABB)(A))((BAB)(A))((AAB)(B))((ABA)(B))((AABB))((ABAB))((ABBA))((BABA))((BAAB)) にわけて v に入れることになります。(BBA)(BBAA) にABの並びはありません。

(4) ABの並びがない順列 $N_4=36$ (勿論 $\frac{6!}{2!2!2!}-54=90-54=36$ ですが-----)

(その1) 全ての順列から2つのBをとり除き、2つのAと2つのCにして調べる。

(i) ˇAACˇCˇ のとき 3つのvから2つのvを重複して選び2つのBを入れる。${}_3H_2={}_4C_2=6$

(ii) ˇACˇACˇ (iii) ˇACˇCˇA (iv) ˇCˇCˇAA (v) ˇCˇACˇA (vi) ˇCˇAACˇ (ii)〜(vi)は、それぞれ(i)と同じ よって $N_4=6\times6=36$

(その2) 全ての順列から2つのCをとり除き、2つのAと2つのBにして調べる。

(i) AABBのとき ˇAˇAČBˇBˇ として、5つのvから1つのvを選んで、残り1つのCを入れる。Čの前後にCを入れるのは同じ ∴5

(ii) ABABのとき ACBACBの1 (iii) ABBAのとき ˇAČBˇBˇAˇ として(i)と同じ 5

(iv) BBAAのとき ˇBˇBˇAˇAˇ の5つのvから重複を許して2つのvを選び2つのCを入れる。${}_5H_2={}_6C_4=\frac{6\cdot5}{2}=15$

(v) BABAのとき ˇBAČBAˇ として(i)と同じ 5 (vi) BAABのとき ˇBˇAˇAČBˇ として(i)と同じ 5

よって $N_4=5+1+5+15+5+5=36$

(補) さて、ここで説明を加えます。まず、重複組合せの利用は到って便利だということです。大いに利用しましょう。全ての順列90を ABの並びでわけると、90=「ABの並びがある」+「ABの並びがない」=「ABの並びがただ1つだけある」+「ABの並びが2つある」+「ABの並びがない」です。N_3, N_4のどちらか一方を求めると、他方はすぐに求まります。設問に「ABの並びがただ1つだけある順列の個数を求めよ」とあるとき、$N_3=54$を(カイ)とするmistakeをする人が多くいます。(正カイ)は、54−6=48です。(3)の(その1)以外は、どの文字をとり除いて考えていくかということです。更に、(3)N_3については、次のように(その4)としてかいておきます。 (3)N_3 (その4) 2つのBをとり除き、2つのA、2つのCにして調べる。(i) ˇAˇAˇCˇCˇ のとき 全ての順列(${}_5H_2$)から、ABの並びがない順列(3つのvから重複を許して2つのvを選び、2つのBを入れる。${}_3H_2$)をひく。${}_5H_2-{}_3H_2={}_6C_2-{}_4C_2=9$

(ii) ˇACˇACˇ (iii) ˇACˇCˇA (iv) ˇCˇCˇAA (v) ˇCˇACˇA (vi) ˇCˇAACˇ (ii)〜(vi)全て(i)と同様だから $N_3=9\times6=54$

(3)の(その1)は、有名な方法ですが、少し手が込んだ設問になると、重複組合せの利用が威力を発揮することが多々あります。

(4)の(その3)として、(3)の(補)(その3)のようにすることもできます。

P.102の(9) [類2] 別解4)の続き

(iii) Cが3つのとき CCC□□ 2^2 (iv) Cが4つのとき CCCC□ 2 (v) Cが5つのとき CCCCC 1

(vi) Cが0コのとき □□□□□ 2^5 よって $N_4=2^4+2^3+2^2+2+1+2^5=\frac{2^6-1}{2-1}=63$

AABBCC 6文字の順列の続き、

(5) ABCの並びが、ただ1つだけある、順列 $\underline{N_5 = 22}$

(その1) ABC A B C の順列は、$4! = 24$、double count である ABC ABC の順列1をひいて、$24-1=23$. これは、
ABCの並びがある順列＝ABCの並びがただ1つだけある順列＋ABCの並びが2つある順列＝23 だから、
求める $N_5 = 23 -$ ABCの並びが2つある順列 $= 23-1 = \underline{22}$

(その2) 全ての並びから、2つのAをとり除き、2つのB、2つのCにして調べる。

(i) BBCC のとき $^{\vee}B\check{A}BC^{\vee}C^{\vee}$ として $\underline{4}$　(ii) BCBC のとき $\check{A}BCB^{\vee}C^{\vee}$ として $\underline{3}$、$B^{\vee}C\check{A}BC^{\vee}$ として $\underline{3}$

(iii) BCCB のとき $\check{A}BC^{\vee}C^{\vee}B^{\vee}$ として $\underline{4}$　(iv) CCBB のとき $\underline{0}$　(v) CBCB のとき $^{\vee}C\check{A}BC^{\vee}B^{\vee}$ として $\underline{4}$

(vi) CBBC のとき $^{\vee}C^{\vee}B\check{A}BC^{\vee}$ として $\underline{4}$　∴ $\underline{N_5} = 4+3+3+4+0+4+4 = \underline{22}$

($\check{A}$ は A の前後どちらに A を入れても同じ1コとして数えるということ。)

(その3) 全ての並びから2つのA、2つのBをとり除き、2つのCにして、$\overset{1}{\vee}C\overset{2}{\vee}C\vee$ に AABB をわけて入れる。

(i) AB A B のとき $\overset{1}{\vee}$ に AB を入れて $\overset{2}{\vee}$、$\vee$ に A、B を並べて入れる。$\overset{2}{\vee}$ に AB を入れて $\overset{1}{\vee}$、$\vee$ に A、B を並べて入れる。$2+2=\underline{4}$

(ii) AB AB のとき $\overset{1}{\vee}$ に AB を入れて $\vee$ に AB を入れる。or $\overset{2}{\vee}$ に AB を入れて $\vee$ に AB を入れる。$\underline{2}$

(iii) AB BA のとき $\overset{1}{\vee}$ に AB を入れて、$\overset{2}{\vee}$ or $\vee$ に BA を入れる。$\overset{2}{\vee}$ に AB を入れて、$\overset{1}{\vee}$ or $\vee$ に BA を入れる。$2+2=\underline{4}$

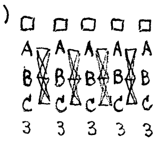
(iv) AAB B or BAB A のとき (iii)と同様だから $4+4=\underline{8}$

(vi) ABAB or BAAB のとき $\overset{1}{\vee}$ or $\overset{2}{\vee}$ に入れて、$2+2=\underline{4}$

よって $\underline{N_5} = 4+2+4+8+4 = \underline{22}$

[類2] A, B, C の中から重複を許して、5つの文字を選び、順列を作る。次の順列の個数を求めよ。
(1) 全ての順列の総数 N_1　(2) ABCの並びがある順列の個数 N_2　(3) ABの並びがある順列の個数 N_3
(4) AC, BC の並びがない順列の個数 N_4　　答 $N_1 = 243$, $N_2 = 27$, $N_3 = 99$, $N_4 = 63$

(解) (1) □□□□□　1つの□には、A, B, C 3文字のいずれか1つが入るから $\underline{N_1} = 3^5 = \underline{243}$

(1) 

(2) ABCの並びが2つあることはない。ABC□□, □ABC□, □□ABC, の3通り $\underline{N_2} = 3^2 \times 3 = \underline{27}$

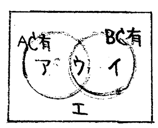
(3) (i) ABの並びが2つあるとき ABAB□, AB□AB, □ABAB　$3 \times 3 = \underline{9}$

(ii) ABの並びが1つだけあるとき (ア) AB□□□ − (ABAB□ + AB□AB) $= 3^3 - (3+3) = \underline{21}$

(イ) □AB□□ − □ABAB $= 3^3 - 3 = \underline{24}$　(ウ) □□AB□ − ABAB□ $= 3^3 - 3 = \underline{24}$

(エ) □□□AB − (AB□AB + □ABAB) $= 3^3 - (3+3) = \underline{21}$　　$\underline{N_3} = $ (i)+(ii) $= 9 + (21+24+24+21) = \underline{99}$

(4) (ア) ACの並びはあるがBCの並びはない　(イ) BCの並びはあるがACの並びはない
(ウ) AC, BC どちらの並びもある、(エ) AC, BC どちらの並びもない　求める N_4 は(エ)の場合である。



N_1 = ACの並びがある(ア)+(ウ) + BCの並びがある(イ)+(ウ) − AC, BC どちらの並びもある(ウ) + N_4(エ)
(3)より、対称性から ACの並びがある＝BCの並びがある＝ABの並びがある $= N_3 = 99$
AC, BC どちらの並びもある((ウ))は ACBC□, BCAC□, AC□BC, BC□AC, □ACBC, □BCAC だから (ウ) $= 3 \times 6 = 18$
よって $243 = 99 + 99 - 18 + N_4$　∴ $\underline{N_4} = \underline{63}$

(別解(4)) 条件の AC, BC には、どちらにも C が入っているので、C からの並びを考えてみる。例えば、(i) C が1つのとき、先頭に C がない、□C□□□ とすれば、□に A or B を入れることはできないので C を入れることになる。これは、C が1つのときに反する。
(□□C□□ なども同じ) よって (i) C が1つのとき C が先頭で C□□□□ 2^4 以下同様に (ii) C が2つのとき CC□□□ 2^3
以下、P.102の(8)下に続く

[類3] LASALLEの7文字の順列を考える.次の順列の個数を求めよ.(LLLAAES 7文字の順列)

(1) 全ての順列の個数 N_1　　(2)「Aはとなりあう並びがある」順列の個数 N_2

(3)「Lはとなりあう並びがない」順列の個数 N_3

(4)「L2文字はとなりあっているがL3文字はとなりあっていない」順列の個数 N_4

(5)「Aはとなりあう並びがない」かつ「Lはとなりあう並びがない」順列の個数 N_5

(6)「Aはとなりあう並びがない」かつ「Lはとなりあう並びがある」順列の個数 N_6

(7)「LとEがとなりあう並びがある」順列の個数 N_7

(8)「LとAがとなりあう並びがある」順列の個数 N_8　　(9) 次頁、最下段にあります.

答	(1) $N_1=420$	(2) $N_2=120$
	(3) $N_3=120$	(4) $N_4=240$
	(5) $N_5=96$	(6) $N_6=204$
	(7) $N_7=300$	(8) $N_8=390$

(考) (1),(2),(3),(5),(6) は,「Aはとなりあう並びがある」と「Lはとなりあう並びがある」のVenn図でしょうか?

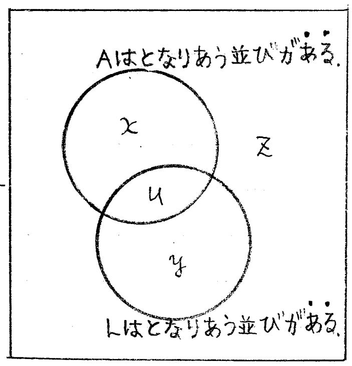
(7),(8)「となりあう並びがない」順列の個数を求めて. $N_1(=420)$ からひく.? (8) は, LとAの個数から見ても,「となりあう並びがない」のは、多くはなさそうです.

(解) (1) $\underline{N_1}=\dfrac{7!}{3!2!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{2}=\underline{420}$　$N_1=x+y+z+u=420$

(別解) 7個の枡目を作り, LASALLEの順に並ぶpro.pを求める.

左の枡目から順に, L, A, S, A, L, L, E と入れていくと, そのpro.は,

$p=\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{\cancel{4}2}\cdot\dfrac{\cancel{2}}{3}\cdot\dfrac{1}{\cancel{2}}\cdot\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{420}$ これは, $\dfrac{1}{N_1}$ に等しい. ∴$\underline{N_1=420}$



(2) 右図のようにVenn図をかく. $N_2=x+u=120$

(AA), (L), (L), (L), (E), (S) を並べればよい. $\underline{N_2}=x+u=\dfrac{6!}{3!}=6\cdot5\cdot4=\underline{120}$

(別解) ${}^{\vee}$(L)${}^{\vee}$(L)${}^{\vee}$(L)${}^{\vee}$(E)${}^{\vee}$(S)${}^{\vee}$ を並べて $\left(\dfrac{5!}{3!}\right)$, 6つのVの1つに(AA)を入れる. $\underline{N_2}=\dfrac{5!}{3!}\cdot6=\underline{120}$

(3) $N_3=x+z=120$

全ての順列から, 3個のLを取り除き, A, A, S, E の4文字にして, N_3 をdirectに求める.

${}^{\vee}$A${}^{\vee}$A${}^{\vee}$S${}^{\vee}$E${}^{\vee}$ を並べて, 5つのVから3つのVを選び, 3個のLをふり分けて入れる.

$\underline{N_3}=\dfrac{4!}{2!}\times{}_5C_3=4\cdot3\cdot\dfrac{5\cdot4}{2}=\underline{120}$

(4)「となりあうLがある」順列の個数 $=N_1-N_3=y+u=420-120=300$ であるが, これは,「L2文字がとなりあっている」順列の個数 N_4 と「L3文字がとなりあっている」順列の個数 n の和である. $N_4+n=300$

n は, (LLL)(A)(A)(S)(E) を並べて, $n=\dfrac{5!}{2!}=5\cdot4\cdot3=60$ よって $\underline{N_4}=300-n=300-60=\underline{240}$

(補)の(別解)を必ず見る. (その1)は, 一般的ですが, (その2), (その3)もあります.

(5) $N_5=z=120-x=120-24=96$

x(「Aはとなりあう並びがある」かつ「Lはとなりあう並びがない」)の順列の個数を求め, N_3 を利用して, $z=120-x$ として求める. ${}^{\vee}$(AA)${}^{\vee}$(S)${}^{\vee}$(E)${}^{\vee}$ を並べて, 4つのVから3つのVを選び, 3個のLをふり分けていれる.

$x=3!\times{}_4C_3=3\cdot2\cdot4=24$　∴$\underline{N_5}=z=120-x=120-24=\underline{96}$

これで, x, y, z, u, 全て求まり, $x=24$, (2)より $u=120-x=96$, (4)より $y=300-u=204$, $z=96$.

(6) $\underline{N_6} = y = \underline{204}$

(7)「LとEがとなりあう並びがない」順列の個数 m を求め、$N_7 = N_1 - m = 420 - m$ として求める。m について、
${}^{\vee}A{}^{\vee}A{}^{\times}E{}^{\times}S{}^{\vee}$ を並べて $(4!/2!)$、Eの両側に、Lを入れなければよい。3つのVから3つのVを重複を許して選び
3個のLを入れる。$m = \dfrac{4!}{2!} \times {}_3H_3 = 4\cdot3 \times {}_5C_3 = 4\cdot3\cdot\dfrac{5\cdot4}{2} = 120$ $\therefore \underline{N_7} = 420 - m = 420 - 120 = \underline{300}$

(補) m は、次のように、3個のLのつながり方で場合分けしても、求まりますが、……

(i) LLL L3個が連続している場合 ${}^{\vee}A{}^{\vee}A{}^{\vee}S{}^{\times}E{}^{\times}$ を並べて $(4!/2!)$ Eの両側に入れない $\dfrac{4!}{2!}\cdot3 = 4\cdot3\cdot3 = 36$

(ii) LL, L ${}^{\vee}A{}^{\vee}A{}^{\vee}S{}^{\times}E{}^{\times}$ $\dfrac{4!}{2!} \times {}_3C_2 \times 2 = 4\cdot3\cdot3\cdot2 = 72$

(iii) L, L, L ${}^{\vee}A{}^{\vee}A{}^{\vee}S{}^{\times}E{}^{\times}$ $\dfrac{4!}{2!}\cdot1 = 4\cdot3 = 12$ したがって $m = (i)+(ii)+(iii) = 36+72+12 = 120$

(8)「LとAがとなりあう並びがない」順列の個数 k を求め、$N_8 = N_1 - k = 420 - k$ として求める。k について、
A, A, S, E の Aの両側にLを入れないとして、求めるが、これは、次の(i), (ii)に場合分けする。

(i) ${}^{\times}$AA${}^{\times}$S${}^{\vee}$E${}^{\vee}$ Aが連続AAとしてある場合 ${}^{\times}$AA${}^{\times}$S${}^{\vee}$E${}^{\vee}$ を並べて $(3!)$ 2つのVから3つのVを重複して選び、
3個のLを入れる。$3! \times {}_2H_3 = 6 \times {}_4C_3 = 6\cdot4 = 24$

(ii) A, A, S, E Aが連続していない場合 ${}^{\times}A{}^{\times}\square{}^{\times}A{}^{\times}\square{}^{\vee}$ or ${}^{\vee}\square{}^{\times}A{}^{\times}\square{}^{\times}A{}^{\times}$ or ${}^{\times}A{}^{\times}\square{}^{\vee}\square{}^{\times}A{}^{\times}$ (それぞれ2つの□
には、S, Eが入る)の形であり、1ヶ所のVにLLLを入れるしかない。よって $2\times3 = 6$

$k = (i)+(ii) = 24+6 = 30$ であるから、$\underline{N_8} = N_1 - k = 420 - 30 = \underline{390}$

(補) (4)の(別解)

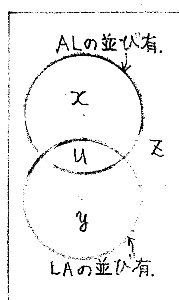
(その1) ${}^{\vee}$A${}^{\vee}$A${}^{\vee}$S${}^{\vee}$E${}^{\vee}$ を並べて $\left(\dfrac{4!}{2!}\right)$、5つのVから、2つのVを選び、LL, L を分け入れる。(LL, L にも2通りの順
があります。) $\underline{N_4} = \dfrac{4!}{2!} \times {}_5C_2 \times 2 = 4\cdot3\cdot\dfrac{5\cdot4}{2}\cdot2 = \underline{240}$

次のようにもできます。(その2) LL ${}^{\vee}A{}^{\vee}A{}^{\vee}S{}^{\vee}E{}^{\vee}$ を並べて $\left(\dfrac{5!}{2!}\right)$、LL の両側を除く、4つのVから1つのVを選んで、L
を入れる。$\therefore \underline{N_4} = \dfrac{5!}{2!} \times 4 = 5\cdot4\cdot3\cdot4 = \underline{240}$ (その3) LL L A A S E を並べて、$\left(\dfrac{6!}{2!}\right)$、LLL A A S E を
並べる $\left(\dfrac{5!}{2!}\right)$ ものを2回ひく。(例えば、LL L A A S E, L LL A A S E の2つは、LLL A A S E として、
2回数えられている。) $\therefore \underline{N_4} = \dfrac{6!}{2!} - \dfrac{5!}{2!} \times 2 = 6\cdot5\cdot4\cdot3 - 5\cdot4\cdot3\cdot2 = 5\cdot4\cdot3\cdot(6-2) = 60\cdot4 = \underline{240}$

紙面が余りましたので、次の(9)をどうぞ、直接、この設問があるときの手順を覚える。

問 (9)「LAの並びがある」かつ「ALの並びがある」順列の個数 N_9	答 (9) $N_9 = 210$

(9)



(解) (9) 右Venn図参照 (8)より $\underline{z = k = 30}$ ---① $\underline{x+y+u = 390}$ ---② (求める $N_9 = u$)

- 「ALの並びがない」順列の個数 $y+z$ を求める。
${}^{\vee}A{}^{\times}A{}^{\times}S{}^{\vee}E{}^{\vee}$ を並べておいて、$\left(\dfrac{4!}{2!}\right)$、2つのAの右側以外の3つのVから重複を許して、
3つのVを選び、3個のLを入れる。$\underline{y+z} = \left(\dfrac{4!}{2!}\right) \times {}_3H_3 = 4\cdot3 \times {}_5C_3 = 4\cdot3\cdot\dfrac{5\cdot4}{2} = \underline{120}$ ---③
- 「LAの並びがない」順列の個数 $x+z$ を求める。(結局、上の「ALの並びがない」順列の個数と同じでした。)
${}^{\times}A{}^{\times}A{}^{\vee}S{}^{\vee}E{}^{\vee}$ を並べておいて $\left(\dfrac{4!}{2!}\right)$、2つのAの左側以外の3つのVから重複を許して、3つのVを選び、3個のL
を入れる。$\underline{x+z} = \dfrac{4!}{2!} \times {}_3H_3 = \underline{120}$ ---④ ①と③より $\underline{y = 90}$、①と④より $\underline{x = 90}$ よって ②より、$\underline{N_9} = u = \underline{210}$

[類6] サイコロ3個をなげる。3つの出た目の和がn $(3 \leqq n \leqq 18)$となるpro.をP_nとする。P_nの最大値とそのときのnの値を求めよ。

(考) サイコロ$\dot{2}$コのときでは、どのようになりますか。応用できるように、やってみます。2つの出た目をx, yとして、$x+y=n$ $(2 \leqq n \leqq 12)$とします。サイコロ$\dot{1}$コをなげるときの出た目の期待値(平均値)は、$\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.5$ですから、サイコロ$\dot{2}$コのときの期待値は、$3.5+3.5=7$です。$n=7$となる整数解$(x, y)$の組のコスウは、このときが、最大であり、$P_7$が最大であろうと予想できます。実際$n=2$, $n=12$のときそれぞれ$(1,1)$, $(6,6)$の一組であり、$P_2=P_{12}=\frac{1}{6^2}$です。P_7が対称の中心ですかね? $x+y=n$ $(2 \leqq n \leqq 12)$のときの整数解(x, y)の組のコスウをT_nコとします。

$P_n=\frac{T_n}{6^2}$です。対称性を示します。$x+y=7-k$ ---① $x+y=7+k$ ---② $k=0,1,2,3,4,5$として、$T_{7-k}=T_{7+k}$を示す。

①のとき$x-1=a$, $y-1=b$とおけば、$1 \leqq x \leqq 6$, $1 \leqq y \leqq 6$ですから、aとbだけにしてしまうと、$0 \leqq a \leqq 5$, $0 \leqq b \leqq 5$, $a+b=5-k$の整数解(a, b)の組のコスウと一致します。②のとき$6-x=a$, $6-y=b$とおけば、同様に、$0 \leqq a \leqq 5$, $0 \leqq b \leqq 5$, $a+b=5-k$となり、①と②のコスウ $T_{7-k}=T_{7+k}$です。

$k=0$のときT_7は、$0 \leqq a \leqq 5$, $0 \leqq b \leqq 5$, $a+b=5$ですから、$T_7={}_2H_5={}_6C_5=6$ $\therefore P_7=\frac{6}{6^2}$

$k=1$のとき$T_6=T_8$は、$0 \leqq a \leqq 5$, $0 \leqq b \leqq 5$, $a+b=4$ですから、$T_6=T_8={}_2H_4={}_5C_4=5$ $\therefore P_6=P_8=\frac{5}{6^2}$ 以下略

さて、サイコロ$\dot{3}$コのときですが、期待値は、$3.5+3.5+3.5=10.5$ですからP_{10} or P_{11}が最大であろうと予想できます。

$x+y+z=10-k$, $x+y+z=11+k$, $(k=0,1,2,3,4,5,6,7)$とおいて、$T_{10-k}=T_{11+k}$を示すことになります。

(解) 3つの出た目をx, y, zとする。$1 \leqq x \leqq 6$, $1 \leqq y \leqq 6$, $1 \leqq z \leqq 6$, $x+y+z=n$ $(3 \leqq n \leqq 18)$をみたす整数解(x, y, z)の組の個数をT_nとする。$P_n=\frac{T_n}{6^3}$である。$x+y+z=10-k$ ---① $x+y+z=11+k$ ---② $k=0,1,2,3,4,5,6,7$として、$T_{10-k}=T_{11+k}$を示す。

①のとき$x-1=a$, $y-1=b$, $z-1=c$とおけば、T_{10-k}は、$0 \leqq a \leqq 5$, $0 \leqq b \leqq 5$, $0 \leqq c \leqq 5$, $a+b+c=7-k$, $k=0,1,2,3,4,5,6,7$をみたす整数解(a, b, c)の個数と一致する。②のとき$6-x=a$, $6-y=b$, $6-z=c$とおけば、T_{11+k}は、$0 \leqq a \leqq 5$, $0 \leqq b \leqq 5$, $0 \leqq c \leqq 5$, $a+b+c=7-k$, $k=0,1,2,3,4,5,6,7$をみたす整数解(a, b, c)の個数と一致する。$\therefore T_{10-k}=T_{11+k}$

- $k=0$のとき$T_{10}(=T_{11})$を求める。$0 \leqq a \leqq 5$, $0 \leqq b \leqq 5$, $0 \leqq c \leqq 5$, $a+b+c=7$ ${}_3H_7={}_9C_7=\frac{9 \cdot 8}{2}=36$個には、$a, b, c$の範囲に含まれない、$(7,0,0)$の並びかえ3個と$(6,1,0)$の並びかえ$3!=6$個が含まれるので、これを引いて、$T_{10}=T_{11}=36-(3+6)=27$個 $\therefore P_{10}=P_{11}=\frac{27}{6^3}=\frac{1}{8}$
- $k=1$のとき$T_9(=T_{12})$を求める。$0 \leqq a \leqq 5$, $0 \leqq b \leqq 5$, $0 \leqq c \leqq 5$, $a+b+c=6$ ${}_3H_6={}_8C_6=\frac{8 \cdot 7}{2}=28$個には、$a, b, c$の範囲に、含まれない、$(6,0,0)$の並びかえ3個が含まれるので、これを引いて、$T_9=T_{12}=28-3=25$個 $\therefore P_9=P_{12}=\frac{25}{6^3}=\frac{25}{216}$
- $k=2$ ※補 のとき$T_8(=T_{13})$は、$0 \leqq a \leqq 5$, $0 \leqq b \leqq 5$, $0 \leqq c \leqq 5$, $a+b+c=5$ ${}_3H_5={}_7C_5=\frac{7 \cdot 6}{2}=21$個 $T_8=T_{13}=21$個 $\therefore P_8=P_{13}=\frac{21}{6^3}=\frac{7}{72}$
- $k=3$のとき$T_7(=T_{14})$は、$0 \leqq a \leqq 5$, $0 \leqq b \leqq 5$, $0 \leqq c \leqq 5$, $a+b+c=4$ ${}_3H_4={}_6C_4=\frac{6 \cdot 5}{2}=15$個 $T_7=T_{14}=15$個 $\therefore P_7=P_{14}=\frac{15}{6^3}=\frac{5}{72}$
- $k=4$, $k=5$, $k=6$, $k=7$のとき、同様に、それぞれ、${}_3H_3={}_5C_3=\frac{5 \cdot 4}{2}=10$個, ${}_3H_2={}_4C_2=\frac{4 \cdot 3}{2}=6$個, ${}_3H_1={}_3C_1=3$個

${}_3H_0={}_2C_0=1$個であるから、$P_6=P_{15}=\frac{10}{6^3}=\frac{5}{105}$, $P_5=P_{16}=\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}$, $P_4=P_{17}=\frac{3}{6^3}=\frac{1}{72}$, $P_3=P_{18}=\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}$

したがって、求めるP_nの最大値は、$P_{10}=P_{11}=\frac{1}{8}$ ($n=10$ or $n=11$のとき)

(補) $0 \leqq a$, $0 \leqq b$, $0 \leqq c$, $a+b+c=5$をみたす整数解は、必ず5以下なので、条件$0 \leqq a \leqq 5$, $0 \leqq b \leqq 5$, $0 \leqq c \leqq 5$をみたします。

$k=3$のとき$a+b+c=4$, a, b, cは負でない整数$(0 \leqq a, 0 \leqq b, 0 \leqq c)$をみたす整数解$(a, b, c)$の組$({}_3H_4={}_6C_4=\frac{6 \cdot 5}{2}=15$個$)$の中に、5以上の整数$a, b, c$が含まれることはなく、必ず$0 \leqq a \leqq 4$, $0 \leqq b \leqq 4$, $0 \leqq c \leqq 4$であり、$0 \leqq a \leqq 5$, $0 \leqq b \leqq 5$, $0 \leqq c \leqq 5$の条件は、必ずみたされています。($k=0,1$のとき、余分な個数を引く必要があり、$2 \leqq k \leqq 7$のときは、引くような個数はないということ)